研究論文

負債を完全にヘッジできない場合の確定給付年金の動的最適ポートフォリオ

内山 朋規

2004 年 10 月 28 日投稿
2005 年 4 月 24 日受理

概要

確定給付年金制度においては，その支払額が就労期間中の賃金の履歴に依存して定まるため，負債の不確実性を考慮した資産運用を行う必要がある．本稿では，取引可能な金融資産により負債を完全にはヘッジできない非完備市場の設定のもとで，動的最適ポートフォリオを近似的に導出する．その結果，最適ポートフォリオは，年金資産の増加を目的とする成分のほかに，負債の不確実性をヘッジする成分から構成されることが示される．さらに，実証データから推定されるパラメータを用いてその特徴を分析する．個々の企業により異なる負債の特性は，ヘッジ成分の大きさに影響を与える．企業は，自らの年金制度や賃金変動の特徴を理解して，ポートフォリオを構築する必要がある．

キーワード： 最適ポートフォリオ選択，資産配分，確定給付年金，非完備市場

1 はじめに

年金制度には，大別して確定拠出年金（DCプラン）と確定給付年金（DBプラン）の 2 種類がある．確定給付年金は，一般的に勤続年数や就労期間中の賃金に応じて支払われる額が定まる年金制度で，積立資産の投資リスクはスポンサーである企業が負担する．一方で，確定拠出年金は，拠出額が確定している年金制度で，投資リスクは従業員が負担する．わが国では，確定拠出年金制度は 2001 年 10 月に始まったが，依然としてこれを採用している企業は少なく，確定給付年金制度が一般的である．

確定給付年金制度を持つ企業にとって，年金債務は大きな負債である．2002 年 10 月末時点で東証 1 部に上場する企業（金融業を除く）を対象に，2001 年 6 月から 2002 年 7 月までの本決算データを集計したところ，年金債務は自己資本の約 52% に相当した．一方で，バブル崩壊後の資産運用利回りの低迷などにより，積立率（年金債務に対する年金資産の割合）は約 51% しかなく，積立不足額は自己資本の約 26% に相当した．多くの企業にとって，年金資産の運用は重要な経営問題となっている．

支払額が事前には確定しないことが，確定給付年金の資産運用を難しくさせている．年金支払額は，勤続年数や賃金の履歴に依存して定まるので，事前には確定していない．取引可能な金融資産により，この不確実性を完全にはヘッジすることができない．退職時に定まる年金をまかなうために，企業はあらかじめ積み立てた

* 野村證券金融経済研究所金融工学研究センター／京都大学大学院経済学研究科博士後期課程／ UCLA アンダーソンスクール客員研究員．mail: uchiyama-0dk1@jp.nomura.com

年金資産を長期に渡って効率的に運用する必要がある．本稿では，取引可能な資産により支払額を完全にはヘッジすることができない非完備市場において，確定給付年金の積立資産の最適ポートフォリオを導出し，その特徴を分析する．

Black (1989) は，年金資産を株式に投資することの意味に関して，債券に比べて高いリターンが望めるという理由だけではなく，負債に対するヘッジの機能もあることを概念的に述べている．年金負債の定義を狭義の負債と広義の負債の 2 種類に分け，狭義の負債とは，現時点で確定している分の負債のみを指し，広義の負債とは，過去や現在のみならず将来の賃金にも依存して，将来に確定する年金の現在価値として定義している．負債の定義として狭義のものを採用するならば，負債のヘッジには債券を用い，一方，広義のものを採用するならば，将来の賃金変動と明らかに相関を持つ株式に投資をするべきとしている．本稿では広義の負債の定義を採用する．このもとで具体的なモデル化を行い，Black の概念的な主張を明示的なものにするのが本稿の目的である．

長期のポートフォリオ理論は，1950 年代の Markowitz の平均分散分析を発展させた Merton (1696, 1971, 1973) の画期的な研究によりその重要性が認識されてきたが，いくつかの例外を除けば[*1]，しばらくの間停滞していた研究分野であった．しかし，Brennan, Schwartz and Lagnado (1997) が長期の最適ポートフォリオは短期のそれとは異なることを強調した頃から，再度，この分野には注目が集まってきている．最近の第一の発展として，いくつかの前提のもとで，解析解が発見されるようになってきたことが挙げられる．労働所得や負債を考慮せずに消費を金融資産のみからまかなう問題に対して，Merton は，投資機会が一定[*2]のもとでの明示的な解を得ているが，この場合には長期の最適ポートフォリオは短期のものと一致する．投資機会が変動する場合への拡張として，Kim and Omberg (1996) は，リスク資産の期待リターンが平均回帰過程（Ornstein-Uhlenbeck 過程）に従い，投資家の効用が最終富に関して定義される場合の解析解を得ており，Wachter (2002) はこれを完備市場に限定することで，効用が各期の消費に関して定義される場合の解析解を得ている．Sørensen (1999) は，金利が Vasicek モデルに従う場合の解析解を求めている．Schroder and Skiadas (1999) や Liu (2001) は，一般的な枠組みにおける最適解をより体系的に論じている．当然のことながら，厳密な解析解が得られるケースは限られているので，解析解が得られない場合には，近似解あるいは数値計算に頼る必要がある．最近ではこれらの手法も発展してきている．

最近の第二の発展として，より実際的な長期のポートフォリオ理論を扱うようになってきたことが挙げられる．Campbell and Viceira (1999) は，実証に基く動機から，長期の株価リターンの予測可能性を考慮した最適資産配分を求め，Campbell and Viceira (2001) や Brennan and Xia (2002) は，インフレリスクを考慮した債券投資を分析している．これらの研究では，パラメータの推定値に誤差が無いものとして扱われているが，実際には真の値は投資家にとって未知である．Brennan (1998) や Xia (2001) は，投資家がデータを観察する毎にパラメータの値を学習する場合の最適配分比率を求めている．この他，Liu, Longstaff and Pan (2003) は，まれなイベントとして価格過程にジャンプが発生する場合，Liu and Pan (2003) は，債券や株式のほかにデリバティブも投資対象資産に加えた場合をそれぞれ扱っている．また，労働所得を考慮したいわゆるライフサイクル投資やバックグラウンドリスクの問題への適用として，Bodie, Merton and Samuelson (1992) は完備市場の設定で，Viceira (2001) は非完備市場の設定で，ポートフォリオ選択の問題を扱っている．さらに，現実的に無視できない取引コストを考慮した最適化に関する文献も多く，代表的なものとして Shreve and Soner (1994) や Liu (2002, 2004) などがある．

このように，最適ポートフォリオ問題の研究は多岐に渡っており，さまざまな特徴が明らかになってきた．しかし，筆者の知る限り，完全にはヘッジできない確率的な負債がある場合の最適ポートフォリオ問題はほと

[*1] 特筆すべき例外の一つして，Karatzas, Lehoczky and Shreve (1987) や Cox and Huang (1989) による，動的計画法の代替であるマルチンゲール法（双対法）による解法の開発がある．

[*2] 金利やリスク資産の期待リターン，ボラティリティが一定であることを投資機会が一定であるという．

んど扱われていないように思われる*3．本稿では，パラメータを既知とし，取引コストがなく，投資機会一定という古典的な設定のもとで議論する．その代わりに，完全にはヘッジできない確率的な負債が最適ポートフォリオに与える影響について分析することに集中する．

確定給付年金の最適ポートフォリオに関する本稿の先行研究に Sundaresan and Zapatero (1997) がある．彼らは，退職時点で定まる年金を賃金過程の算術加重平均で定義し，賃金過程と取引可能資産が完全に相関するという完備市場の設定のもとで，年金の負債価値とそのヘッジ戦略を求めている．本稿では，彼らのモデルと同じものを用いる．ただし，賃金過程と取引可能資産が完全には相関しない，非完備市場を前提にする点が異なる．そして，積立率に関するベキ関数を用いた期待効用最大化により，最適ポートフォリオの近似的な解析解を求め，実証データから推定されるパラメータを用いてその特徴を分析する．

本稿の構成は以下の通りである．まず 2 章でモデルの設定を行う．3 章で賃金の算術加重平均を対数正規過程で近似することによって，近似的な最適ポートフォリオを導出する．退職時点の賃金のみで年金が定まる場合には，この近似解は厳密である．4 章でわが国の実証データにもとづくパラメータを用いて，最適ポートフォリオの特徴を分析する．5 章でモデルの拡張について触れ，最後に 6 章で結論を述べる．

2 設定

2.1 年金制度

確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の標準 Brown 運動が生成する標準フィルトレーションを $\mathcal{F}_t$ とし，有限期間 $[0,T]$ を考える．年金制度のモデル化は，Sundaresan and Zapatero (1997) に従う．モデルをすべて名目ではなく実質ベースで考える．ある企業の一人の従業員を考え，その従業員は時点 0 で入社し，時点 T で退職するものとする．単純化のために，入社と退職の時刻には不確実性がないものとする．その従業員に支払われる賃金過程 X は適合的で，

$$dX_t = X_t\left(m(t)\,dt + \rho v\,dB_t + \sqrt{1-\rho^2}v\,d\widetilde{B}_t\right) \tag{1}$$

に従うものとする．ただし，$m(t):[0,T]\to\mathbb{R}$ は時間 t の確定的かつ有界な連続関数で，$\rho\in[-1,1]$ と $v>0$ は定数，B と $\widetilde{B}$ は互いに直交する 1 次元標準 Brown 運動である．すなわち，賃金過程 X は瞬間的な期待リターン $m(t)$，ボラティリティ v の幾何 Brown 運動に従うことを仮定している．

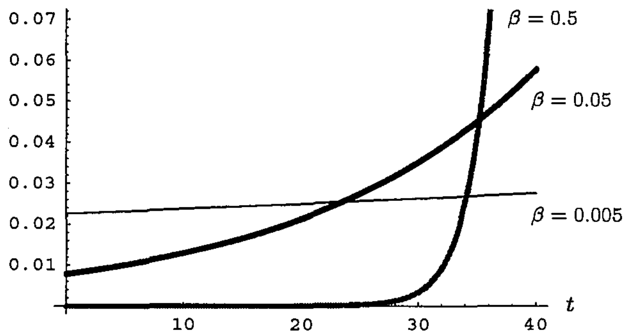
時点 T で確定する年金は αZ_T で定まり，Z_T は賃金過程 X の加重平均，α は支給率（定数）を表す．パラメータ $\beta\in(0,\infty)$ を用いて，Z_T は以下のように定義される．

$$Z_t := \frac{\beta}{1-e^{-\beta t}}\int_0^t e^{-\beta(t-s)}X_s\,ds = \frac{\beta}{e^{\beta t}-1}\int_0^t e^{\beta s}X_s\,ds \tag{2}$$

