——研究論文——

保険会社のデフォルトを考慮した企業年金保険の価格付け

鈴木 輝好

2004 年 6 月 16 日投稿
2005 年 3 月 1 日受理

概要

生命保険会社が取り扱っている企業年金には額面保証や利率保証さらには特別配当，成果配当といった仕組みがある．本論文は，これらの仕組みをどちらか一方が行使可能な永久アメリカン・プットオプションと永久アメリカン・コールオプションの組み合わせとして定式化し企業年金保険の価格を解析的に導出した．その際，保険会社にデフォルトの可能性がありデフォルト時にはペイオフが減額されることを考慮に入れた．その結果，初期費用を十分に払う場合には成果配当の実施は年金基金による契約の解約を抑制するものの，その効果は低格付けの生命保険会社では現れにくいことが分かった．また，初期費用が小さい場合，生命保険会社のデフォルトリスクの影響は受け取り利息の差に集約され，年金基金の解約戦略には影響が少ないことが分かった．
キーワード： デフォルトリスク，利率保証，解約オプション，金融工学

1 はじめに

保険会社の負債を金融工学の手法により評価する研究が進められている．Boyle and Hardy (1997) は元本保証型保険商品を保険統計的アプローチと金融工学的アプローチの 2 つの方法を用いて分析し，運用コストに関して異なった結果を得た．Babbel and Merrill (1999) は保険負債のキャッシュフローと金利とがそれぞれ確定的な場合と確率的な場合の 4 通りについて保険負債の価格評価を行い，保険負債のリスクマネージメントについて包括的な議論を行った．また，特定の保険商品についても，金融工学的な立場からその価格付けが行われている．価格モデルを用いて保険会社の資産運用戦略を明らかにしようとする研究が多い．Brennan and Schwartz (1976) は元本保証型保険商品をコールオプションとして表現し，そのヘッジ戦略について分析した．また，Grosen and Jorgensen (2000) は年金保険商品における利率保証および解約権，成果配当を保険会社資産を原資産とするオプションとして定式化した．その価格は保証利率と市場金利の差および成果配当の仕組みに大きく依存するとの結果を得た．Bacinello (2000) はオーストラリアやカナダで見られる特定の年金プランを 2 資産に関する最大値オプションとして定式化した．そして，その価格が名目金利や消費者物価指数から受ける影響について分析した．刈屋 (1999) は，伝統的な死亡保険おける被保険者の死亡を金融工学的なデフォルトとして捉え，生命保険料の無裁定価格を導出した．確率変数として与えられる死亡時刻をハザード関数を用いて表現し死亡事由をマルチファクター化することに成功している．また，湯前 (1996) は数値計算を利用して企業年金保険の価格について分析した．さらに湯前 (2004) および Iwaki and Yumae (2004) は有配当保険を扱う保険会社の投資戦略をマルチンゲールの表現定理を用いた最適投資戦略の枠組みを用いて定式

* 北海道大学大学院経済学研究科 〒060-0809 札幌市北区北 9 条西 7 丁目 mail: suzuki@econ.hokudai.ac.jp.

化した．参照資産を会社持分と契約者持分に分けて分析している点に特徴があり，また契約者の解約行動について様々な条件の下で解析を行っている．

本研究は，湯前 (1996) と同様に企業年金保険の価格付けを行う．企業年金保険は，相対的な取引相手である年金基金との折衝により設計されているため，後に説明するように複雑で様々なオプション性を持つ．本研究は，既存研究と同様にそのオプション性を金融工学的に評価する．ただし，既存研究と違い，保険会社にデフォルトの可能性があることを考慮に入れる．すなわち，本研究は保険会社のリスクマネージメントよりも，むしろ保険契約者（ここでは年金基金）のリスクマネージメントに視点を置いている．我が国では，1990 年代中ごろを過ぎてから幾つかの生命保険会社が破綻に至ったことから，年金基金のリスクマネージメントの中でもデフォルトリスクの管理は特に重要である．保険会社のデフォルトを考慮した企業年金保険の分析については鈴木 (2004) があるが，企業年金保険の特徴のうち，運用成績に依存して支払われる成果配当が考慮されていなかった．また，運用・受託手数料を一括前払いする点において現実を反映していない．一般に企業年金保険への加入の際は額面価格が払い込まれ，本来生じるはずのオプション料は手数料として事後的に調整される．企業年金保険における解約行動は，参照資産の運用成績ばかりか，毎期に受け取る配当と毎期に支払う手数料との兼ね合いで実施されるはずである．デフォルトリスク管理の結果が契約の更新あるいは解約であるから，手数料を一括払いから後払いに拡張することの意義は大きい．

以上のような観点から企業年金保険の価格付けを行うことは，保険会社にとっても有用である．契約者である年金基金の行動について予見を得ることが可能になるためである．例えば，保証利率を下げた場合に解約が発生するかどうか，あるいは成果配当を実施した場合に価格はどの程度上がるかである．このような分析を行うためには，価格式はより容易に分析が可能な解析解であることが望ましい．よって，本論文では，デフォルトリスクを考慮した企業年金保険の価格を解析的に導出する．そして，そのために 3 つの仮定を置いた．第一には，契約には満期が無いと仮定した．実際に多くの企業年金保険は無期限契約である．第二に，生命保険会社の資産運用に関して定常性を仮定した．生命保険会社は債券運用においてバイ・アンド・ホールド戦略あるいはデュレーションを一定に保つような戦略を取ることが多いためである．第三には，オプション発行者（生命保険会社）のデフォルトリスクに関して外生モデルである Jarrow and Turnbull (1995) を採用した[*1]．Merton (1976) による構造的デフォルトモデルを採用するよりもリスクマネージメントが容易になるという利点がある．

ところで，保険商品はその負債特性にあわせて一般勘定資産あるいは特別勘定資産のどちらかで運用されている．例えば伝統的個人保険など安全志向を要する商品であれば一般勘定資産により，また変額年金保険などハイリスク商品であれば特別勘定資産により運用されている．一般勘定資産は，保険会社の資産の大部分を占めていることが多く，また特別勘定資産が顧客ごとに分離して管理されているのとは対照的に一体的に管理・運用されている．企業年金保険については，一般勘定で運用される商品もあれば特別勘定で運用される商品もあり，年金基金はリスク許容度に応じてどちらかを選択することになる．このうち相対的に残高の多い傾向がある一般勘定資産で運用されている企業年金保険は，次のような特徴のいくつかを併せ持つことが多い．

(a) 最低利率保証：運用成果にかかわらずある一定の利息を保険会社が保証する仕組み．
(b) 特別配当： 契約の消滅時に株式の含み益などを原資として支払われる利益還元を目的とした仕組み．もともと個人保険の仕組みだが企業年金にも同様の仕組みがある．
(c) 解約控除付き額面保証：年金基金（委託者）により解約の申し出があった場合，事前に決められた額面とその時点における委託者のファンド持分価格との差額の一定割合等を，委託者が違約金として支払う

[*1] デフォルトリスクのあるオプションに関する代表的な研究には Johnson and Stulz (1987) および Hull and White (1993) がある．ある企業が別の企業の資産価格を参照するオプションを発行した場合を考え，オプション発行企業にオプションペイオフを履行するだけの資産が残っていないリスク（デフォルトリスク）を考慮した．デフォルトリスクについては Merton (1974) による構造モデルを用いている．

仕組み．いつでも解約できる．

(d) 成果配当：決算時点においてある程度の運用成果がある場合，その成果に応じて収益が委託者に配分される仕組み．

(e) 額面価格による加入：加入価格が額面に固定され，加入後に契約が更新する限り毎期一定量の手数料（プレミアム）を支払う仕組み．

以下では，これらの仕組みを考慮した企業年金保険の価格付けを行う．その際，基金を拠出している事業会社は十分に成熟しており，従業員の定年や退職は予見可能であると考える．すなわち，基金による保険契約の戦略的な解約を除くと，資金の出入は確定的であり定常化しているとする．また一般勘定資産の保険債務は，個人保険や個人年金をはじめとする多数の契約からなり死亡事故のリスクは十分に分散されていると考えることにする．この仮定は保険会社のデフォルトモデルとして外生モデルを採用したことと整合的である．すなわち一般勘定資産の運用と保険会社の死差益（損）*2とは独立であると考える．これらの仮定の下で，本論文では企業年金保険を満期を持たない金融オプション商品として評価する．まず第 2 節においては鈴木 (2004) により提案された (a) から (c) の仕組みを考慮するモデルを示す．これにより本論文の基本的な枠組みを与える．次に第 3 節において (a) から (d) を考慮したモデルとして本論文の主要な結果を示す．ここでは成果配当とデフォルトリスクの関係を明らかにする．さらに第 4 節では (a) から (e) の全ての仕組みを考慮したモデルを示す．そして額面価格による加入と解約の実施との関係を明らかにする．最後に第 5 節で結論を述べる．

2 最低利率保証および特別配当と額面保証の価格付け

まず，一般勘定資産および市場に関する仮定を示す．本論文を通じて，証券市場は完備で裁定機会は存在しないと仮定する．すなわち，唯一つのリスク中立測度 Q が存在することを仮定する．ただし，無リスク金利 r は一定であるとする．また，一般勘定資産は証券ではなく，実確率測度 P の下で

$$\frac{dX(t)}{X(t)} = \mu_P dt + \sigma dB(t), \quad t > 0$$

に従うと仮定する*3．ここで，一般勘定資産 $X(t)$ と同等のリスクを持つ証券の収益率を μ とし，収益率の不足分を

$$\xi = \mu - \mu_P$$

と表すことにする．すると，$X(t)$ を原資産とするオプションは，ξ を配当と同じように扱うことにより，リスク中立測度 Q の下で評価できることが知られている*4．本論文では，$\xi = 0$ の場合，すなわち一般勘定資産を証券として考える場合も含めて

$$\mu_P \le \mu$$

と仮定する．結局，$\{B(t); 0 \le t\}$ を確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, Q)$ 上の標準 1 次元ブラウン運動とし，また $\{\mathcal{F}_t; 0 \le t\}$ は $\{B(s); s \le t\}$ により生成された加算加法族とすると，一般勘定資産 $X(t)$ はリスク中立測度 Q の下で確率