したがって，β が大きいほど退職時に近い賃金のウェイトが高まる．β が十分に大きい場合には退職時の賃金のみで年金が定まり，これは伝統的な最終賃金比例方式に相当する．β がゼロに近い場合には，年金は賃金のパス全体に等ウェイトで依存し，これは最近導入が増えつつあるポイント制方式や，公的年金や代行部分で採用されている全期間平均方式に相当する．（図 1）

*3 負債額を運用の目標額として考えることが可能であり，完備市場の設定で運用目標を持つ投資家の最適投資戦略を扱った研究には，Black and Perold (1992) や Grossman and Zhou (1996) のポートフォリオ・インシュアランスや，これをある一定のショートフォールの確率や期待値を許容する場合に拡張した Basak and Shapiro (2001) や Basak, Shapiro and Teplá (2003) がある．類似するものとして，Föllmer and Leukert (1999, 2000) は，完備市場に限定せずにショートフォールの確率や期待値を最小になる取引戦略を求めている．しかし，非完備市場のもとでは明示的な最適戦略の解を得るのは難しい．

図1　β の違いによる加重ウェイト



β の違いによる加重ウェイト $\frac{\beta}{1-\exp(-\beta T)}e^{-\beta(T-t)}$ の比較．ただし $T = 40$ とした．

2.2　証券市場

証券価格の前提についても，賃金と株式価格が完全には相関しない点を除き，Sundaresan and Zapatero (1997) に従う．市場には投資可能な 2 種類の証券（無リスク証券とリスク証券）が存在するものとする．短期金利が定数 $r > 0$ で与えられるものとし，無リスク証券の価格過程 S^0 は $dS_t^0 = rS_t^0\,dt$ で定義され，一方，リスク証券（株式と呼ぶ）の価格過程 S は以下の幾何 Brown 運動に従うものとする．

$$dS_t = \mu S_t\,dt + \sigma S_t\,dB_t \tag{3}$$

ただし，$\mu > r$，$\sigma > 0$ は定数で，B は(1) の標準 Brown 運動である．(1) と(3) から，賃金上昇率と株価リターンの瞬間的な相関は ρ なので，$|\rho| < 1$ のとき，株式への投資によって将来に支払われる年金を完全にはヘッジすることはできない．$|\rho| = 1$ は Sundaresan and Zapatero のケースに該当する．

さらに，途中時点での掛金を考慮せず，掛金は時点 0 のみで拠出されるものとする[*4]．このとき，株式の投資単位を表す資金自己調達的な取引戦略過程 θ を用いて，年金資産額 $W > 0$ は以下に従う．

$$dW_t = (W_t - \theta_t S_t)r\,dt + \theta_t dS_t = W_t\left[(\varphi_t\lambda + r)\,dt + \varphi_t\sigma\,dB_t\right] \tag{4}$$

ただし，$\lambda := \mu - r$，$\varphi_t := \theta_t S_t / W_t$ とおいた．すわなち λ は株式のリスクプレミアム，φ は株式への投資比率過程を表す．

2.3　年金スポンサーの問題

年金スポンサーである企業は，時点 T で確定する年金額 αZ_T を賄うために，事前に年金資産の運用を効率的に行う必要がある．なぜならば，年金資産 W_T が αZ_T を下回った場合には，企業が不足額を追加的に負担しなければならないからである．本稿では，企業はリスク回避的であることを前提にする．Modigliani and Miller (1958) の理論の通り，摩擦が無い完全市場の前提のもとでは，リスクをコントロールするのは完全に投資家の問題であって，企業がリスク回避的であるべきことは自明ではない．しかし，Froot, Scharfstein and Stein (1993) が主張する通り，税金の存在や，資本再調達時のレモンのプレミアム，信用悪化時のデフォルトコストの具現化やフランチャイズバリューの低下などを考慮すると，企業はリスク回避的であるべきことが正

[*4] この仮定は Sundaresan and Zapatero と同様であるが，強い仮定である．5 章で途中掛金がある場合への拡張について触れる．

当化されよう．実際に企業はリスク管理を行っている．企業財務に深刻な問題を与え得る年金資産の運用について，企業がリスク回避的な行動をとるというのは妥当な仮定である．

時点 $t<T$ における企業の最適化問題として，時点 T で確定する年金額 αZ_T と年金資産 W_T により定まる関数 $u(\alpha Z_T, W_T)$ を用いて，以下を考える．

$$\sup_{\varphi\in\Phi} E_t\left[u(W_T,\alpha Z_T)\,|\,W_t=w,\ X_t=x,\ Z_t=z\right]=:V(w,x,z,t) \tag{5}$$

ただし，V は価値関数，Φ は予算制約(4) を満たす許容的な投資比率の集合を表す．さらに関数 u には，退職時刻での積立率 $W_T/(\alpha Z_T)$ に関するベキ効用関数を考える．すなわち，

$$u\left(W_T,\alpha Z_T\right)=\frac{1}{1-\gamma}\left(\frac{W_T}{\alpha Z_T}\right)^{1-\gamma} \tag{6}$$

とする．正の定数 $\gamma>0$ は積立率に関する相対リスク回避度を表し，$\gamma=1$ の場合には，u は対数効用 $\log\left(W_T/\alpha Z_T\right)$ に相当する．

代替案として，積立率 $W_T/\alpha Z_T$ の代わりに差分 $W_T-\alpha Z_T$ を用いることも考えられる．しかし，ベキ関数の場合には非正の定義域を扱えないので，本稿の非完備市場の設定では，差分に関するベキ関数を用いることができない．積立率と差分の違いは，積立率の場合には，積立率にかかわらず相対リスク回避度は一定になり，差分の場合には，（もし定義できれば）相対リスク回避度は積立率の減少関数になることである*5*6*7．

3 最適ポートフォリオ

3.1 動的計画法によるアプローチ

最初に，動的計画法（確率制御）によるアプローチを用いて，最適ポートフォリオを求める．この方法では，最適解が未知の価値関数に依存するために，明示的な解を得ることができないが，その特徴が明らかになる．

問題(5) の Hamilton-Jacobi-Bellman（HJB）方程式は，

$$\begin{aligned}\sup_{\varphi\in\Phi} V_t+(\varphi_t\lambda+r)wV_w+m(t)xV_x+\frac{\beta e^{\beta t}}{e^{\beta t}-1}(x-z)V_z&\\ +\frac{1}{2}x^2v^2V_{xx}+\frac{1}{2}w^2\varphi_t^2\sigma^2V_{ww}+\rho xw\varphi_t\sigma vV_{xw}&=0\end{aligned} \tag{7}$$

となり，境界条件は $V(w,z,x,T)=(w/(\alpha z))^{1-\gamma}/(1-\gamma)$ で与えられる．ただし V の添え字はそれぞれの偏微分を表す．1 階の条件から以下を得る．

命題 1. 問題(5) に対する株式への最適投資比率 φ^* は，価値関数 V を用いて以下になる．

$$\varphi_t^*=\left(\frac{-V_w(w,z,x,t)}{wV_{ww}(w,z,x,t)}\right)\frac{\lambda}{\sigma^2}+\left(\frac{-V_{xw}(w,z,x,t)}{wV_{ww}(w,z,x,t)}\right)\frac{\rho v}{\sigma}x \tag{8}$$

---

*5 Sundaresan and Zapatero (1997) は，差分 $W_T-\alpha Z_T$ に関するベキ関数の期待効用最大化により，最適ポートフォリオを求めている．彼らの $\rho=1$ という完備市場の設定においては，ポートフォリオ・インシュアランスと同様であり，リスク資産への最適投資比率は，年金負債を複製する成分と，資産と年金負債の差分を平均分散接点ポートフォリオに投資する成分の和になる．

*6 同様な問題は，金融経済学の分野でも，効用に外部的習慣形成（external habit formation）をとり入れた問題で扱われている．これは経済全体の総消費との比較で効用が定まるモデルで，Abel (1990, 1999) は総消費との比率に関するベキ効用を扱っている．一方で Campbell and Cochrane (1999, 2000) は総消費との差分に関するベキ効用を扱っているが，差分が対数正規過程に従うことを仮定して，常に資産がベンチマークを上回るようにモデル化している．

*7 ベキ関数と同様に，明示的な解を得るうえで取り扱いが容易な効用関数に指数関数がある．しかし，資産と負債がともに対数正規過程に従う枠組みで，差分に関して効用を定義する場合，指数効用は下に有界ではない定義域を扱えない．Davis (2000), Henderson (2002), Delbaen et al. (2002) では，取引可能な証券により原資産を複製できない非完備市場において，差分に関する指数関数を用いた期待効用最大化の枠組みにより，下には有界ではないペイオフを持つ状態依存請求権の価値評価とヘッジ問題を扱っている．

この命題から，最適投資比率は二つの成分からなることが分かる．第 1 項は，資産のみを考えて最適化した際の最適投資比率で，平均分散接点ポートフォリオに投資する成分を表し，Merton の問題における近視眼的ポートフォリオに該当する．これは Black (1989) が述べる高いリターンを狙うための成分で，相対リスク回避度 $\frac{-wV_{ww}}{V_w}$ が増加すると，この成分は減少する．以後，この第 1 項を平均分散基準の成分と呼ぶことにする．第 2 項は，将来の賃金に年金が依存するために，この確率変動を事前にヘッジするために保有する成分を表し，Black が述べる年金負債のヘッジ成分に相当する．Merton (1971, 1973) は，負債がなく資産のみを考慮した最適ポートフォリオ問題で，投資機会が変動する場合に，最適投資比率は平均分散接点ポートフォリオと投資機会の変動をヘッジするポートフォリオからなることを得ている．本稿の問題では投資機会が一定であるが，確率的な負債があるために，Merton と同様の形式になっている．

本稿では単一のリスク証券を考えているが，取引可能なリスク証券が複数ある場合に拡張することは容易である．このとき，(8) の右辺第 1 項は，リターンが互いに一次独立な全てのリスク証券から構成される平均分散接点ポートフォリオに比例し，第 2 項は，リターンが賃金変動に最も相関するリスク証券からなるポートフォリオに比例にする．