*2 保険会社の損益には 3 つの種類がある．第一は資産運用に関する利差益（損），第二は死亡事故の見積もりと実際との差から生じる死差益（損），第三が費用の見積もりと実際との差から生じる費差益（損）である．本論文では，これらの損益を原因とする保険会社のデフォルト事象を外生化した．このため，とくに一般勘定資産に資金を預ける保険商品は単なる金融商品となる．

*3 一般勘定資産のうち何割かは満期のある債券で運用されている．ただし生命保険会社の債券運用では，十分な時間が経過するとラダー型ポートフォリオが構成されるバイアンドホールド戦略，あるいはデュレーションを一定に保つような戦略が取られることが多い．どちらの場合もボラティリティは一定であると考えることができる．

*4 McDonald and Siegel (1984) により示された結果である．オプションの複製は確率微分方程式 $dX'(t)/X(t) = \mu dt + \sigma dB(t)$, に従う証券 X' により行う．ここで証券市場の完備性から，証券 $X'(t)$ は別の証券から複製可能である．よって証券 $X'(t)$ が現実に存在するかどうかは大きな問題とならない．また，この方法では，一般的なリスク中立化法における諸パラメータに加えて，収益率格差 ξ の値が必要となる．実際に ξ を設定するためには μ_P を観測し，さらに何らかの均衡モデル (例えば CAPM) を用いて μ を推定する必要がある．後にデフォルトリスクの影響を分析する数値例では，議論の焦点を絞るため $\xi = 0$ とした．

過程

$$\frac{dX(t)}{X(t)} = (r-\xi)dt + \sigma dB(t), \quad t>0 \tag{1}$$

に従う．ただし $X(0)=x$ である．さらに，生命保険会社のデフォルト時刻を確率変数 τ で表し，τ は $B(t)$ とは独立で平均 $1/h$ の指数分布に従うと仮定する．これは Jarrow and Turnbull (1995) の特別な場合に相当し，標準的な条件の下で企業年金保険はリスク中立測度 Q の下で評価することが可能である．ただし，企業年金保険のデフォルト時点における損失率を Δ とする．

次に，最低利率保証および特別配当と解約控除付き額面保証の仕組みを持つ企業年金保険のペイオフをモデル化する．企業年金保険には満期が無くまたいつでも解約できるとする．ただし，解約の際には解約控除金あるいは特別配当が生じるとする．すなわち，$X(t) \le F$ における解約では，基金は解約控除率を α，額面を F とした場合，解約控除金 $\alpha(F-X(t))$ を支払い額面 F の保証を受けるものとする．このとき解約時点における基金のペイオフは

$$(1-\alpha)F + \alpha X(t), \quad X \le F$$

である．また $X(t) > F$ における解約では，基金は配当率を β として特別配当を受け取ることができるとする．このとき解約時点における基金のペイオフは

$$(1-\beta)F + \beta X(t), \quad X > F$$

である．結局，基金の自発的な解約に関するペイオフは

$$\gamma = \begin{cases} \alpha, & X \le F \\ \beta, & X > F \end{cases} \tag{2}$$

とおいて

$$\gamma(X(t)-F)+F \tag{3}$$

になる．ただしペイオフ関数の凸性*5を保証するために

$$\alpha < \beta \tag{4}$$

を仮定する．さいごに，最低保証利率を C とし基金は保険会社がデフォルトするかまたは契約を解除するまでの間，連続的にこれを受け取るとする．このとき利子 C は一般勘定資産から控除することなく会社資本から賄うとする．会社はその代わりに特別配当実施後に存在する一般勘定資産を資本化する権利を持つ．このようなモデル化は企業年金保険のデフォルトモデルを外生化したことと整合的である．

これらの他に保険会社のデフォルト時のペイオフがある．保険会社のデフォルト時にはその時点において，通常の解約ペイオフ (3) が損失率 Δ だけ減額されて分配されると考えるのが一般的である．したがって，デフォルト時のペイオフを

$$(1-\Delta)\left\{\gamma(X(t)-F)+F\right\} \tag{5}$$

と仮定する*6．

ここで，限界保証利率

$$C^* = (1-\gamma)F(r+h\Delta) + \gamma\Delta F(r+h) \tag{6}$$

---

*5 オプションペイオフは権利保有者にとって x の凸関数である．この性質の一般性を調べたものに Kijima (2002) がある．

*6 この他のデフォルトペイオフモデルとして，一般勘定資産 $X(t)$ が減額されて分配される $(1-\Delta)X(t)$ や額面 F が減額されて分配される $(1-\Delta)F$ が考えられる．しかし，これらのモデルでは，保険会社がデフォルトすると通常の解約時よりも多くの分配金が生じる可能性があり，保険会社のデフォルトの影響を議論する上では適さない．よってペイオフモデル (5) を仮定した．

を定義しておく．もし $X(t) > F$ ならば，第1項は一般勘定資産のうち特別配当の対象とならない資産から得られる利息に相当する．また第2項は，デフォルトにより基金が損失する特別配当の持分を保険会社に預けていると仮定した場合の利息に相当する．そして保証利率について次の仮定

$$C \leq C^* \tag{7}$$

をおく．

さて，このような企業年金保険における最適な解約行動について考えよう．まず $X(t) \leq F$ では，基金は額面保証のオプションを持っている．いま，このオプションの行使時刻を τ_L とする．企業年金保険の価格がある程度下がったら，解約控除金を支払い額面保証の利益を受ける．次に特別配当について考える．仮に保険会社にデフォルトが無いとすれば，特別配当による利得 $\big(\beta X(t) + (1-\beta)F\big)$ は実現させずにそのまま預けておけば良い．しかし，正のデフォルトロスを考慮に入れると，ある程度一般勘定資産の価格が上昇した時には契約を解約した方が良い．デフォルトによる損失を被る前に特別配当の利益を確定させるのである．このオプションの行使時刻を τ_U とする*7．以上から，デフォルトリスクのある企業年金保険のペイオフは，どちらか一方が行使可能でともに早期可能性のあるアメリカン・プットとアメリカン・コールの組み合わせとしてモデル化できることが分かった．したがって，企業年金保険の時刻0における価格は自由境界問題の解

$$\begin{aligned} W(x) = \max_{\tau_L, \tau_U} E\Bigg[& 1_{\{\tau_L<\tau_U, \tau_L<\tau\}}\Big\{(1-\alpha)F + \alpha X(\tau_L)\Big\}e^{-r\tau_L} \\ & + 1_{\{\tau_U<\tau_L, \tau_U<\tau\}}\Big\{(1-\beta)F + \beta X(\tau_U)\Big\}e^{-r\tau_U} \\ & + 1_{\{\tau<\tau_L, \tau<\tau_U\}}(1-\Delta)\Big\{(1-\gamma)F + \gamma X(\tau)\Big\}e^{-r\tau} \\ & + \int_0^{\tau_L\wedge\tau_U\wedge\tau} Ce^{-ru}du \,\Bigg|\, X(0)=x \Bigg] \end{aligned} \tag{8}$$

として表すことができる．

ここで，企業年金保険はいつでも解約でき特定の満期を持たず無期限であること，また一般勘定資産が確率測度 Q の下で定常な確率過程 (1) に従うこと，さらにはデフォルト時刻 τ が無記憶性を特徴とする指数分布に従うことから*8，最適停止時刻を与える τ_U, τ_L は一定の閾値 U, L を用いて

$$\tau_U = \inf\{t : X(t) = U | X(0) = x\} \tag{9}$$
$$\tau_L = \inf\{t : X(t) = L | X(0) = x\} \tag{10}$$

のように表現できる*9．したがって式 (8) は

$$\begin{aligned} W(x) = \max_{L,U} E\Bigg[& 1_{\{\tau_L<\tau_U, \tau_L<\tau\}}\Big\{(1-\alpha)F + \alpha L\Big\}e^{-r\tau_L} \\ & + 1_{\{\tau_U<\tau_L, \tau_U<\tau\}}\Big\{(1-\beta)F + \beta U\Big\}e^{-r\tau_U} \\ & + 1_{\{\tau<\tau_L, \tau<\tau_U\}}(1-\Delta)\Big\{(1-\gamma)F + \gamma X(\tau)\Big\}e^{-r\tau} \\ & + \int_0^{\tau_U\wedge\tau_L\wedge\tau} Ce^{-ru}du \,\Bigg|\, X(0)=x \Bigg] \end{aligned} \tag{11}$$

に書き換えることができる．以下では最適解約戦略を与える直線 $x = U$ および $x = L$ を最適行使境界と呼ぶ (図1参照)．

---

*7 Johnson and Stulz (1987) はオプション発行者にデフォルトリスクがある場合にはアメリカンコールオプションでも早期行使される可能性があることを示した．

*8 指数分布の無記憶性 (memoryless property) と社債価格の関係については Kijima (2003) を見よ．

*9 このような最適戦略は Merton(1973) における永久アメリカンオプションの保有者および Leland(1994) における永久債の発行者と同様である．

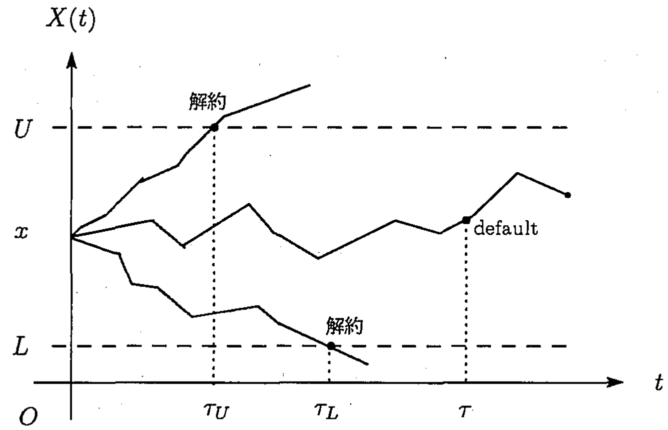


図 1　最適行使境界 U, L とデフォルト

結局，式 (11) を解いて企業年金保険の価格を得る．まずはその上で必要な補題を示す．

補題 1 確率変数 $X(t)$ は式 (1) に従うとし，停止時刻 τ_U, τ_L はそれぞれ式 (9), 式 (10) により与えられるとする．このとき次のラプラス変換

$$f_u(x) = E\left[1_{\{\tau_U<\tau_L\}} \mathrm{e}^{-(r+h)\tau_U} \middle| X(0) = x, L < x < U\right] = \frac{x^{\lambda_1}L^{\lambda_2} - x^{\lambda_2}L^{\lambda_1}}{U^{\lambda_1}L^{\lambda_2} - U^{\lambda_2}L^{\lambda_1}},$$

$$f_\ell(x) = E\left[1_{\{\tau_L<\tau_U\}} \mathrm{e}^{-(r+h)\tau_L} \middle| X(0) = x, L < x < U\right] = -\frac{x^{\lambda_1}U^{\lambda_2} - x^{\lambda_2}U^{\lambda_1}}{U^{\lambda_1}L^{\lambda_2} - U^{\lambda_2}L^{\lambda_1}}$$

が得られる．ただし λ_1, λ_2 は式

$$\frac{1}{2}\sigma^2\lambda^2 + (r - \xi - \frac{1}{2}\sigma^2)\lambda - (r + h) = 0, \quad \lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0 \tag{12}$$

を満たす．

証明: 付録参照

関数 $f_\ell(x)$ に関して式

$$E\left[1_{\{\tau_L<\tau_U, \tau_L<\tau\}} \mathrm{e}^{-r\tau_L}\right] = E\left[1_{\{\tau_L<\tau_U\}} \mathrm{e}^{-(r+h)\tau_L}\right] = f_\ell(x)$$

が成立する[*10]．したがって関数 $f_\ell(x)$ は「一般勘定資産 $X(t)$ が閾値 U に到達するよりも先に閾値 L に到達する最初の時刻に生命保険会社が生存している場合に限って額 1 を支払う」Arrow-Debreau 証券の現在価値を表す．関数 $f_u(x)$ も同様である．補題 1 を用いると，利率保証および特別配当，解約控除付き額面保証を考慮した企業保険年金の価格を次のように表すことができる．

命題 1 一般勘定資産の価格 $X(t)$ は式 (1) に従い $X(0) = x$ とする．また生命保険会社のデフォルト時刻 τ は平均 $1/h$ の指数分布に従うと仮定する．このとき保証利率を C，解約控除率を α，特別配当の配当率を β，額面を F とし，また解約時のペイオフを式 (3)，さらにはデフォルト時のペイオフを式 (5) とする企業年金保険の価格は

$$W(x) = H(x) + f_l(x)\big(W_\ell - H(L)\big) + f_u(x)\big(W_u - H(U)\big) \tag{13}$$

[*10] 付録の式 (30) を参照せよ．

により与えられる．ただし

$$H(x) = \gamma(1-\Delta)x + (1-\gamma)(1-\Delta)\frac{hF}{r+h} + \frac{C}{r+h}, \quad \gamma = \begin{cases} \alpha & x \le F, \\ \beta & x > F, \end{cases} \tag{14}$$

$$W_\ell = (1-\alpha)F + \alpha L, \quad W_u = (1-\beta)F + \beta U, \quad L < x < U \tag{15}$$

とし，L, U は

$$\begin{cases} \dfrac{\left(\lambda_2 L^{\lambda_2-1}U^{\lambda_1} - \lambda_1 L^{\lambda_1-1}U^{\lambda_2}\right) W_\ell + (\lambda_1 - \lambda_2)L^{\lambda_1+\lambda_2-1}W_u}{(U^{\lambda_1}L^{\lambda_2} - U^{\lambda_2}L^{\lambda_1})} & = & \alpha - \beta(1-\Delta) \\ \dfrac{(\lambda_2 - \lambda_1)U^{\lambda_1+\lambda_2-1}W_\ell + \left(\lambda_1 L^{\lambda_2}U^{\lambda_1-1} - \lambda_2 L^{\lambda_1}U^{\lambda_2-1}\right) W_u}{(U^{\lambda_1}L^{\lambda_2} - U^{\lambda_2}L^{\lambda_1})} & = & \beta\Delta \end{cases} \tag{16}$$

を満たす．

証明: 付録参照

ここで，式 (15) はペイオフ値 W_ℓ, W_u に関する value matching condition であり，また式 (16) は，smooth pasting condition

$$\left.\frac{\partial W}{\partial x}\right|_{x=L} = \alpha, \qquad \left.\frac{\partial W}{\partial x}\right|_{x=U} = \beta \tag{17}$$

である．実際に閾値 L, U を得るときは，式 (15) を用いて式 (16) から W_ℓ, W_u を消去した後に得られる L と U に関する非線形 2 元連立方程式を解けば良い．例えばニュートン法等の標準的な数値計算方法により容易に計算できる．

さて，関数 $f_u(x), f_\ell(x)$ はそれぞれ U, L を閾値とする Arrow-Debreau 証券の価格である．したがって価格式 (13) の第 1 項 $H(x)$ は企業年金の本質的な持分を表し，また第 2 項は解約控除付き額面保証の権利行使価値 W_ℓ とその時点における本質的持分 $H(L)$ の消失，さらに第 3 項は特別配当を受け取る権利の行使価値 W_u とその時点における本質的持分 $H(U)$ の消失を表していることが分かる．ここで式 (14) を見ると，本質的持分 $H(x)$ は 3 つの項から構成されている．第 1 項は，$x \ge F$ であれば特別配当の利益，$x < F$ であれば解約控除金を差し引いた額面保証の利益を意味する．また，第 2 項はデフォルトペイオフの価値，さらに，第 3 項はデフォルトリスクのある永久利率保証の価値である．図 2 には，適当なパラメータ設定の下で企業年金保険の価格を初期資産 x に関して描いた．$x = L, U$ において smooth pasting condition(17) が満たされる．

3 成果配当の価格付け

本節では，2 節において示した基本モデルを拡張し，成果配当の仕組みを考慮した企業年金保険の価格モデルを提示する．その後，成果配当の実施と保険会社のデフォルトリスクとの関係について議論する．

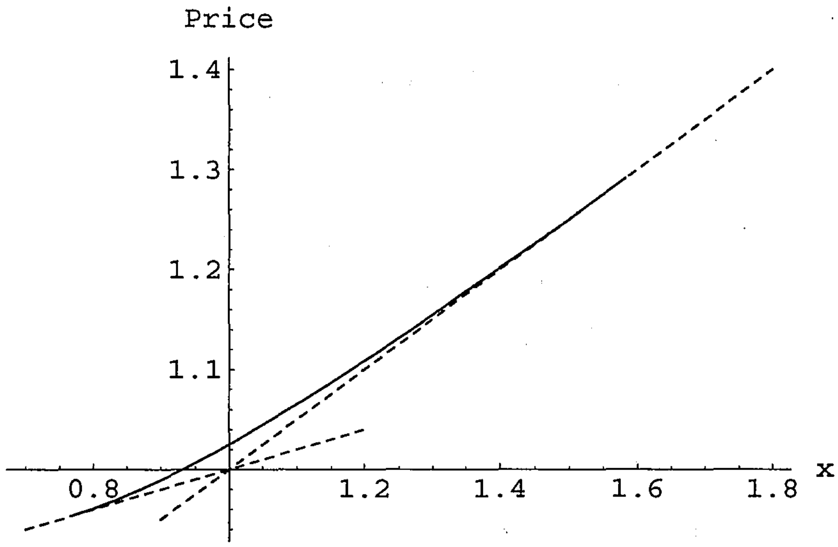
3.1 モデル

まず，成果配当のペイオフをモデル化する．契約者は，一般勘定資産 $X(t)$ が額面 F を上回っているときは，連続的に配当 $\beta\delta X(t)$ を受け取るとする．β は特別配当の配当率である．このとき，一般勘定資産は $\delta X(t)$ だけ権利落ちする．このように考えると一般勘定資産 $X(t)$ はリスク中立測度 Q の下で

$$\frac{dX(t)}{X(t)} = \left(r - \xi - \delta 1_{\{X(t)>F\}}\right) dt + \sigma dB(t), \quad t > 0 \tag{18}$$

に従う．また契約者が受け取る配当の現在価値は，契約の終了時刻を T として

$$E\left[\int_0^T \beta\delta X(u)e^{-ru}1_{\{X(t)>F\}}du\right] \tag{19}$$



点線は直線 $\{\alpha x+(1-\alpha)F\}$ および $\{\beta x+(1-\beta)F\}$ を表す．最適行使境界は $U=1.58267, L=0.765511$. 使用したパラメータは次の通り．$\alpha=0.2, \beta=0.5, h=0.001, F=1.0, r=0.01, \Delta=0.8, C=0.005, \sigma=0.1, \xi=0$.