最適投資比率 φ_t^* を明示的に求めるためには，価値関数 V を求める必要がある．動的計画法によるアプローチでは，先に価値関数の解を推測して，確認するのが通常である．しかし，この問題では解を推測することは容易ではない．そこで，Z_T を対数正規分布で近似して，これを用いた近似問題に対する最適な終端富 W_T^* をマルチンゲール法により求め，この終端富から近似価値関数 $\widehat{V}$ を求める．この近似価値関数を用いて，最適投資比率を求めることにする．

3.2 年金の対数正規近似

この問題を明示的に解くのが難しいのは，Z_t が(2) の算術平均で与えられているためである．対数正規過程の算術平均は扱い難いので，木島（1994）第 3 章を参考にして，Z_T の分布を対数正規分布で近似する[*8]．

そのために，まず，$s \in (0,T]$，$t \in (0,s)$，$x \in \mathbb{R}_+$，$z \in \mathbb{R}_+$ について，関数 g_1，g_2，g_3，g_4 を以下のように定義する．

$$\begin{aligned}
g_1(s,t,x,z) &:= \log\left[D(t,s) + \frac{xA(t,s)}{z}\right] \\
g_2(s,t,x,z) &:= \frac{1}{s-t}\log\left(\frac{z^2D(t,s)^2 + 2xzA(t,s)D(t,s) + 2x^2C(t,s)}{(zD(t,s)+xA(t,s))^2}\right) \\
g_3(s,t,x,z) &:= \frac{1}{(s-t)\sigma}\log\left(\frac{xB(t,s)+zD(t,s)}{xA(t,s)+zD(t,s)}\right) \\
g_4(s,t,x,z) &:= \frac{\log\left[D(t,s) + \frac{xG(t,s)}{z}\right] - g_1(s,t,x,z) - \rho v(s-t)g_3(s,t,x,z)}{\sqrt{1-\rho^2}v\sqrt{g_2(s,t,x,z) - g_3(s,t,x,z)^2}}
\end{aligned} \tag{9}$$

ただし，

$$\begin{aligned}
A(t,s) &:= \frac{\beta}{e^{\beta s}-1}\int_t^s e^{\beta u + \int_t^u m(l)\,dl}\,du \\
B(t,s) &:= \frac{\beta}{e^{\beta s}-1}\int_t^s e^{\beta u + \int_t^u m(l)\,dl + \sigma\rho v(u-t)}\,du \\
C(t,s) &:= \frac{\beta^2}{(e^{\beta s}-1)^2}\int_t^s\int_t^\tau e^{\beta u + \beta\tau + 2\int_t^u m(l)\,dl + v^2(u-t) + \int_u^\tau m(l)\,dl}\,du d\tau
\end{aligned}$$

[*8] 実務で広く取引されているアベレージ・オプションは，ある一定期間の為替などの算術平均を原資産とするオプションである．このオプション価値を求める際に，対数正規過程の算術平均を対数正規分布で近似するという方法がよく使われている．この対数正規近似については，Levy (1992) や Iwaki, Kijima and Yoshida (1993) など多くの文献が扱っている．

$$
\begin{aligned}
D(t,s) &:= \frac{e^{\beta t}-1}{e^{\beta s}-1}\\
G(t,s) &:= \frac{\beta}{e^{\beta s}-1}\int_t^s e^{\beta u+\int_t^u m(l)\,dl+v^2(u-t)}\,du
\end{aligned}
$$

である．さらに $t\in(0,T)$，$x\in\mathbb{R}_+$，$z\in\mathbb{R}_+$ が与えられたもとで，時刻 $s\in(t,T]$ の Brown 運動の値に依存する確率変数 η_1，η_2 を以下のように定義する．

$$
\begin{aligned}
\eta_{1,s}^{t,x,z} &:= \exp\left(g_1(s,t,x,z)-\frac{1}{2}g_3(s,t,x,z)^2(s-t)+g_3(s,t,x,z)(B_s-B_t)\right)\\
\eta_{2,s}^{t,x,z} &:= \exp\left(-\frac{1}{2}\left(g_2(s,t,x,z)-g_3(s,t,x,z)^2\right)(s-t)+\sqrt{g_2(s,t,x,z)-g_3(s,t,x,z)^2}(\widehat{B}_s-\widehat{B}_t)\right)
\end{aligned}
$$

ここで B と $\widehat{B}$ は互いに直交する標準 Brown 運動で，B は(1)のものと同じである．これらを用いて

$$
\widehat{Z}_s^{t,x,z} := Z_t\eta_{1,s}^{t,x,z}\eta_{2,s}^{t,x,z};\quad s\in(0,T],\quad t\in(0,s) \tag{10}
$$

とおく．このように定められた $\widehat{Z}$ について以下が成り立つ．

命題 2. 時点 t からみて，時点 $T>t$ における $\widehat{Z}_T^{t,X_t,Z_t}$ は対数正規分布に従い，以下の性質を満たす．

$$
E_t[Z_T]=E_t\left[\widehat{Z}_T^{t,X_t,Z_t}\right] \tag{11}
$$

$$
E_t[Z_T^2]=E_t\left[\left(\widehat{Z}_T^{t,X_t,Z_t}\right)^2\right] \tag{12}
$$

$$
E_t[Z_TS_T]=E_t\left[\widehat{Z}_T^{t,X_t,Z_t}S_T\right] \tag{13}
$$

$$
E_t[Z_TX_T]=E_t\left[\widehat{Z}_T^{t,X_t,Z_t}X_T\right] \tag{14}
$$

また，標準 Brown 運動 $\widetilde{B}$ と $\widehat{B}$ の間には，$E_t\left[(\widetilde{B}_s-\widetilde{B}_t)(\widehat{B}_s-\widehat{B}_t)\right]=g_4(s,t,X_t,Z_t)$ の関係がある．

証明は補論に記載されている．時点 t でみて，$\log\widehat{Z}_T^{t,X_t,Z_t}$ は平均 $\log Z_t+g_1(T,t,X_t,Z_t)-\frac{1}{2}g_2(T,t,X_t,Z_t)(T-t)$，分散 $g_2(T,t,X_t,Z_t)(T-t)$ の正規分布に従う．すなわち，$\log\widehat{Z}_T^{t,X_t,Z_t}$ の条件付分布の各モーメントは時刻 t における情報（X_t と Z_t，t）に依存している．さらに Z_T と $\widehat{Z}_T^{t,X_t,Z_t}$ は 1 次と 2 次の条件付モーメントが一致し，$\widehat{Z}_T^{t,X_t,Z_t}$ と S_T の条件付相関は Z_T と S_T の条件付相関に一致している．$\widehat{Z}_T^{t,X_t,Z_t}$ と X_T の条件付相関もまた Z_T と X_T の条件付相関に一致している．このことから，以後では $\widehat{Z}_T^{t,X_t,Z_t}$ を Z_T の近似として扱う．すなわち，

$$
Z_T\,|\,\mathcal{F}_t\approx\widehat{Z}_T^{t,X_t,Z_t}
$$

とする．

問題(5)の Z の代わりに(10)の $\widehat{Z}$ を用いて，新たな問題を定める．

$$
\sup_{\varphi\in\Phi}E_t\left[u\left(W_T,\alpha\widehat{Z}_T^{t,x,z}\right)\middle|W_t=w,\ X_t=x,\ Z_t=z\right]=:\widehat{V}(w,x,z,t) \tag{15}
$$

ただし，$u(\cdot,\cdot)$ は(6)のベキ関数で，$\widehat{V}$ はこの近似最適問題の価値関数を表す．時刻 t における $\widehat{V}$ は W_t と X_t，Z_t，t に依存することに注意する．したがってこの近似問題の HJB 方程式は，(7)と同様の形式で，

$$
\begin{aligned}
\sup_{\varphi\in\Phi}\widehat{V}_t+(\varphi_t\lambda+r)w\widehat{V}_w+m(t)x\widehat{V}_x+\frac{\beta e^{\beta t}}{e^{\beta t}-1}(x-z)\widehat{V}_z&\\
+\frac{1}{2}x^2v^2\widehat{V}_{xx}+\frac{1}{2}w^2\varphi_t^2\sigma^2\widehat{V}_{ww}+\rho xw\varphi_t\sigma v\widehat{V}_{xw}&=0
\end{aligned}
$$

により与えられ，境界条件は $\widehat{V}(w,z,x,T)=(w/(\alpha z))^{1-\gamma}/(1-\gamma)$ である．$\widehat{V}$ の添え字はそれぞれの偏微分を表す．この問題の株式への最適投資比率 $\hat{\varphi}^*$ についても(8) と同様の形式で，

$$\hat{\varphi}_t^*=\left(\frac{-\widehat{V}_w(w,z,x,t)}{w\widehat{V}_{ww}(w,z,x,t)}\right)\frac{\lambda}{\sigma^2}+\left(\frac{-\widehat{V}_{xw}(w,z,x,t)}{w\widehat{V}_{ww}(w,z,x,t)}\right)\frac{\rho v}{\sigma}x \tag{16}$$

になる．$\hat{\varphi}^*$ を明示的に得るために，次節でマルチンゲール法を用いて $\widehat{V}$ を求めることにする．

そのために，状態価格密度（プライシングカーネル）を導入する．ノビコフ条件 $E\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T\psi_t^2\,dt\right)\right]<\infty$ を満たすある ψ に関して，$\mathrm{var}\left[\xi_{2,T}^{t,\psi}\right]<\infty$ が成立するものとする．ただし

$$\xi_{2,s}^{t,\psi}:=\exp\left(-\frac{1}{2}\int_t^s\psi_u^2\,du-\int_t^s\psi_u\,d\widehat{B}_u\right)$$

とおいた．このとき，状態価格密度過程 $\pi^{t,\psi}$ を以下のように定めることができる．

$$\pi_s^{t,\psi}:=\xi_{1,s}^{(t)}\xi_{2,s}^{t,\psi}$$
$$\xi_{1,s}^{(t)}:=\exp\left(-r(s-t)-\frac{1}{2}\frac{\lambda^2}{\sigma^2}(s-t)-\frac{\lambda}{\sigma}(B_s-B_t)\right)$$