図 2　企業年金の価格

と表すことができる．

次に最適な解約行動について考えてみると，成果配当の現在価値 (19) には前節で考えた最低利率保証および特別配当と額面保証の仕組みと同様に定常性があることから，成果配当を考慮しても最適解約戦略は式 (9), 式 (10) により定義される解約時刻 τ_U, τ_L を用いて記述できることが分かる．したがって，成果配当の終了時刻はデフォルト時刻 τ および解約時刻を用いて

$$T=\tau_U\wedge\tau_L\wedge\tau$$

とでき，成果配当を考慮した企業年金保険の価格は式 (11) を拡張して

$$\begin{aligned}W_1(x)=\max_{L,U}E\Bigg[&1_{\{\tau_L<\tau_U,\tau_L<\tau\}}\Big\{(1-\alpha)F+\alpha L\Big\}\mathrm{e}^{-r\tau_L}\\&+1_{\{\tau_U<\tau_L,\tau_U<\tau\}}\Big\{(1-\beta)F+\beta U\Big\}\mathrm{e}^{-r\tau_u}\\&+1_{\{\tau<\tau_L,\tau<\tau_U\}}(1-\Delta)\Big\{(1-\gamma)F+\gamma X(\tau)\Big\}\mathrm{e}^{-r\tau}\\&+\int_0^{\tau_U\wedge\tau_L\wedge\tau}C\mathrm{e}^{-ru}du\\&+\int_0^{\tau_U\wedge\tau_L\wedge\tau}\beta\delta X(u)e^{-ru}1_{\{X(t)>F\}}du\Bigg|X(0)=x\Bigg]\end{aligned}\tag{20}$$

と表すことができる．

結局，式 (20) を解くことにより，成果配当を考慮した企業年金保険の価格を得る．まずはその上で必要な 2 つの補題を示す．最初の補題 2 は資産過程 $X(t)$ が配当を伴うことによる補題 1 の修正である．

補題 2 確率変数 $X(t)$ は式 (18) に従うとし，停止時刻 τ_U, τ_L はそれぞれ式 (9), 式 (10) により与えられると

する．このとき次のラプラス変換が得られる．

$$g_u(x) = E\left[1_{\{\tau_U<\tau_L\}}e^{-(r+h)\tau_U}\Big| L<x<U\right]$$
$$= \begin{cases} \dfrac{\phi(\eta,L,F)\chi(\lambda,x,F)-\phi(\lambda,x,F)\chi(\eta,L,F)}{\phi(\eta,L,F)\chi(\lambda,U,F)-\phi(\lambda,U,F)\chi(\eta,L,F)}, & x>F \\ \dfrac{(\lambda_2-\lambda_1)\phi(\eta,x,L)F^{-(\eta_1+\eta_2)}}{\phi(\eta,L,F)\chi(\lambda,U,F)-\phi(\lambda,U,F)\chi(\eta,L,F)}, & x\le F. \end{cases}$$

$$g_\ell(x) = E\left[1_{\{\tau_L<\tau_U\}}e^{-(r+h)\tau_L}\Big| L<x<U\right]$$
$$= \begin{cases} \dfrac{(\eta_2-\eta_1)\phi(\lambda,x,L)F^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{\phi(\eta,L,F)\chi(\lambda,U,F)-\phi(\lambda,U,F)\chi(\eta,L,F)}, & x>F \\ \dfrac{\phi(\eta,x,F)\chi(\lambda,U,F)-\phi(\lambda,U,F)\chi(\eta,x,F)}{\phi(\eta,L,F)\chi(\lambda,U,F)-\phi(\lambda,U,F)\chi(\eta,L,F)}, & x\le F. \end{cases}$$

ただし

$$\phi(\theta,p,q)=p^{\theta_1}q^{\theta_2}-p^{\theta_2}q^{\theta_1},\quad \chi(\theta,p,q)=\theta_2p^{\theta_1}q^{\theta_2}-\theta_1p^{\theta_2}q^{\theta_1},\quad \theta=(\theta_1,\theta_2) \tag{21}$$

とし，λ_1, λ_2 は式

$$\frac{1}{2}\sigma^2\lambda^2+(r-\xi-\delta-\frac{1}{2}\sigma^2)\lambda-(r+h)=0 \tag{22}$$

を満たす．また η_1, η_2 は式

$$\frac{1}{2}\sigma^2\eta^2+(r-\xi-\frac{1}{2}\sigma^2)\eta-(r+h)=0 \tag{23}$$

を満たす．

証明:付録参照

関数 $g_u(x)$ は一般勘定資産 $X(t)$ が成果配当を伴う場合に，閾値 L に到達するよりも先に閾値 U に到達する最初の時刻に生命保険会社が生存している場合に限って額 1 を支払う Arrow-Debreau 証券の現在価値を表す．関数 $g_\ell(x)$ も同様である．また配当がゼロの場合を考えると $\eta_1=\lambda_1, \eta_2=\lambda_2$ となることから式

$$\lim_{\delta\to 0} g_u(x)=\frac{\phi(\lambda,U,x)}{\phi(\lambda,U,L)}=f_u(x),\quad \lim_{\delta\to 0} g_\ell(x)=-\frac{\phi(\lambda,L,x)}{\phi(\lambda,U,L)}=f_\ell(x)$$

が成立する．したがって補題 2 は補題 1 を含む．

次の補題は成果配当の現在価値を計算する上で必要となる．

補題 3 確率変数 $X(t)$ は式 (18) に従うとし，停止時刻 τ_U, τ_L はそれぞれ式 (9), 式 (10) により与えられるとする．このとき次の式が成立する．

$$g(x)=E\left[\int_0^{\tau_U\wedge\tau_L}\delta X(u)e^{-(r+h)u}1_{\{X(t)>F\}}du\Big| L<x<U\right]$$
$$= \begin{cases} \dfrac{\delta}{\delta+h}\left[x-Ug_u(x)+\dfrac{F\phi(\lambda,x,U)\{\phi(\eta,L,F)-\chi(\eta,L,F)\}}{\phi(\eta,L,F)\chi(\lambda,U,F)-\phi(\lambda,U,F)\chi(\eta,L,F)}\right], & x>F \\ \dfrac{\delta}{\delta+h}\left[\dfrac{F\phi(\eta,x,L)\{\phi(\lambda,U,F)-\chi(\lambda,U,F)\}}{\phi(\eta,L,F)\chi(\lambda,U,F)-\phi(\lambda,U,F)\chi(\eta,L,F)}-Ug_u(x)\right], & x\le F \end{cases}$$

ただし，$\phi(\theta,p,q), \chi(\theta,p,q)$ は式 (21) により定義され，λ_1, λ_2 は式 (22) を満たす．また η_1, η_2 は式 (23) を満たす．

証明: 付録参照

関数 $g(x)$ に関して次の式

$$E\left[\int_0^{\tau_U\wedge\tau_L\wedge\tau}\delta X(u)e^{-ru}1_{\{X(t)>F\}}du\middle|L<x<U\right]$$
$$=E\left[\int_0^{\tau_U\wedge\tau_L}\delta X(u)e^{-(r+h)u}1_{\{X(t)>F\}}du\middle|L<x<U\right]=g(x)$$

が成立する*11．よって関数 $g(x)$ は「解約するもしくは生命保険会社がデフォルトするまでの間に一般勘定資産から生じる全成果配当」の現在価値を表す．

次の命題は上の補題 2 および補題 3 を用いて式 (20) を解いた本論文の主要な結果であり，成果配当および利率保証さらには特別配当，解約控除を考慮した企業年金保険の価格を与える．

命題 2 一般勘定資産の価格 $X(t)$ は式 (18) に従い $X(0)=x$ とする．また生命保険会社のデフォルト時刻 τ は平均 $1/h$ の指数分布に従うと仮定する．このとき保証利率を C，解約控除率を α，特別配当の配当率を β，額面を F とし，さらに $X(t)$ が額面を上回っている場合には $\beta\delta X(t)$ の成果配当が連続的に支払われるとする．このとき，解約時のペイオフを式 (3)，デフォルト時のペイオフを式 (5) とする企業年金保険の価格は

$$W_1(x)=H(x)+g_\ell(x)\Big(W_\ell-H(L)\Big)+g_u(x)\Big(W_u-H(U)\Big)+g(x)\Big(\beta-(1-\Delta)\gamma\Big) \tag{24}$$

により与えられる．ただし $H(x)$ は式 (14) により，W_ℓ, W_u は式 (15) により定義される．また L, U は smooth pasting condition

$$\left\{\begin{array}{lcl} H'(U)+g_\ell'(U)(W_\ell-H(L))+g_u'(U)(W_u-H(U))+g'(U)(\beta-(1-\Delta)\gamma) &=& \beta, \\ H'(L)+g_\ell'(L)(W_\ell-H(L))+g_u'(L)(W_u-H(U))+g'(L)(\beta-(1-\Delta)\gamma) &=& \alpha \end{array}\right. \tag{25}$$

を満たす．

証明: 付録参照

式 (25) は，式 (15) により定義される W_ℓ, W_u を代入すると，L, U に関する非線形 2 元連立方程式になる．企業年金保険の価格は，数値的に解いた U, L を式 (24) に代入することで得られる．ここで，関数 $g_\ell'(x), g_u'(x), g'(x)$ については補題 4（付録）に示した．

さて，価格式 $W_1(x)$ を式 (13) と比較すると，第 4 項が新たに加わっていることが分かる．この項は，成果配当を行ったことから生じるデフォルト時のペイオフ減少分 $\{-(1-\Delta)\gamma g(x)\}$ と成果配当の現在価値 $\beta g(x)$ から構成される．

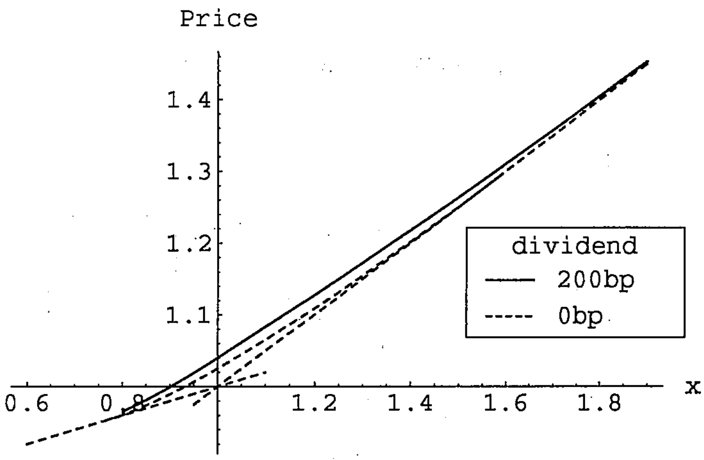
図 3 に成果配当を実施しない場合 ($\delta=0$bp) と成果配当を実施した場合 ($\delta=200$bp) の 2 通りの価格曲線を描いた．成果配当を実施することにより価格は上昇する．また，成果配当の実施は上側の最適行使境界 L を上昇させ，下側の最適行使境界 U を下降させる．すなわち成果配当の実施は解約を抑制する．この結果は成果配当の実施には生命保険会社がデフォルトする前に一般勘定資産を配分する効果があり，成果配当の実施は価格に対してデフォルトリスク軽減と同じ効果があると考えることと整合的である．次節では，この結果を格付け別に調べる．