ψ は，株式によりヘッジできない経済のショック $\widehat{B}$ に対するリスクの市場価格を表す．非完備性から，異なる ψ に対してそれぞれ状態価格密度 $\pi^{t,\psi}$ が存在し，無裁定条件からは状態価格密度が一意に定まらない．しかし，状態価格密度によりデフレートされた証券価格過程 $S_s^0\pi_s^{t,\psi}$ と $S_s\pi_s^{t,\psi}$ は，ψ の値とは無関係にマルチンゲールになる．本稿では，B に関するリスクの市場価格 λ/σ が定数で与えられていることと同様に，ψ を確定的な変数として仮定する．この仮定により，最適ポートフォリオの近似的な明示解を得ることが可能になる．この仮定を弱めて，投資家が内生的に状態価格密度を選択する場合への拡張については、補論 D で触れる．

このように状態価格密度を外生的に与えることは，Campbell and Viceira (2001) や Brennan and Xia (2002) と同様である．彼らは，名目資産のみが取引可能でインフレリスクをヘッジすることができない非完備市場の設定において，ヘッジできないインフレリスクの市場価格を外生的に定数として与えて，最適ポートフォリオを導いている*9．

3.3 マルチンゲール法による近似最適ポートフォリオ

明示的な最適ポートフォリオの表現を得るために，状態価格密度 $\pi_s^{t,\psi}$ を用いて，動的な問題(15) を以下の同値な静的問題に変換にする．

$$\sup_{W_T\in\mathcal{A}}E_t\left[u\left(W_T,\alpha\widehat{Z}_T^{t,x,z}\right)\middle|W_t=w,\ X_t=x,\ Z_t=z\right]\qquad\text{s.t. }E_t\left[\pi_T^{t,\psi}W_T\right]\le w \tag{17}$$

ただし，$\mathcal{A}$ は可積分で $\mathcal{F}_T$ 可測な非負値確率変数の集合を表す．

Cox and Huang (1989) や Karatzas, Lehoczky and Shreve (1987) などによるマルチンゲール法（双対法）の結果から，以下の命題を得る．証明は補論に記載した．

命題 3. (1)　問題(17) の最適な最終富 W_T^* は以下で与えられる．

$$W_T^*=w\left(\eta_{1,T}^{t,x,z}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\left(\xi_{1,T}^{(t)}\right)^{\frac{-1}{\gamma}}F_2(T,t,x,z) \tag{18}$$

*9 具体的には，物価過程を p とし，取引可能な資産により構成される富過程の名目値を W とすると，p の変動に完全に連動する証券（例えば物価連動債）が取引可能ではなければ，実質富過程 W/p を複製することはできない．本稿と同様に，取引可能な証券でヘッジできない p の変動に関するリスクの市場価格を外生的に与えることにより，実質消費に関する期待効用を最大化する最適ポートフォリオを導出している．ヘッジできないインフレリスクの市場価格が，如何に定数として定まるのかについては，本稿と同様にその根拠を示していない．

ただし，

$$F_2(T,t,x,z) := \exp\left[\frac{\gamma-1}{\gamma}\left[-g_1(T,t,x,z) + \left(\frac{1}{2\gamma}g_3(T,t,x,z)^2 + r + \frac{1}{2\gamma}\frac{\lambda^2}{\sigma^2} + \frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{\lambda}{\sigma}g_3(T,t,x,z)\right)(T-t)\right]\right]$$

(2) 問題(17) の価値関数 $\widehat{V}$ は以下になる．

$$\widehat{V}(w,x,z,t) = \frac{1}{1-\gamma}\left(\frac{w}{\alpha z}\right)^{1-\gamma}F_3(T,t,x,z) \tag{19}$$

ただし，

$$F_3(s,t,x,z) := \exp\left(\frac{1}{2}(\gamma-1)(\gamma-2)\left(g_2(s,t,x,z) - g_3(s,t,x,z)^2\right)(s-t)\right)F_2(s,t,x,z)^{-\gamma} \tag{20}$$

(3) 問題(15) の解である株式への最適投資比率 $\hat{\varphi}^*$ は以下になる．

$$\hat{\varphi}^*_t = \frac{1}{\gamma}\frac{\lambda}{\sigma^2} + \frac{1}{\gamma}\frac{xF_3'(T,t,x,z)}{F_3(T,t,x,z)}\frac{\rho v}{\sigma} \tag{21}$$

ただし，$F_3'(s,t,x,z)$ は $F_3(s,t,\cdot,z)$ の偏微分を表し，

$$\frac{F_3'(s,t,x,z)}{F_3(s,t,x,z)} := (s-t)(\gamma-1)\left(\frac{\gamma-2}{2}\frac{\partial}{\partial x}g_2(s,t,x,z) + \left(1-\frac{\gamma}{2}-\frac{1}{2\gamma}\right)\frac{\partial}{\partial x}g_3(s,t,x,z)^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{\lambda}{\sigma}\frac{\partial}{\partial x}g_3(s,t,x,z) + \frac{1}{s-t}\frac{\partial}{\partial x}g_1(s,t,x,z)\right) \tag{22}$$

である．(22) の中のそれぞれの偏微分の形式は補論に与えられている．

4 章では，実際のデータに基づくパラメータを用いて，(21) の $\hat{\varphi}^*_t$ の特徴を分析する．その前に，年金支払額の決定方式の特別なケースにあたる最終賃金比例方式の場合の最適ポートフォリオを次節で導出する．

3.4 特別な場合：最終賃金比例方式

$\beta \to \infty$ の場合には，Z_T は X_T に一致し，年金は最終時の賃金のみで定まる．この場合には，厳密な最適投資比率の解が得られる．また，株式によりヘッジできないリスクの市場価格を確定的な変数として外生的に仮定しなくても，この厳密解は成り立つ．次の命題でこの厳密解の導出を行い，さらに近似最適投資比率が厳密解に収束することを確認する．この場合，もとの問題(5) は，

$$\sup_{\varphi\in\Phi} E_t\left[u\left(W_T, \alpha X_T\right) \mid W_t = w, X_t = x\right] =: J(w,x,t) \tag{23}$$

になる．

命題 4. 年金が最終賃金のみで定まる場合の問題(23) の最適投資比率 φ^* は以下の定数になる．

$$\varphi^* = \frac{1}{\gamma}\frac{\lambda}{\sigma^2} + \left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\frac{\rho v}{\sigma} \tag{24}$$

証明は補論に記載した．

$\beta \to \infty$ のとき，(22) の右辺で，$\frac{\partial}{\partial x}g_1(T,x,z,t)$ は $1/x$ に収束し，その他の項はゼロに収束する[10]．したがって(21) の近似解は，$\beta \to \infty$ のとき，厳密解(24) に収束する．また，限りなくリスク回避的な場合 $(\gamma \to \infty)$，リスク資産の保有目的は，ヘッジ成分 $\rho v/\sigma$ のみになる．$\gamma \to 1$ の対数効用の場合には，平均分散基準の成分 λ/σ^2 のみになる．

[10] $\beta \to \infty$ の極限について，$A(t,T)$，$B(t,T)$，$C(t,T)$ はすべて定数に収束し，$D(t,T)$ はゼロに収束する．

4 数値例

4.1 データおよびパラメータの決定

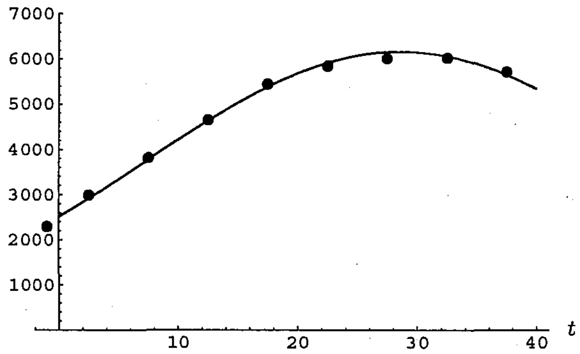
本章では，わが国の市場データと賃金データから推定されるパラメータを用いて，3 章で得た最適ポートフォリオ(21) の性質を分析する．

パラメータの推定に利用するデータとして，賃金データには，産業別データを年次で利用が可能な厚生労働省が公表する賃金構造基本統計調査報告を用いる．株価には東証株価指数（TOPIX），インフレ指数には全国消費者物価指数，名目無リスク金利には有担保コール翌日物金利をそれぞれ利用する．分析期間は 1970 年から 2002 年までである．従業員は 20 歳で入社し，60 歳で退職するものと仮定する．したがって $T = 40$ で，勤続年数は $t =$ 年齢 $- 20$ 年 とする．

実質賃金のドリフトには，クロスセクションにおける勤続年数と賃金伸び率の関係と，時系列における時間経過に伴う賃金伸び率の双方を考慮する．2002 年の賃金構造基本統計調査報告の年齢別賃金*11を用いて，対数賃金を勤続年数の 2 次多項式で近似したのものが，図 2 である．このクロスセクションの賃金カーブを時点にかかわらず不変とする．これに実質賃金上昇率の平均 1.70%*12を加えた次式を利用する．

$$\int_t^s m(u)\,du = -0.0011(s^2 - t^2) + 0.0629(s - t) + 0.017(s - t) \tag{25}$$

図 2　賃金と勤続年数の関係



横軸：勤続年数，縦軸：年間賃金（千円）．t を勤続年数として $t = 0$ が 20 歳を表し，点は 2002 年のもの．曲線は対数賃金を勤続年数の 2 次多項式で近似したもの．

実質賃金のボラティリティ v については注意が必要である．報告されているデータは集計された総賃金なので，このデータから求められる標準偏差は，個々の企業の賃金上昇率の標準偏差よりも小さいはずである．そこで，実質賃金上昇率の標準偏差 2.61% を 2 倍して利用する*13．また，名目の株価リターンから名目無リスク金利を控除した株価の実質超過リターンと実質賃金上昇率の相関 ρ について，その推定値は 0.302 となった．

*11 「年齢階級別きまって支給する現金給与額、所定内給与額及び年間賞与その他特別給与額」に収録されている「企業規模計・産業計・全労働者」の調査全体のものを利用した．年齢階層別の 12 段階の値が利用可能で，それぞれの年齢階層の中央値を年齢とした．ただし 17 歳以下と 65 歳以上の 2 つの階層のデータを利用していない．

*12 賃金構造基本統計調査報告の「産業別賃金指数（現金給与総額，年平均）」に収録されている「産業計」の時系列データを利用した．

*13 参考として，TOPIX の超過リターンのボラティリティと，個別銘柄の超過リターンのボラティリティのクロスセクションの平均値を比較したところ，前者に対する後者の比率の時系列平均は 2.307 倍であった．(1975 年 1 月から 2003 年 12 月までの月次データを利用．ボラティリティは過去 60 ヶ月のヒストリカルボラティリティを使用．個別銘柄は各時点の TOPIX 構成銘柄．)

株価のボラティリティσには，株価の月次超過リターンの標準偏差 17.90% を用いる．月次データを用いたのは，年次データよりも単にサンプル数が多いためである．ただし，株価の期待超過リターンμの推定のために，月次超過リターンの平均を求めたところ，90 年以降の株価低迷の結果として −0.01% と極めて低い値になった．この低い推定値をそのまま用いることは適当ではないだろう．米国のデータを利用した既存研究では，逆の問題に直面している．米国株式市場の過去の平均リターンは短期金利に比べて極端に高い*14．これを回避するために，Campbell and Viceira (2002) の 6 章，7 章では，株式の期待超過リターンに 4% を用いている．これを参考にして，株式の期待超過リターンに 4% を用いることにする．

最後に相対リスク回避度γを 5，年金額を定める加重ウェイトβを 0.05 として，このようにして定められた，表 1 のパラメータの組み合わせを標準ケースとする．

表 1　標準ケースのパラメータ値

株価の期待超過リターン λ	4.00%
株価のボラティリティ σ	17.90%
賃金上昇率と株価リターンの相関 ρ	0.302
賃金上昇率の確定部分	(25) 式
賃金のボラティリティ v	$2.61\% \times 2 = 5.22\%$
期間 T	40 年
加重ウェイト β	0.05
相対リスク回避度 γ	5

4.2　最適ポートフォリオの特徴

図 3 は，標準ケースのパラメータを用いた場合の平均的*15な株式への配分比率と勤続年数との関係を表す．水平な細線は，株式への最適投資比率のうちの平均分散基準の成分（(21) の第 1 項）を表しており，約 25% で勤続年数に関わらず一定である．一方で太線は株式への最適投資比率の全体を表し，勤続年数 0 時点で約 32% であるが，勤続年数とともに減少し，退職時点（$t = 40$）で平均分散基準の成分に一致する．太線と細線の差がヘッジ成分（(21) の第 2 項）で，勤続年数ともに減少する．

本稿のモデルでは投資機会が一定なので，資産のみを考えた場合に，Merton (1969, 1971) が示している通り，最適ポートフォリオは(21) の第 1 項の平均分散基準の成分のみからなるので，投資ホライズンには依存しない．しかし，負債を考慮した場合には，退職までの期間が長いほど年金額のうち将来の賃金によって定まる割合が多いので，より多くのヘッジ成分を保有する必要がある．このような結果は，加入員の年齢が若く成熟度の低い年金基金ほど，投資ホライズンが長いので，株式に多くを配分するべきであるとする通説*16を正当化する．Campbell and Viceira (1999) は，配当利回りから株式リターンを予測できるという事実が，株式が平均回帰的で，長期でみると低リスクであることを意味し，この通説を正当化できるとしている．本稿の設定では，株式の超過リターンが一定であっても同様の結論を得る．

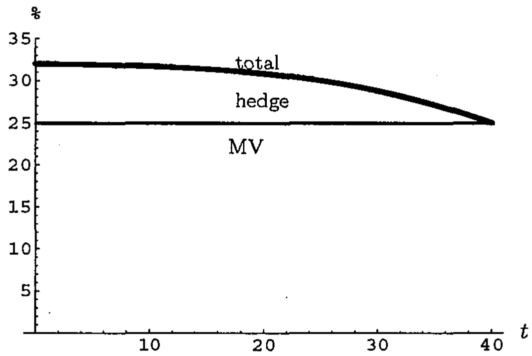
賃金上昇率と株価リターンの相関は，最適な株式投資比率のヘッジ成分に大きな影響を与える．図 3 に利用した相関は産業計の 0.302 であるが，この値は企業によって異なる．データは 10 業種分類別に利用可能であり，業種毎に相関を計算すると，相関が最大な業種では 0.480 で，最小の業種では 0.059 である．また，株価リターンに 1 年のラグをつけると，産業計の相関は 0.302 から 0.508 に増加する．図 4 はヘッジ成分として保

*14 資産価格の研究分野で，これは株式プレミアムパズル（Mehra and Prescott, 1985）として知られ，これまで多くの研究者がこの問題に取り組んでいるが，一致した説明にはいまだ至っていない．

*15 各時点の賃金過程の値が無条件平均に一致するものとして計算した．

*16 投資ホライズンが長いほど，株式への投資割合を多くするという考え方は，実務界における経験知である．

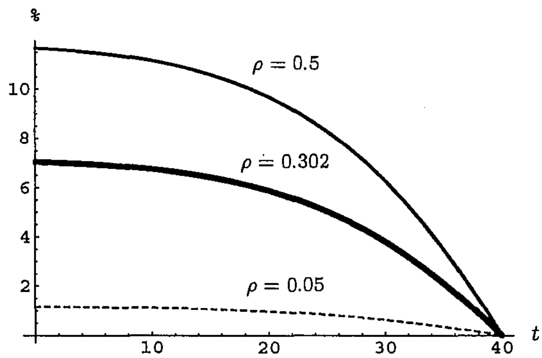
図 3　最適投資比率と勤続年数



標準ケースのパラメータを使用．横軸は勤続年数．太線（total）は株式への最適投資比率の全体，細線（MV）は平均分散基準の成分，total と MV の差（hedge）がヘッジ成分を表す．

有する株式投資比率を表したもので，標準ケースの 0.302 の他，相関が 0.5 と 0.05 のケースのものを示している．例えば，勤続年数 20 年（残存年数 20 年）で見た場合，標準ケースではヘッジ成分が 5.89% であるが，相関が 0.5 では 9.65% に大きく増加し，一方で相関が 0.05 では 0.98% に大きく減少する．ヘッジ成分は，賃金変動のヘッジのために株式に投資する成分を表すものであることから，相関の大きさは重要である．

図 4　相関 ρ とヘッジ成分の関係

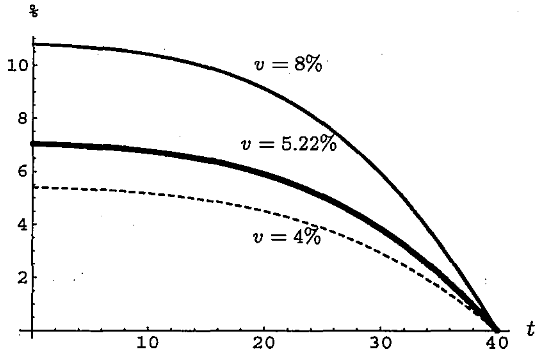


横軸は勤続年数．太線（total）は賃金の変動と株式の超過リターンの相関 ρ が 0.302（標準ケース），細線は 0.5，点線は 0.05 のヘッジ成分の投資比率を表す．他のパラメータは標準ケースを使用した．

同様に，賃金のボラティリティの違いもまた，ヘッジ成分に影響を与える．標準ケースでの賃金のボラティリティは，産業計の推定値を 2 倍した 5.22% であるが，業種によって違いが見られる．10 業種毎に計算すると，相関が最大な業種では 7.45% で，最小の業種では 4.27% である（同様にそれぞれ 2 倍した）．図 5 は賃金ボラティリティとヘッジ成分の関係を表す．賃金ボラティリティが大きいほど，ヘッジ成分は上昇する．賃金と株式の相関や，賃金のボラティリティといった，各企業によって異なる不均質性は，最適ポートフォリオに大きな影響を与えることがわかる．

リスク回避度は，平均分散基準の成分とヘッジ成分の双方に影響を与える．図 6 は勤続年数が 20 年目の最適な株式投資比率を表す．$\gamma = 1$ の場合，ベキ効用は対数効用になり，ヘッジ成分を保有しない．リスク回避度の増加とともに，平均分散基準の成分は減少し，ヘッジ成分は増加していく．株式投資比率の総成分に注目すると，$\gamma = 1$ の平均分散基準の成分のみを保有する場合の最適比率は 100% を超えているが，リスク回避度の増加とともにこの値は減少していく．これは，$\beta \to \infty$ のケース(24) をみると理解しやすい．実証にもとづ

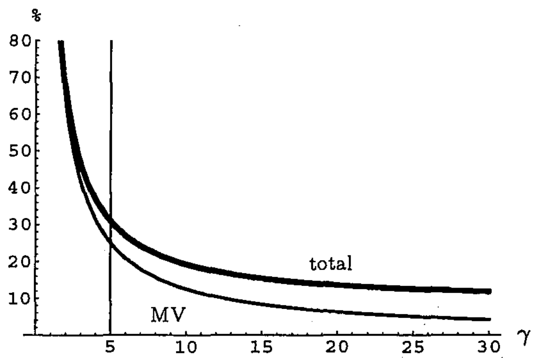
図 5　賃金ボラティリティ v とヘッジ成分の関係



横軸は勤続年数．太線は賃金のボラティリティが 5.22%（標準ケース），細線は 8%，点線は 4% のヘッジ成分の投資比率を表す．他のパラメータは標準ケースのパラメータを使用．

くパラメータにより，λ/σ^2 の方が $\rho v/\sigma$ よりも大きいためである．

図 6　リスク回避度 γ と最適投資比率の関係



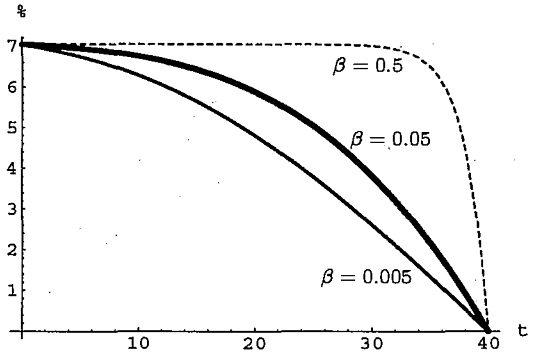
横軸はリスク回避度 γ．太線は最適な株式投資比率の全体，細線は平均分散基準の成分，両者の差はヘッジ成分を表す．垂直線は標準ケースである $\gamma = 5$ の線を表す．勤続年数 t は 20 年とし，他のパラメータは標準ケースのパラメータを使用．