3.2 成果配当の実施とデフォルトリスク

命題 2 から成果配当の実施は企業年金保険の価格を上昇させることが分かった．これを表 1 に示した格付け別デフォルト率を参考にして見てみよう．まず，無配当から 200bp の成果配当を実施した場合の価格変化を h

*11 付録の式 (43) を参照せよ．

図 3　成果配当を考慮した企業年金保険の価格 $W_1(x)$



点線（直線）は $\{\alpha x+(1-\alpha)F\}$ および $\{\beta x+(1-\beta)F\}$ を表す．使用したパラメータは図 2 と同じ．最適行使境界は $\delta=0$ bp のとき $U=1.59043$，$L=0.765493$，また $\delta=200$ bp のときは $U=2.24568$，$L=0.711645$．

に対して図に描いた．成果配当の影響はデフォルト率 h が小さく格付けの高い生命保険会社ほど有効であることが分かる．これは，配当の実施とデフォルト率減少の価格に及ぼす効果が単位辺りで同程度であることが原因と考えられる[*12]．実際，図 4 を見て分かる通り，価格の h に対する感応度は h が小さいほど指数的に上昇する．結局，成果配当の実施には h の減少と同レベルの影響があり，高格付けの生命保険会社で効果が高い．さらに，図 5 に示したように，最適行使境界に対する効果も高格付けの生命保険会社で効果が高い．逆に低格付けの生命保険会社では，解約抑制を狙った成果配当の実施は効果を上げにくい．成果配当を実施しても，最適行使境界があまり変化しないためである．

	AA	A	BBB
h	0.00317	0.00492	0.0112

表 1　格付け別デフォルト率 h

（注）残存 15 年の国債 YTM（Yield to Maturity）を r，また社債 YTM を R として，式 $R=r+h\Delta$ からデフォルト率 h を推定した．ここで国債 YTM は日本証券業協会が Web サイトで公表している公社債店頭売買参考統計値（2004 年 9 月末）から，また社債 YTM は同じく日本証券業協会発表の格付マトリクス表（格付けは Standard and Poor's 社）を使用．また，損失率は，無担保社債の過去 10 年の統計値として $\Delta=0.632$ を仮定した（「回収率データベースと銀行における経営的価値」Standard and Poor's, 2003，参照）．表以外の格付けについては十分なデータが存在しなかったため除外している．

4　額面価格による加入とデフォルトリスク

企業年金保険に加入する際には額面価格が支払われるのが一般的である．本節では，企業年金保険の価格が額面価格と事前に決められた初期手数料の和になるような保証利率を求めることにより，企業年金保険が額面価格で契約される場合のデフォルトリスクの影響について分析する．

いま，式 (24) で与えられる企業年金保険の価格 $W_1(x)$ を，一般勘定資産 x と保証利率 c の関数として

[*12] δ の上昇は資産過程のドリフトを下げる効果があり価格に対して指数関数的に作用する．h の減少は割引率の指数として価格に作用する．

図 4　企業年金保険の価格 W_1 に対する成果配当の影響

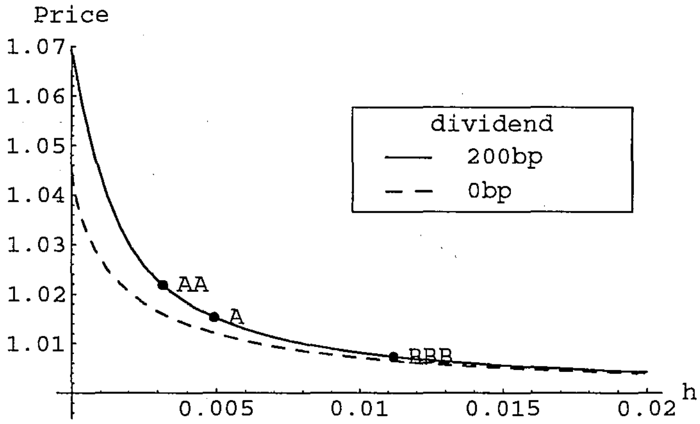


図 5　上側最適行使境界 U と下側最適行使 L に対する成果配当の影響

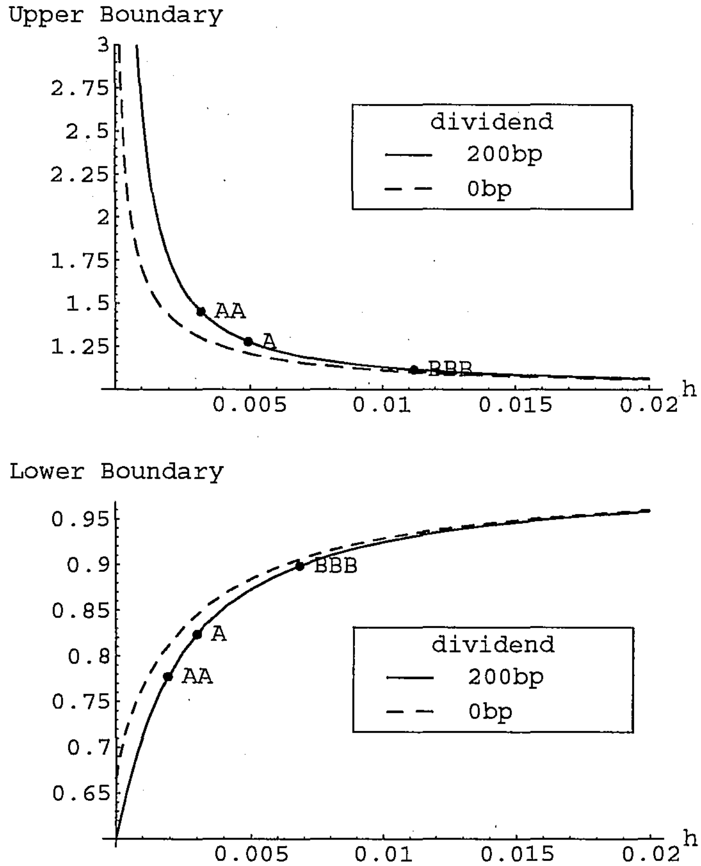


図 4，図 5 ともに使用したパラメータは $\Delta = 0.632$ を除き図 2 と共通.

$W_1(x,c)$ と書くことにする．すると前もって定められた初期費用を p_0 として，次の式

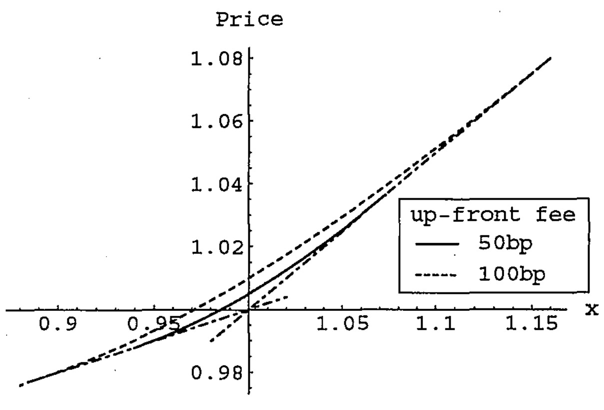
$$F + p_0 = W_1(x,c) \tag{26}$$

が成立する．この式 (26) を $x=F$ として c について解いた答えを c^* とし，オプション料調整後保証利率と呼ぶことにする．c^* は本来の保証利率から，初期費用だけでは不足したオプション料を差し引いた値として決定される[*13]．以下では，h を変化させた場合の c^* と最適行使境界 U, L への影響を調べる．

まずは，初期費用 p_0 を 50bp とした場合と 100bp とした場合について企業年金保険の価格 $W_1(x,c^*)$ を描いたのが図 6 である．また，このときの c^* をデフォルト率 h に対して描いたのが図 7 である．まず，図 6 を見ると，初期費用 p_0 が多いほど最適行使境界が上下に広くなることが分かる．すなわち，初期費用が大きいほど解約を抑制することができる．また，y 切片は初期払い込み額 $(F+p_0)$ を表すので，$p_0=0$ の場合は $U=L=F$ となり契約締結とともに解約が発生し契約が成立しないことが分かる．次に図 7 を見るとオプション料調整後保証利率はデフォルト率に比例することが分かる．また，十分な初期費用を支払わない場合，事後的なオプション料が大きくなりオプション料調整後保証利率は負になりえる．また，表 2 からは，BBB 格以下の保険会社が企業年金保険を取り扱うためには，大きなクレジットコストが必要となることが分かる．

次に初期費用を変化させて最適行使境界 U, L を描いたのが図 8 である．前節ではデフォルト率に対して指数的に変化していた上下どちらの最適行使境界もデフォルト率に対して直線的に変化し水平に近い．すなわち，解約戦略は格付けの影響を受けにくく，図 7 から得られた結果と合わせて考えると，企業年金保険に対するデフォルトリスクの影響はオプション料調整後保証利率に集約されることが分かる．結局，基金の側から見ると，委託先のデフォルトリスクが上昇した場合には，解約戦略を変更するのでは無く，オプション料調整後保証利率の上乗せを要求する動機を持つ．ただし，図 8 における上側の最適行使境界では，$\delta=400$bp のときに幾分か指数性が残っている点に注意が必要である．すなわち十分な初期費用を支払う場合にはとくに上側最適境界が格付けから受ける影響は前節と同様に指数関数的となる．この場合には，デフォルトリスクの上昇に対しては契約の早期解約が最適となる場合が多い．また，初期費用が大きい場合には，デフォルト率が上昇すると下側の境界がかえって下がることが観察される．これは，デフォルトロスを避けるよりも大きな保証利率を受け続けることの方が優先されたためだと考えられる．

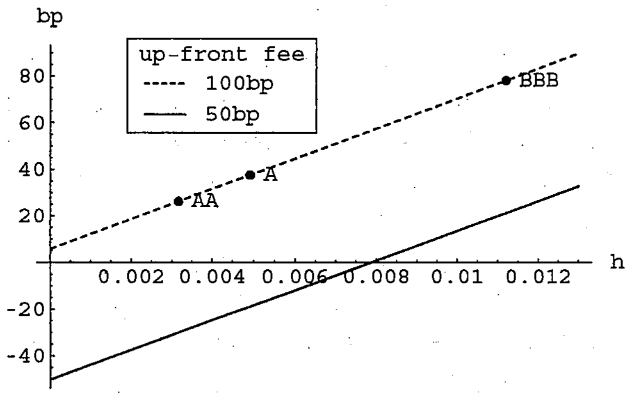
図 6　企業年金保険の価格 $W_1(x,c^*)$



(注) 使用したパラメータは $C=c^*$ を除き図 2 と共通.