年金制度の違いを定める β の値もまたヘッジ成分の大きさに影響を与える．図 7 はそれぞれの β に対するヘッジ成分を表す．β が十分大きい場合には，勤続 40 年目の最終賃金のみで年金が定まるため，ヘッジ成分は横ばいになる．β が小さくなるにつれて，退職給付金を定める賃金過程に対する加重ウェイトが水平に近くなっていき，勤続年数の早い時点でヘッジ成分はより減少する．β が小さいほど，年金額のうち将来の賃金によって定まる割合が少なくなり，すでに確定した過去の賃金によって定まる割合が多くなる．ヘッジ成分は将来の賃金変動に対するリスクヘッジの役割を持つので，β が小さいほど勤続年数の早い時点で，ヘッジに対する需要はより減少していく．

5　モデルの拡張：途中掛金を考慮する場合

本稿のモデルでは，年金スポンサーは年金資金の掛金を期初で拠出し，期中での掛金拠出をしないものと仮定した．これは Sundaresan and Zapatero (1997) と同様であるが，途中掛金の存在は最適ポートフォリオに大きな影響を与える可能性がある．ここではこの点について簡単に述べる．

図 7　β とヘッジ成分の関係



横軸は勤続年数．太線は β が 0.05（標準ケース），細線は 0.005，点線は 0.5 のヘッジ成分の投資比率を表す．他のパラメータは標準ケースを使用．

Viceira (2001) や Cocco, Gomes and Maenhout (2005) のようなライフサイクルを考慮した最適ポートフォリオ問題では，将来受け取る労働所得の存在が，最適ポートフォリオに対して，主に二つの影響を与える．第一に，将来の労働所得の現在価値の分だけ投資家の実質的な富は増加するので，退職時刻までの期間が長い投資家ほど，金融資産に占めるリスク資産の配分比率は増加する．第二に，最適ポートフォリオには，将来の労働所得の変動に対するヘッジ成分が追加される．

このような特徴は，本稿のモデルに掛金を考慮した場合でも成り立つはずである．まず第一の影響に関して，4.2 節で，勤続年数が短く退職までの期間が長いほど，株式への最適投資比率が大きいことを示したが，この特徴がさらに強まることが予想される．一方で，掛金が毎期に定額で拠出される場合には，第二の影響は存在しない．しかし，賃金の一定の割合で，毎期に掛金が拠出される場合には，第二の影響も存在するはずである．この場合，将来掛金の変動に対するヘッジ成分が追加され，賃金と株式の相関は正なので，逆にこのヘッジ成分は負になり，その負の大きさは退職までの期間が長いほど大きくなるであろう．このように，途中掛金を考慮した場合には，さらに複雑な結果を得ることが予想される．

6　結論

本稿では，完全にはヘッジできない確率的な負債が，確定給付年金の最適ポートフォリオにどのような影響をもたらすのかについて分析を行った．具体的には，Sundaresan and Zapatero (1997) のモデルを非完備市場に拡張し，最終時点の積立率に関する CRRA 型効用の期待効用最大化の枠組みにより近似的な最適ポートフォリオを求め，その特徴を考察した．本稿の結論は以下の通りである．

第一に，賃金過程の算術加重平均により支払額が定まる確定給付年金制度について，前提条件のもとで年金資産の最適ポートフォリオを近似的に導出した．Black (1989) の洞察の通り，最適ポートフォリオは，高いリターンを狙うための平均分散基準の成分と，将来の賃金変動による支払額の変動をヘッジする成分から構成される．リスク回避度が高い年金スポンサーほど，負債のヘッジ目的のための株式投資比率が増加し，逆にリスク回避度が低い年金スポンサーほど，超過リターンの獲得を目的にした株式投資比率が増加する．

第二に，実証データから推定されるパラメータを用いて，最適ポートフォリオの特徴を分析した．株価リターンと賃金変動は正の相関を持つので，将来の賃金変動に対するヘッジ成分は正である．投資ホライズンが長いほどヘッジ成分は大きいので，成熟度の低い年金基金ほど株式に多くを配分するべきであるとする通説は正当化される．年金を定める賃金過程に対する加重ウェイトの違いや，賃金のボラティリティ，賃金と株式の相関はヘッジ成分の大きさに影響を与える．各企業は，自らの年金制度や賃金変動の特徴を理解して，ポート

フォリオを構築する必要がある．

謝辞

本稿の作成にあたり，木島正明教授（京都大学）や匿名のレフェリーから多くの助言や貴重な指摘を頂戴した．記して謝意を表したい．もちろん，本稿における全ての誤りは筆者に帰する．

補論

A　命題 2 の証明

煩雑ではあるが，4 個の関係式はすべて直接計算することにより確かめることができる．

(11) 式

$$E_t[Z_T] = E_t\left[\frac{\beta}{e^{\beta T}-1}\int_0^T e^{\beta s}X_s\,ds\right] = \frac{e^{\beta t}-1}{e^{\beta T}-1}Z_t + \frac{\beta}{e^{\beta T}-1}\int_t^T e^{\beta s}E_t[X_s]\,ds$$
$$= \frac{e^{\beta t}-1}{e^{\beta T}-1}Z_t + \frac{\beta}{e^{\beta T}-1}X_t\int_t^T e^{\beta s+\int_t^s m(l)\,dl}\,ds = Z_tD(t,T)+X_tA(t,T)$$

一方で

$$E_t[\widehat{Z}_T^{t,X_t,Z_t}] = Z_te^{g_1(T,t,X_t,Z_t)} = Z_tD(t,T)+X_tA(t,T)$$

(12) 式　表記上の利便性から，以下を用意する．

$$Y_X(s) = \int_t^s m(l)\,dl - \frac{1}{2}v^2(s-t)+v(W_s-W_t)$$

これを用いて

$$E_t\left[Z_T^2\right] = E_t\left[\left(\frac{e^{\beta t}-1}{e^{\beta T}-1}Z_t + \frac{\beta}{e^{\beta T}-1}\int_t^T e^{\beta s}X_s\,ds\right)^2\right]$$
$$= \left(\frac{e^{\beta t}-1}{e^{\beta T}-1}\right)^2 Z_t^2 + \frac{2\beta(e^{\beta t}-1)}{(e^{\beta T}-1)^2}Z_t\int_t^T e^{\beta s}E_t[X_s]\,ds + \frac{\beta^2}{(e^{\beta T}-1)^2}E_t\left[\left(\int_t^T e^{\beta s}X_s\,ds\right)^2\right]$$
$$= \left(\frac{e^{\beta t}-1}{e^{\beta T}-1}\right)^2 Z_t^2 + \frac{2\beta(e^{\beta t}-1)}{(e^{\beta T}-1)^2}Z_tX_t\int_t^T e^{\beta s+\int_t^s m(\tau)\,d\tau}\,ds$$
$$+ 2X_t^2\int_t^T\int_t^u e^{\beta s+\beta u}E_t\left[e^{2Y_X(s)}\right]E_t\left[e^{Y_X(u)-Y_X(s)}\right]dsdu$$
$$= \left(\frac{e^{\beta t}-1}{e^{\beta T}-1}\right)^2 Z_t^2 + \frac{2\beta(e^{\beta t}-1)}{(e^{\beta T}-1)^2}Z_tX_t\int_t^T e^{\beta s+\int_t^s m(\tau)\,d\tau}\,ds$$
$$+ 2X_t^2\frac{\beta^2}{(e^{\beta T}-1)^2}\int_t^T\int_t^u e^{\beta s+\beta u+2\int_t^s m(\tau)\,d\tau+v^2(s-t)+\int_s^u m(\tau)\,d\tau}\,dsdu$$
$$= Z_t^2D(t,T)^2 + 2X_tZ_tA(t,T)D(t,T) + 2X_t^2C(t,T)$$

一方で

$$E_t\left[\left(\widehat{Z}_T^{t,X_t,Z_t}\right)^2\right] = Z_t^2e^{2g_1(T,t,X_t,Z_t)+g_2(T,t,X_t,Z_t)(T-t)}$$
$$= e^{g_2(T,t,X_t,Z_t)(T-t)}\left(Z_tD(t,T)+X_tA(t,T)\right)^2$$

(13) 式　表記上の利便性から，以下を用意する．

$$Y_S(s)=\mu(s-t)-\frac{1}{2}\sigma^2(s-t)+\sigma(B_s-B_t)$$

これと $Y_X(s)$ を用いて

$$\begin{aligned}E_t[Z_TS_T]&=E_t\left[\frac{\beta}{e^{\beta T}-1}\left(\int_0^T e^{\beta s}X_s\,ds\right)S_T\right]\\&=Z_tS_t\frac{e^{\beta t}-1}{e^{\beta T}-1}E_t\left[e^{Y_S(T)}\right]+\frac{\beta}{e^{\beta T}-1}X_tS_t\int_t^T e^{\beta s}E_t\left[e^{Y_X(s)+Y_S(T)}\right]ds\\&=Z_tS_t\frac{e^{\beta t}-1}{e^{\beta T}-1}e^{\mu(T-t)}+\frac{\beta}{e^{\beta T}-1}e^{\mu(T-t)}X_tS_t\int_t^T e^{\beta s+\int_t^s m(l)\,dl+\sigma\rho v(s-t)}\,ds\\&=S_te^{\mu(T-t)}\left(X_tB(t,T)+Z_tD(t,T)\right)\end{aligned}$$

となる．一方で

$$\begin{aligned}E_t\left[\widehat{Z}_T^{t,X_t,Z_t}S_T\right]&=Z_tS_te^{g_1(T,t,X_t,Z_t)+\mu(T-t)+\sigma g_3(T,t,X_t,Z_t)(T-t)}\\&=S_te^{\mu(T-t)+\sigma g_3(T,t,X_t,Z_t)(T-t)}\left(Z_tD(t,T)+X_tA(t,T)\right)\end{aligned}$$

(14) 式

$$\begin{aligned}E_t[Z_TX_T]&=E_t\left[\frac{\beta}{e^{\beta T}-1}\left(\int_0^T e^{\beta s}X_s\,ds\right)X_T\right]\\&=\frac{e^{\beta t}-1}{e^{\beta T}-1}Z_tX_tE_t\left[e^{Y_X(T)}\right]+\frac{\beta}{e^{\beta T}-1}X_t^2\int_t^T e^{\beta s}E_t\left[e^{Y_X(s)+Y_X(T)}\right]ds\\&=\frac{e^{\beta t}-1}{e^{\beta T}-1}e^{\int_t^T m(l)\,dl}Z_tX_t+\frac{\beta}{e^{\beta T}-1}e^{\int_t^T m(l)\,dl}X_t^2\int_t^T e^{\beta s+\int_t^s m(\tau)\,d\tau+v^2(s-t)}\,ds\\&=X_te^{\int_t^T m(l)\,dl}\left(Z_tD(t,T)+X_tG(t,T)\right)\end{aligned}$$