[*13] 事後的なオプション料は連続的に支払われており，また契約は何時でも解約できる．よって本節でモデル化した額面価格で加入する企業年金保険は超短期契約の無期限ロールオーバーと考えることができる．現実の手数料の支払いは 1 か月や 6 か月単位であるから，本モデルでは年金基金のデフォルトエクスポージャーは実際の例えば 1 ヶ月から超短期へと短縮化される．ただし，クレジットスプレッドに期間構造を導入していないこともあり，ロールオーバー期間を超短期化することの影響は小さいと考えて良いであろう．

図 7　オプション料調整後保証利率 c^*



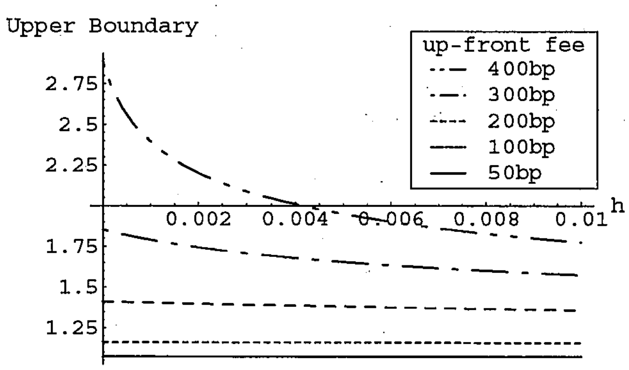
（注）パラメータは図 4 と共通.

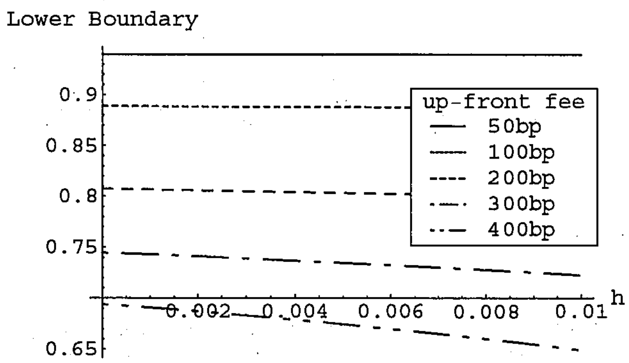
格付	AA	A	BBB	
オプション料調整後保証利率 c	26.3	37.6	78.1	(bp)

（注）パラメータは図 4 と共通．ただし初期費用 (up-front fee) は $p_0 = 100$bp.

表 2　限界保証利率とネット受け取り利息

図 8　最適行使境界 U, L





（注）パラメータは図 4 と共通.

5 結論

生命保険会社が取り扱っている企業年金には利率保証および額面保証さらには特別配当と成果配当といったペイオフの仕組みがある．本論文では，これらのペイオフの仕組みをどちらか一方が行使可能な永久アメリカン・プットオプションと永久アメリカン・コールオプションの組み合わせとして定式化し，企業年金保険の価格を解析的に導出した．その際，保険会社にデフォルトの可能性がありデフォルト時にはペイオフが減額されることを考慮に入れた．外生的なデフォルトモデルを採用したことで，一般勘定資産の価値が上昇しているときの最適解約戦略についてモデル化できた．また数値例から，オプション料を契約当初に全額支払う場合「成果配当の実施は価格を上昇させ解約を抑制する，しかしその効果は高格付けの受託会社で効果が大きく，逆に格付けの低い受託会社では現実的な効果が得られない」ことが分かった．

本論文は，企業年金保険は額面価格により契約されることについても分析した．一般的なオプション契約ではプレミアムを全額前払いとするが，保険契約では，プレミアムの一部を契約が解除されるまでの間だけ支払うという特徴がある．この特徴を考慮に入れ，初期払い込み額を額面価格と固定的な初期費用にすると，初期費用が十分に多いときは，先に述べた結論は変わらないと予想される一方で，「初期費用が小さくなるとデフォルトリスクの影響は基金のネット受け取り利息に集約されていく」ことが分かった．たとえば格付けの高い会社ほどデフォルト率のわずかな下落により解約を大幅に抑制できたが，その効果が無くなっていくのである．また，「BBB 格以下の保険会社が企業年金保険を扱うときには相対的に大きなクレジットコストを必要とする」ことが分かった．

本論文には 4 つの課題がある．第一の課題は新規拠出金と保険金の支払いをほとんど想定していない点である．これは，分析の容易さのため解析解を第一に考えたためである．ただし，ある程度成熟した年金基金の場合は，資金の流出と流入が均衡するので本論文で示したモデルは有効である．第二の課題は，成果配当の実施後に一般勘定資産の権利落ちを仮定している点である．多くの場合，成果配当や最低利率保証のキャッシュフローは額面に加算される．第三の課題はデフォルト事象と一般勘定資産の価格変動を独立と仮定した点である．一般勘定資産の価格が上昇している場合にはデフォルトリスクは減るはずである．これはデフォルト率を確率過程とすることで解決できる可能性がある．第四の課題は，金利の不確実性を考慮していない点である．年金基金は一般勘定資産のキャピタルゲインよりも，予定利率と市場金利との差を観察して運用を委託している可能性が高い．また，保険会社の経営は，市場金利が下がっていく過程で不安定になりやすい．これは，弾力的に変更することができない予定利率と市場金利との格差から生じる．すなわち，市場金利を原資産とする一般勘定資産モデルと市場金利をファクターとする保険会社のデフォルトモデルとによる企業年金保険の評価こそがより現実的である．今後取り組んでいきたい．

付録

補題 4 補題 2 により定義される関数 $g_u(x)$ と $g_\ell(x)$ および補題 3 により定義される関数 $g(x)$ の導関数は次のように与えられる．

$$g'_u(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}\dfrac{\lambda_1\lambda_2\phi(\eta,L,F)\phi(\lambda,x,F)-\chi(\lambda,x,F)\chi(\eta,L,F)}{\phi(\eta,L,F)\chi(\lambda,U,F)-\phi(\lambda,U,F)\chi(\eta,L,F)}, & x > F \\[2ex] \dfrac{(\lambda_2-\lambda_1)\chi(\eta,x,L)F^{-(\eta_1+\eta_2)}}{\phi(\eta,L,F)\chi(\lambda,U,F)-\phi(\lambda,U,F)\chi(\eta,L,F)}, & x \le F, \end{cases}$$

$$g_\ell'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}\dfrac{(\eta_2-\eta_1)\chi(\lambda,x,L)F^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{\phi(\eta,L,F)\chi(\lambda,U,F)-\phi(\lambda,U,F)\chi(\eta,L,F)}, & x > F \\ \dfrac{1}{x}\dfrac{\chi(\eta,x,F)\chi(\lambda,U,F)-\eta_1\eta_2\phi(\eta,x,F)\phi(\lambda,U,F)}{\phi(\eta,L,F)\chi(\lambda,U,F)-\phi(\lambda,U,F)\chi(\eta,L,F)}, & x \le F \end{cases}$$

$$g'(x) = \begin{cases} \dfrac{\delta}{\delta+h}\left[1 - Ug_u'(x) + \dfrac{1}{x}\dfrac{F\chi(\lambda,x,U)\{\phi(\eta,L,F)-\chi(\eta,L,F)\}}{\phi(\eta,L,F)\chi(\lambda,U,F)-\phi(\lambda,U,F)\chi(\eta,L,F)}\right], & x > F \\ \dfrac{\delta}{\delta+h}\left[\dfrac{1}{x}\dfrac{F\chi(\eta,x,L)\{\phi(\lambda,U,F)-\chi(\lambda,U,F)\}}{\phi(\eta,L,F)\chi(\lambda,U,F)-\phi(\lambda,U,F)\chi(\eta,L,F)} - Ug_u'(x)\right], & x \le F \end{cases}$$

証明 式 (21) により定義される $\phi(\theta,p,q),\chi(\theta,p,q)$ について式

$$\frac{\partial\phi(\theta,p,q)}{\partial p} = \frac{\chi(\theta,p,q)}{p}, \quad \frac{\partial\chi(\theta,p,q)}{\partial p} = \frac{\theta_1\theta_2\phi(\theta,p,q)}{p}$$

が成立することを用いると容易に導出できる.