一方で，$E_t\left[(\widetilde{B}_s-\widetilde{B}_t)(\widehat{B}_s-\widehat{B}_t)\right]=g_4(s,t,X_t,Z_t)$ とおくと

$$\begin{aligned}E_t[\widehat{Z}_T^{t,X_t,Z_t}X_T]=Z_tX_t\exp\Bigg(&\int_t^T m(l)\,dl+g_1(T,t,X_t,Z_t)+\rho v g_3(T,t,X_t,Z_t)(T-t)\\&+\sqrt{1-\rho^2}v\sqrt{g_2(T,t,X_t,Z_t)-g_3(T,t,X_t,Z_t)^2}g_4(T,t,X_t,Z_t)\Bigg)\end{aligned}$$

である．$g_4(s,t,X_t,Z_t)$ は(9) で定義されたものなので，$E_t[Z_TX_T]=E_t[\widehat{Z}_T^{t,X_t,Z_t}X_T]$ が成り立つ．

■

B　命題 3 の証明

(1)　証明は Brennan and Xia (2002) の Theorem 1 に似ている．マルチンゲール法（双対法）によるポートフォリオの最適化の理論により，鞍点定理と $u\left(\cdot,\alpha\widehat{Z}_T^{t,x,z}\right)$ の狭義単調性から，問題(17) の解は，Lagrange 乗数 $y>0$ を含む制約条件なしの問題

$$\sup_{W_T\in\mathcal{A}}E_t\left[u\left(W_T,\alpha\widehat{Z}_T^{t,x,z}\right)-y\left(\pi_T^{t,\psi}W_T-w\right)\right]$$

の解で，補完的スラック性条件

$$E_t\left[\pi_T^{t,\psi}W_T^*\right]=w$$

を満足する．$\eta_{1,T}^{t,x,z}$ と $\eta_{2,T}^{t,x,z}$，$\xi_{1,T}^{(t)}$ と $\xi_{2,T}^{t,\psi}$ がそれぞれ条件付独立であること，および $E_t\left[\xi_{2,T}^{t,\psi}\right]=1$ に注意して，1階の条件から

$$W_T^*=\left(y\xi_{1,T}^{(t)}\right)^{-\frac{1}{\gamma}}\left(\eta_{1,T}^{t,x,z}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}(\alpha z)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}F_1(T,t,x,z)^{-1}$$

になる．ただし，$F_1(s,t,x,z):=\left(E_t\left[\left(\eta_{2,s}^{t,x,z}\right)^{\gamma-1}\right]\right)^{-\frac{1}{\gamma}}$ とおいた．これを補完的スラック性条件に代入すると，

$$y^{-\frac{1}{\gamma}}=wF_1(T,t,x,z)F_2(T,t,x,z)(\alpha z)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$$

を得る．これを戻すと(18)を得る．

(2)　(18)の W_T^* を問題(17)に代入すればよい．

(3)　(16)から得る．また，(22)式中の偏微分の形式は以下で与えられる．

$$\frac{\partial}{\partial x}g_1(s,t,x,z)=\frac{A(t,s)}{xA(t,s)+zD(t,s)}$$
$$\frac{\partial}{\partial x}g_2(s,t,x,z)=\frac{1}{s-t}\left[\frac{xzD(t,s)(4C(t,s)-2A^2(t,s))}{(xA(t,s)+zD(t,s))\,(2x^2C(t,s)+zD(t,s)\,(2xA(t,s)+zD(t,s)))}\right]$$
$$\frac{\partial}{\partial x}g_3(s,t,x,z)=\frac{1}{\sigma(s-t)}\left(\frac{B(t,s)}{xB(t,s)+zD(t,s)}-\frac{A(t,s)}{xA(t,s)+zD(t,s)}\right)$$
$$\frac{\partial}{\partial x}g_3(s,t,x,z)^2=\frac{2g_2(s,t,x,z)}{\sigma(s-t)}\left(\frac{zD(t,s)(B(t,s)-A(t,s))}{(xA(t,s)+zD(t,s))\,(xB(t,s)+zD(t,s))}\right)$$

■

C　命題4の証明

3.3節の議論で，$\widehat{Z}$ を X に置き換えて，(19)は

$$J(w,x,t):=E_t\left[\frac{1}{1-\gamma}\left(\frac{W_T^*}{\alpha X_T}\right)^{1-\gamma}\middle|W_t=w,X_t=x\right]=\frac{1}{1-\gamma}\left(\frac{w}{\alpha x}\right)^{1-\gamma}F_4(T,t)\tag{26}$$

に置き換わる．ただし，$F_4(s,t)$ は，(20)の F_3 において $g_1(s,t,x,z)$，$g_2(s,t,x,z)$，$g_3(s,t,x,z)$ をそれぞれ $\int_t^s m(l)\,dl$，v^2，ρv で置き換えたものである．$F_4(s,t)$ は単に時間の関数であり，もはや x や z の関数ではない．このときHJB方程式(7)は，

$$\sup_{\varphi\in\Phi}\mathcal{D}^{\varphi}J(w,x,t)=0\tag{27}$$

になる．ただし，境界条件は $J(w,x,T)=(w/(\alpha x))^{1-\gamma}/(1-\gamma)$ で，

$$\mathcal{D}^{\varphi}J(w,x,t)=J_t+(\varphi_t\lambda+r)wJ_w+m(t)xJ_x+\frac{1}{2}x^2v^2J_{xx}+\frac{1}{2}w^2\varphi_t^2\sigma^2J_{ww}+\rho xw\varphi_t\sigma vJ_{xw}$$

である．1階条件

$$\varphi_t^*=\left(\frac{-J_w}{wJ_{ww}}\right)\frac{\lambda}{\sigma^2}+\left(\frac{-J_{xw}}{wJ_{ww}}\right)\frac{\rho v}{\sigma}x$$

に(26)の価値関数を代入すると(24)を得る．

実際にこのように求めた解 φ^* が最適であることを確かめる．φ を適当な許容的投資比率とし，これに対応する富過程を W，積立率を $W_T/\alpha X_T$ とする．伊藤の補題から，

$$\begin{aligned}J(w,x,T)=&J(w,x,t)+\int_t^T\mathcal{D}^{\varphi}J(w,x,s)\,ds\\&+\int_t^T(J_wW_s\varphi_s\sigma+J_x\rho vX_s)\,dB_s+\int_t^T J_x\sqrt{1-\rho^2}vX_s\,d\widetilde{B}_s\end{aligned}$$

を得る．(27) から，$\mathcal{D}^{\varphi}J(w,x,t) \le 0$ である．さらに，確率積分の項のうち，$\int_t^T (J_w W_s \varphi_s \sigma)\, dB_s$ は局所マルチンゲールであるが，W が非負なので優マルチンゲールになり，他の項はマルチンゲールである．したがって，適当な φ に対して

$$E_t\left[\frac{1}{1-\gamma}\left(\frac{W_T}{\alpha X_T}\right)^{1-\gamma}\right] = E_t[J(w,x,T)] \le J(w,x,t)$$

となる．一方で，φ^* について，$\mathcal{D}^{\varphi^*}J(w,x,t)=0$，および $\int_t^T (J_w W_s \varphi^* \sigma)\, dB_s$ がマルチンゲールであることから，

$$E_t\left[\frac{1}{1-\gamma}\left(\frac{W_T^*}{\alpha X_T}\right)^{1-\gamma}\right] = J(w,x,t)$$

になる．■

D　リスクの市場価格 ψ を内生化する場合

本稿では，3.2 節で仮定した通り，取引可能な金融資産のリスクの市場価格が確定的であることと同様に，株式によりヘッジできない近似年金負債 $\widehat{Z}$ のショック $\widehat{B}$ に対するリスクの市場価格 ψ も外生的に与えられた確定的な変数として扱ってきた．しかし，市場で取引可能ではない不確実性に対するリスクの市場価格が確定的な変数であることは自明ではない．つまり，この変数が如何に確定的なものとして定まるのかについて，本稿ではその起源について何も語っていない．ここではこの仮定を弱めて ψ を内生的に扱い，投資家が最適化する際に ψ も同時に定める場合を考える．

ψ が確定的な変数ではない場合には，(17) の価値関数は ψ に依存することになる．すなわち，所与の ψ に対して，(17) の価値関数 $\widehat{V}^{(\psi)}(w,z,x,t)$ が定まる．He and Pearson (1991) や Karatzas, Lehoczky, Shreve and Xu (1991)，およびこれらに続くマルチンゲール法による非完備市場での最適化の理論から，問題(15) は以下の問題と同値である．

$$\inf_{\psi} \widehat{V}^{(\psi)}(w,z,x,t) \tag{28}$$

さらに，(28) の解を ψ^* とすると，$\widehat{V}^{(\psi^*)}(w,z,x,t)$ は問題(15) の価値関数 $\widehat{V}(w,z,x,t)$ に一致する．

問題(28) を直接扱うことは難しいので，この問題を新たな双対問題に変換することがしばしば行われる．このために $u(\cdot,z)$ の凸共役を

$$\tilde{u}(\zeta,\alpha z) := \sup_{w>0}\left[u(w,\alpha z) - \zeta w\right], \qquad \zeta > 0$$

とおく．このとき He and Pearson (1991) や Karatzas et al. (1991) などの結果から，問題(28) は，双対問題

$$\inf_{\psi} E_t\left[\tilde{u}\left(y\pi_T^{t,\psi}, \alpha \widehat{Z}_T^{t,x,z}\right)\right] \tag{29}$$

と同値である．ここで $y>0$ は予算制約 $E\left[\pi_T^{t,\psi^*} W_T\right] \le w$ に対する Lagrange 乗数を表す．

(29) の価値関数を $\widetilde{V}(y,z,x,t)$ として，

$$d\left(y\pi_s^{t,\psi}\right) = \left(y\pi_s^{t,\psi}\right)\left(-r\,ds - \frac{\lambda}{\sigma}\,dB_s - \psi_s\,d\widehat{B}_s\right)$$

および $y\pi_t^{t,\psi} = y$ に注意すると，$\widetilde{V}(y,z,x,t)$ は以下の HJB 方程式を満たす．

$$\inf_{\psi} \widetilde{V}_t + m(t)x\widetilde{V}_x + \frac{\beta e^{\beta t}}{e^{\beta t}-1}(x-z)\widetilde{V}_z - ry\widetilde{V}_y$$

$$+\frac{1}{2}x^2v^2\widetilde{V}_{xx}+\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda^2}{\sigma^2}+\psi_t^2\right)y^2\widetilde{V}_{yy}-\left(\rho vx\frac{\lambda}{\sigma}y+vx\psi_t y\sqrt{1-\rho^2}h(t,x,z)\right)\widetilde{V}_{xy}=0$$

ただし，$\widetilde{V}$ の添え字は偏微分を表し，境界条件は $\widetilde{V}(y,z,x,T)=\tilde{u}(y,\alpha z)$ である．また，$h(t,x,z)$ は以下で定義される．

$$h(t,x,z):=\frac{\partial}{\partial s}E_t\left[(\widetilde{B}_s-\widetilde{B}_t)(\widehat{B}_s-\widehat{B}_t)\right]\Big|_{s\downarrow t}=\frac{\partial}{\partial s}g_4(s,t,x,z)\Big|_{s\downarrow t}$$

すなわち $h(t,x,z)$ は時点 t における $\widetilde{B}$ と $\widehat{B}$ の瞬間的な相関である．1 階の条件から，以下の通りリスクの市場価格 ψ^* が定まる．

$$\psi_t^*=vx\sqrt{1-\rho^2}h(x,z,t)\frac{\widetilde{V}_{xy}(y,z,x,t)}{\widetilde{V}_{yy}(y,z,x,t)}$$

この ψ^* に対応する $\widehat{V}^{(\psi^*)}(w,z,x,t)$ が問題(15) の価値関数であり，この価値関数に付随するポートフォリオが最適である．しかしながら，このように ψ を確定的な変数として外生的に仮定しない場合には，ψ^* が未知の関数 $\widetilde{V}$ に依存するため，残念ながら最適ポートフォリオを明示的に計算することは難しい．

参考文献

[1] 木島正明 (1994),『派生証券の価格付け理論（ファイナンス工学入門 第 II 部)』, 日科技連出版社．

[2] Abel, A. (1990), "Asset Prices under Habit Formation and Catching Up with Joneses," *American Economic Review*, **80**, 38–42.

[3] Abel, A. (1999), "Risk Premia and Term Premia in General Equilibrium," *Journal of Monetary Economics*, **43**, 3-33.

[4] Basak, S. and A. Shapiro (2001), "Value-at-Risk-Based Risk Management: Optimal Policies and Asset Prices," *Review of Financial Studies*, **14**, 371–405.

[5] Basak, S., A. Shapiro, and L. Teplá (2003), "Risk Management with Benchmarking," Working Paper, LBS, NYU, INSEAD.

[6] Black, F. (1989), "Should You Use Stocks to Hedge Your Pension Liability?" *Financial Analysts Journal*, **45**(1), 10–12.

[7] Black, F. and A. Perold (1992), "Theory of Constant Proportion Portfolio Insurance," *Journal of Economic Dynamics and Control*, **16**, 403-426.

[8] Bodie, M., R. Merton, and W. Samuelson (1992), "Labor Supply Flexibility and Portfolio Choice in a Life Cycle Model," *Journal of Economic Dynamics and Control*, **16**, 427–449.

[9] Brennan, M. (1998), "The Role of Learning in Dynamic Portfolio Decisions," *European Finance Review*, **1**, 295–306.

[10] Brennan, M., E. Schwartz, and R. Lagnado (1997), "Strategic Asset Allocation," *Journal of Economic Dynamics and Control*, **21**, 1377–1403.

[11] Brennan, M. and Y. Xia (2002), "Dynamic Asset Allocation under Inflation," *Journal of Finance*, **57**, 1201–1238.

[12] Campbell, J. and J. Cochrane (1999), "By Force of Habit: A Consumption-Based Explanation of Aggregate Stock Market Behavior," *Journal of Political Economy*, **107**, 205–251.

[13] Campbell, J. and J. Cochrane (2000), "Explaining the Poor Performance of Consumption-based Asset Pricing Models," *Journal of Finance*, **55**, 2863–2878.

[14] Campbell, J. and L. Viceira (1999), "Consumption and Portfolio Decisions When Expected Returns are Time Varying," *Quarterly Journal of Economics*, **114**, 433–495.

[15] Campbell, J. and L. Viceira (2001), "Who Should Buy Long-Term Bonds?" *American Economic Review*, **91**, 99–127.

[16] Campbell, J. and L. Viceira (2002), *Strategic Asset Allocation*, Oxford University Press.（木島正明監訳，野村證券金融経済研究所訳『戦略的アセットアロケーション』，東洋経済新報社，2005 年）

[17] Cocco, J., F. Gomes, and P. Maenhout (2005), "Consumption and Portfolio Choice over the Life-Cycle," *Review of Financial Studies*, **18**, 535–567.

[18] Cox, J. and C.-F. Huang (1989), "Optimal Consumption and Portfolio Policies When Asset Follow a Diffusion Process," *Journal of Economic Theory*, **49**, 33–83.

[19] Davis, M. (2000), "Optimal Hedging with Basis Risk," Working Paper, Vienna University of Technology.

[20] Delbaen, F., P. Grandits, T. Rheinländer, D. Samperi, M. Schweizer, and C. Stricker (2002), "Exponential Hedging and Entoropic Penalties," *Mathematical Finance*, **12**, 99–123.

[21] Föllmer, H. and P. Leukert (1999), "Quantile Hedging," *Finance and Stochastics*, **3**, 251–273.

[22] Föllmer, H. and P. Leukert (2000), "Efficient Hedging: Cost versus Shortfall Risk," *Finance and Stochastics*, **4**, 117–146.

[23] Froot, K., D. Schartfstein, and J. Stein (1993), "Risk Management: Coordinating Corporate Investment and Financing Policies," *Journal of Finance*, **48**, 1629–1658.

[24] Grossman, S. and Z. Zhou (1996), "Equilibrium Analysis of Portfolio Insurance," *Journal of Finance*, **51**, 1379–1403.

[25] Henderson, V. (2002), "Valuation of Claims on Nontraded Assets Using Utility Maximization," *Mathematical Finance*, **12**, 351–373.

[26] He, H. and N. Pearson (1991), "Consumption and Portfolio Policies with Incomplete Markets and Short-sale Constraints: The Infinite Dimensional Case," *Journal of Economic Theory*, **54**, 259–304.

[27] Iwaki, H., M. Kijima, and T. Yoshida (1993), "Approximate Valuation of Average Option," *Annals of Operations Research*, **45**, 131–145.

[28] Karatzas, I., J. Lehoczky, and S. Shreve (1987), "Optimal Portfolio and Consumption Decisions for a 'Small Investor' on a Finite Horizon," *SIAM Journal on Control and Optimization*, **25**, 1557–1586.

[29] Karatzas, I., J. Lehoczky, S. Shreve, and G. Xu (1991), "Martingale and Duality Methods for Utility Maximization in an Incomplete Market," *SIAM Journal on Control and Optimization*, **29**, 702–730.

[30] Kim, T. and E. Omberg (1996), "Dynamic Nonmyopic Portfolio Behavior," *Review of Financial Studies*, **9**, 141–161.

[31] Levy, E. (1992), "Pricing Europian Average Rate Currency Options," *Journal of International Money and Finance*, 11, 474–491.

[32] Liu, H. (2002), "Optimal Portfolio Selection with Transaction Costs and Finite Horizons," *Review of Financial Studies*, **15**, 805–835.

[33] Liu, H. (2004), "Optimal Consumption and Investment with Transaction Costs and Multiple Risky Assets," *Journal of Finance*, **59**, 289–338.

[34] Liu, J. (2001), "Portfolio Choice in Stochastic Environments," Working Paper, UCLA.

[35] Liu, J., F. Longstaff, and J. Pan (2003), "Dynamic Asset Allocation with Event Risk," *Journal of Finance*, **58**, 231–259.

[36] Liu, J. and J. Pan (2003), "Dynamic Derivatives Strategies," *Journal of Financial Economics*, **69**,

401–430.

[37] Merton, R. (1969), "Lifetime Portfolio Selection under Uncertainty: The Continuous Time Case," *Review of Economics and Statistics*, **51**, 247–257.

[38] Merton, R. (1971), "Optimum Consumption and Portfolio Rules in a Continuous Time Model," *Journal of Economic Theory*, **3**, 373–413; Erratum **6** (1973): 213–214.

[39] Merton, R. (1973), "An Intertemporal Capital Asset Pricing Model," *Econometrica*, **41**, 867–888.

[40] Mehra, R. and E. Prescott (1985), "The Equity Premium: A Puzzle," *Journal of Monetary Economics*, **15**, 145–161.

[41] Modigliani, F. and M. Miller (1958), "The Cost of Capital, Corporation Finance, and the Theory of Investment," *American Economic Review*, **48**, 261–297.

[42] Shreve, S. and M. Soner (1994), "Optimal Investment and Consumption with Transaction Costs," *Annals of Applied Probability*, **4**, 609–692.

[43] Schroder, M. and C. Skiadas (1999), "Optimal Consumption and Portfolio Selection with Stochastic Differential Utility," *Journal of Economic Theory*, **89**, 68–126.

[44] Sørensen, C. (1999), "Dynamic Asset Allocation and Fixed Income Management," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, **34**, 513–531.

[45] Sundaresan, S. and F. Zapatero (1997), "Valuation, Optimal Asset Allocation and Retirement Incentives of Pension Plans," *Review of Financial Studies*, **10**, 631–660.

[46] Viceira, L. (2001), "Optimal Portfolio Choice for Long-Horizon Investors with Nontradable Labor Income," *Journal of Finance*, **56**, 433–470.

[47] Watcher, J. (2002), "Optimal Consumption and Portfolio Allocation under Mean-Reverting Returns: An Exact Solution for Complete Markets," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, **37**, 63–91.

[48] Xia, Y. (2001), "Learning about Predictability: The Effects of Parameter Uncertainty on Dynamic Asset Allocation," *Journal of Finance*, **56**, 205–246.