証明 (補題 1) $X(t)$ が式 (1) に従うとき, 任意の実数 λ に対して新たな確率変数

$$V(t) = V(0)\left(\frac{X(t)}{x}\right)^\lambda \exp\left\{\left(-\frac{1}{2}\sigma^2\lambda^2 - (r-\frac{1}{2}\sigma^2)\right)t\right\} \tag{27}$$

はマルチンゲールである. これは $V(t)$ が確率微分方程式

$$\frac{dV(t)}{V(t)} = \lambda\sigma dB(t)$$

に従うことから確認できる. ここで τ_L,τ_U は停止時刻であるから, $\tau_S=\tau_L\wedge\tau_U$ もまた停止時刻である. また, $L\le X(t)\le U$ であるから, $V(t)$ は確率 1 で有界である. したがって, 任意抽出定理が使えて

$$E[V(\tau_S)] = V(0)$$

が成立する. いま, λ は任意なので式 (12) を満たすように設定すると式 (27) から式

$$E\left[\left(\frac{X(\tau_S)}{x}\right)^\lambda \mathrm{e}^{-(r+h)\tau_S}\right] = 1$$

を得る. よって $\tau_S=\tau_L\wedge\tau_U$ から

$$E\left[1_{\{\tau_U<\tau_L\}}\left(\frac{U}{x}\right)^\lambda \mathrm{e}^{-(r+h)\tau_U} + 1_{\{\tau_L<\tau_U\}}\left(\frac{L}{x}\right)^\lambda \mathrm{e}^{-(r+h)\tau_L}\right] = 1$$

が成立する. 上式に式 (12) の解となる $\lambda=\lambda_1,\lambda_2$ を与え, さらに

$$f_u(x) = E\left[1_{\{\tau_U<\tau_L\}}\mathrm{e}^{-(r+h)\tau_U}\right], \quad f_\ell(x) = E\left[1_{\{\tau_L<\tau_U\}}\mathrm{e}^{-(r+h)\tau_L}\right]$$

とすると $f_u(x), f_\ell(x)$ に関する連立方程式

$$\begin{cases} U^{\lambda_1}f_u(x) + L^{\lambda_1}f_u(x) &= x^{\lambda_1} \\ U^{\lambda_2}f_u(x) + L^{\lambda_2}f_u(x) &= x^{\lambda_2} \end{cases}$$

が導かれ, これを解き補題 1 を得る. $X(t)=B(t), L=0$ の結果に関しては Karatzas and Shreve(1988) の 8.11 Exercise を参照せよ.

次の定理は命題 1 および命題 2 の証明において使用する.

定理 1 (**Dynkin** の公式) $X(t)$ は確率微分方程式

$$\frac{dX(t)}{X(t)} = \mu(X(t),t)dt + \sigma(X(t),t)dB(t), \quad X(0)=0, t \geq 0$$

に従うとする．このとき

$$E\left[X(t)\mathrm{e}^{-(r+h)t}\right] - X(0) = E\left[\int_0^t \{\mu(X(t),t) - (r+h)\}X(u)\mathrm{e}^{-(r+h)u}du\right] \tag{28}$$

が成立する．この結果は t が有界な停止時刻の場合においても成立する．

証明 伊藤の補題から，関数 $f(X(t),t) = X(t)\exp[-(r+h)t]$ に関して

$$df(X(t),t) = \{\mu(X(t),t) - (r+h)\}\, X(t)\mathrm{e}^{-(r+h)t}dt + \sigma(X(t),t)X(t)\mathrm{e}^{-(r+h)t}dB(t)$$

が成立する．ここで，両辺の積分の期待値を考えると右辺第 2 項はマルチンゲールであるから式 (28) を得る．

証明 (命題 1) U, L を所与とした場合に，式 (11) を式 (13) のように書き換えることができればよい．まずは，そのために必要となる 5 つの項

$$E\left[1_{\{\tau_L<\tau_U,\tau_L<\tau\}}\mathrm{e}^{-r\tau_L}\right], E\left[1_{\{\tau_U<\tau_L,\tau_U<\tau\}}\mathrm{e}^{-r\tau_U}\right], E\left[1_{\{\tau<\tau_L,\tau<\tau_U\}}\mathrm{e}^{-r\tau}\right],$$
$$E\left[1_{\{\tau<\tau_L,\tau<\tau_U\}}X(\tau)\mathrm{e}^{-r\tau}\right], E\left[\int_0^{\tau_L\wedge\tau_U\wedge\tau}\mathrm{e}^{-ru}du\right]$$

をそれぞれ準備する．$F_Y(y)$ を確率変数 Y の分布関数とすると，任意の確率変数 X, Y について公式

$$E[X] = E[E[X|Y]] = \int_{-\infty}^{\infty} E[X|Y=y]dF_Y(y) \tag{29}$$

が成立する．この公式 (29) と確率変数 τ が指数分布に従うことから，

$$\begin{aligned} &E\left[1_{\{\tau_L<\tau_U,\tau_L<\tau\}}\mathrm{e}^{-r\tau_L}\right] \\ &= E\left[E\left[1_{\{\tau_L<\tau_U,\tau_L<\tau\}}\mathrm{e}^{-r\tau_L}|\tau_L,\tau_U\right]\right] = E\left[1_{\{\tau_L<\tau_U\}}\mathrm{e}^{-(r+h)\tau_L}\right] = f_\ell(x) \end{aligned} \tag{30}$$

および

$$E\left[1_{\{\tau_U<\tau_L,\tau_U<\tau\}}\mathrm{e}^{-r\tau_U}\right] = E\left[1_{\{\tau_U<\tau_L\}}\mathrm{e}^{-(r+h)\tau_U}\right] = f_u(x) \tag{31}$$

を得る．また同様に

$$\begin{aligned} &E\left[1_{\{\tau<\tau_L,\tau<\tau_U\}}\mathrm{e}^{-r\tau}\right] \\ &= E\left[E\left[1_{\{\tau<\tau_L,\tau<\tau_U\}}\mathrm{e}^{-r\tau}|\tau_L,\tau_U\right]\right] = E\left[\int_0^{\tau_U\wedge\tau_L} h\mathrm{e}^{-(r+h)t}dt\right] \\ &= \frac{h}{r+h}\left(1 - E\left[\mathrm{e}^{-(r+h)(\tau_U\wedge\tau_L)}\right]\right) \\ &= \frac{h}{r+h}\left(1 - E\left[1_{\{\tau_L<\tau_U\}}\mathrm{e}^{-(r+h)\tau_L}\right] - E\left[1_{\{\tau_U<\tau_L\}}\mathrm{e}^{-(r+h)\tau_U}\right]\right) \\ &= \frac{h}{r+h}\left(1 - f_\ell(x) - f_u(x)\right), \end{aligned} \tag{32}$$

さらには，

$$\begin{aligned} &E\left[1_{\{\tau<\tau_L,\tau<\tau_U\}}X(\tau)\mathrm{e}^{-r\tau}\right] \\ &= E\left[E\left[1_{\{\tau<\tau_L,\tau<\tau_U\}}X(\tau)\mathrm{e}^{-r\tau}|\tau_L,\tau_U\right]\right] = E\left[\int_0^{\tau_U\wedge\tau_L} hX(\tau)\mathrm{e}^{-(r+h)t}dt\right] \\ &= x - E\left[X(\tau_L\wedge\tau_U)\mathrm{e}^{-(r+h)(\tau_U\wedge\tau_L)}\right] \\ &= x - E\left[X(\tau_L)1_{\{\tau_L<\tau_U\}}\mathrm{e}^{-(r+h)\tau_L}\right] - E\left[X(\tau_U)1_{\{\tau_U<\tau_L\}}\mathrm{e}^{-(r+h)\tau_U}\right] \\ &= x - Uf_u(x) - Lf_\ell(x) \end{aligned} \tag{33}$$

を導出できる．式 (33) の導出では，その第 2 式において定理 1 を用いた．さいごに，$\tau_S = \tau_U \wedge \tau_L$ とすると

$$\begin{aligned}
&E\left[\int_0^{\tau_L\wedge\tau_U\wedge\tau} \mathrm{e}^{-ru}du\right] = E\left[\int_0^{\tau\wedge\tau_S} \mathrm{e}^{-ru}du\right] \\
&= E\left[1_{\tau<\tau_S}\left(\int_0^{\tau} \mathrm{e}^{-ru}du\right)\right] + E\left[1_{\tau_S<\tau}\left(\int_0^{\tau_S} \mathrm{e}^{-ru}du\right)\right] \\
&= E\left[E\left[\frac{1}{r}\left(1-\mathrm{e}^{-r\tau}\right)1_{\tau<\tau_S} + \frac{1}{r}\left(1-\mathrm{e}^{-r\tau_S}\right)1_{\tau>\tau_S}\middle|\tau_S\right]\right] \\
&= E\left[\int_0^{\tau_S}\left(1-\mathrm{e}^{-r\tau}\right)h\mathrm{e}^{-h\tau}d\tau + \frac{1}{r}\left(1-\mathrm{e}^{-r\tau_S}\right)\mathrm{e}^{-h\tau_S}\right] \\
&= \frac{1}{r+h}E\left[1-\mathrm{e}^{-(r+h)\tau_S}\right] \\
&= \frac{1}{r+h}\left(1-f_\ell(x)-f_u(x)\right)
\end{aligned} \tag{34}$$

を得る．結局，U, L を所与とした場合，式 (11) の右辺は，ここまでに得た式 (30), (31), (32), (33), (34) を用いて式

$$E\left[H(x) + f_l(x)\big(W_\ell - H(L)\big) + f_u(x)\big(W_u - H(U)\big)\right]$$

のように書き換えることができ，命題 1 は証明された．ただし，$H(x)$ は式 (14) により，また W_ℓ, W_u は式 (15) により与えられる．（証明終）

証明 **(補題 2)** $W(x) = E[1_{\tau_L<\tau_U}\mathrm{e}^{-(r+h)\tau_L)}]$ とおくと，Feynman-Kac の公式から $W(x)$ は常微分方程式

$$\frac{1}{2}\sigma^2x^2W'' + (r-\xi-\delta 1_{\{x>F\}})xW' - (r+h)W = 0, \quad L<F<U, \quad L<x<U$$

を満たす．ここで $W(x)$ の一般解は

$$W(x) = \begin{cases} A_1x^{\lambda_1} + A_2x^{\lambda_2}, & x>F \\ B_1x^{\eta_1} + B_2x^{\eta_2}, & x\le F \end{cases}$$

により与えられる．ただし，λ_1, λ_2 は式 (22) を η_1, η_2 は式 (23) を満たす．よって境界条件

$$W(L)=1, \quad ,W(U)=0, \quad W(F+)=W(F-), \quad W'(F+)=W'(F-)$$

から $W(x) = g_u(x)$ を得る．さらに $g_\ell(x)$ についても同様に計算し補題を得る．（証明終）

証明 **(補題 3)** 初到達時刻 $\tau_S = \tau_L \wedge \tau_U$ とおいて

$$W(x) = E\left[\int_0^{\tau_S} \mathrm{e}^{-(r+h)\tau_S}\delta X(u)1_{\{X(u)>F\}}du\right]$$

とすると，$W(x)$ は Feynman-Kac の公式から常微分方程式

$$\frac{1}{2}\sigma^2x^2W'' + \left(r-\xi-\delta 1_{\{x>F\}}\right)xW' - (r+h)W + \delta 1_{\{x>F\}}x = 0, \quad L<F<U, \quad L<x<U$$

を満たす．ここで $W(x)$ の一般解は

$$W(x) = \begin{cases} A_1x^{\lambda_1} + A_2x^{\lambda_2} + \dfrac{\delta}{\delta+h}x, & x>F \\ B_1x^{\eta_1} + B_2x^{\eta_2}, & x\le F \end{cases}$$

により与えられる．ただし，λ_1, λ_2 は式 (22) を η_1, η_2 は式 (23) を満たす．よって境界条件

$$W(L)=0, \quad W(U)=0, \quad W(F+)=W(F-), \quad W'(F+)=W'(F-)$$

から $W(x) = g(x)$ を得る．（証明終）

証明 (命題 2) 命題 1 の証明と同じく，U, L を所与とした場合に，式 (20) を式 (24) のように書き換えることができればよい．まずは，そのために必要となる 6 つの項

$$E\left[1_{\{\tau_L<\tau_U,\tau_L<\tau\}}\mathrm{e}^{-r\tau_L}\right],\quad E\left[1_{\{\tau_U<\tau_L,\tau_U<\tau\}}\mathrm{e}^{-r\tau_U}\right], \tag{35}$$

$$E\left[1_{\{\tau<\tau_L,\tau<\tau_U\}}\mathrm{e}^{-r\tau}\right],\quad E\left[\int_0^{\tau_L\wedge\tau_U\wedge\tau}\mathrm{e}^{-ru}du\right], \tag{36}$$

$$E\left[1_{\{\tau<\tau_L,\tau<\tau_U\}}X(\tau)\mathrm{e}^{-r\tau}\right],\quad E\left[\int_0^{\tau\wedge\tau_U\wedge\tau_L}\delta\mathrm{e}^{-ru}X(t)1_{\{X(u)>F\}}dt\right] \tag{37}$$

をそれぞれ準備する．これらのうち，式 (35), (36) の 4 項については，命題 1 と同様に条件付確率の公式 (29) および τ が指数分布に従うことを用いて計算できる．結果は，式 (30) および式 (31), (32), (34) における $f_\ell(x)$ を $g_\ell(x)$ に，$f_u(x)$ を $g_u(x)$ に置き換えた式に一致し，次のようになる．

$$E\left[1_{\{\tau_L<\tau_U,\tau_L<\tau\}}\mathrm{e}^{-r\tau_L}\right]=g_\ell(x), \tag{38}$$

$$E\left[1_{\{\tau_U<\tau_L,\tau_U<\tau\}}\mathrm{e}^{-r\tau_U}\right]=g_u(x), \tag{39}$$

$$E\left[1_{\{\tau<\tau_L,\tau<\tau_U\}}\mathrm{e}^{-r\tau}\right]=\frac{h}{r+h}\left(1-g_\ell(x)-g_u(x)\right), \tag{40}$$

$$E\left[\int_0^{\tau_L\wedge\tau_U\wedge\tau}\mathrm{e}^{-ru}du\right]=\frac{1}{r+h}\left(1-g_\ell(x)-g_u(x)\right). \tag{41}$$

また，式 (37) の第 1 項については以下のように計算すればよい．

$$\begin{aligned}
&E\left[1_{\{\tau<\tau_L,\tau<\tau_U\}}X(\tau)\mathrm{e}^{-r\tau}\right]\\
&=E\left[E\left[1_{\{\tau<\tau_L,\tau<\tau_U\}}X(\tau)\mathrm{e}^{-r\tau}|\tau_L,\tau_U\right]\right]=E\left[\int_0^{\tau_U\wedge\tau_L}hX(\tau)\mathrm{e}^{-(r+h)t}dt\right]\\
&=x-E\left[X(\tau_L\wedge\tau_U)\mathrm{e}^{-(r+h)(\tau_U\wedge\tau_L)}\right]-E\left[\int_0^{\tau_U\wedge\tau_L}\delta\mathrm{e}^{-(r+h)u}X(t)1_{\{X(u)>F\}}dt\right]\\
&=x-Ug_\ell(x)-Lg_u(x)-g(x).
\end{aligned} \tag{42}$$

ただし第 2 式において定理 1 を用いた．さらに，式 (37) の第 2 項については，$\tau_S=\tau_U\wedge\tau_L$ として次のように計算できる．

$$\begin{aligned}
&E\left[\int_0^{\tau_S\wedge\tau}\delta X(u)e^{-ru}1_{\{X(t)>F\}}du\right]\\
&=E\left[1_{\{\tau<\tau_S\}}\int_0^{\tau}\delta X(u)e^{-ru}1_{\{X(t)>F\}}du+1_{\{\tau_S<\tau\}}\int_0^{\tau_S}\delta X(u)e^{-ru}1_{\{X(t)>F\}}du\right]\\
&=E\left[\int_0^{\tau_S}he^{-h\tau}\left(\int_0^{\tau}\delta e^{-ru}X(u)1_{\{X(u)>F\}}du\right)d\tau+\mathrm{e}^{-h\tau_S}\int_0^{\tau_S}\delta X(u)e^{-ru}1_{\{X(u)>F\}}\right]\\
&=E\left[\int_0^{\tau_S}\delta\mathrm{e}^{-(r+h)u}X(u)1_{\{X(u)>F\}}du\right]\\
&=g(x).
\end{aligned} \tag{43}$$

ただし，第 3 式では積分順序の変更を行った．以上の式 (38) から式 (43) を用いて式 (20) を整理すると，式 (24) を得る．よって題意は証明された．(証明終)

謝辞

本論文を執筆するにあたってニッセイ基礎研究所の田中周二氏と湯前祥二氏，および京都大学の木島正明氏と岩城秀樹氏，明治大学の乾孝治氏，電気通信大学の宮崎浩一氏，慶応大学の森平爽一郎氏，明治生命保険の

松山直樹氏，第一生命保険の小守林克哉氏，インテグレイティド・ファイナンス証券の森本祐司氏，北海道大学の木村俊一氏から有用な意見を頂いた．また匿名の二人のレフリーからは有益かつ建設的な意見を頂き本論文の完成度を高めることができた．ここに感謝の意を記したい．

参考文献

[1] 刈屋武昭 (1999), 『信用リスク分析の基礎』, 東洋経済新報社.

[2] 鈴木輝好 (2004), 「保険会社のデフォルトと企業年金保険の価格」, 経済学研究 (北海道大学), **53**, pp.29-39.

[3] 湯前祥二 (1996), 「準乱数による最低利率保証及び成果配当付き貯蓄商品の価格評価」Jafee 1996 冬季大会予稿集.

[4] 湯前祥二 (2004), 「配当・利率保証・解約のある年金保険商品における最適戦略」, 博士学位論文（京都大学）.

[5] Bacinello, A. R. (2000), "Valuation of contingent-claim characterising particular pension schemes," *Insurance: Mathematics and Economics*, **27**, pp.177-188.

[6] Brennan M. J. and E. S. Schwartz (1976), "The pricing of equity-linked life insurance policies with an asset value guarantee," *Journal of Financial Economics*, **3**, pp.195–213.

[7] Boyle, P.P. and M. R. Hardy (1997), "Reserving for maturity guarantees: Two approaches," *Insurance: Mathematics and Economics*, **21**, pp133-127.

[8] Grosen, A and P. L. Jorgensen (2000), "Fair valuation of life insurance liabilities: The impact of interest rate guarantees, surrender options, and bounus policies," *Insurance: Mathematics and Economics*, **26**, pp.37-57.

[9] Hull, J. and A. White (1995), "The impact of default risk on the prices of options and other derivative securities," *Journal of Banking and Finance*, **19**, pp.299-322.

[10] Iwaki, H. and S. Yumae (2004) "An efficient frontier for participating policies in a continuous-time economy," *Insurance: Mathematics and Economics*, **35**, pp.611-625.

[11] Jarrow, R. A. and S. M. Turnbull (1995), "Pricing derivative on financial securities subject to credit risk," *Journal of Finance*, **50**, pp.53–86.

[12] Johnson, H. and R. Stulz (1987), "The pricing of options with default risk," *Journal of Finance*, **42**, pp.267–290.

[13] Karatzas, I. and S. E. Shreve (1991), *Brownian motion and stochastic calculus*, Springer.

[14] Kijima, M. (2002), "Monotonicity and convexity of option prices revisited," *Mathematical Finance*, **12**, pp.411–425.

[15] Kijima, M. (2003), *Stochastic Processes with Application to Finance,* Chapman and Hall/CRC.

[16] Leland, H. (1994), "Corporate debt value, bond covenants, and optimal capital structure," *Journal of Finance*, **49**, pp.1213–1252.

[17] McDonald, R., and D. Siegel. (1984), "Option pricing when the underliying asset earns a below-equlibrium rate of return: A note," *Journal of Finance*, **29**, pp.261–265.

[18] Merton, R. C. (1973), "Theory of rational option pricing," *Bell Journal of Economics and Management Science*, **4**, pp.143–183.

[19] Merton, R. C. (1974), "On the pricing of corporate debt: the risk structure of interest rates," *Journal of Finance*, **29**, pp.449–470.