展望論文

共単調性による多変量保険リスクの評価

小暮 厚之

2004年11月22日投稿
2005年 2 月21日受理

概要

最近ヨーロッパのアクチュアリアル・サイエンスの研究者を中心に「共単調性」(comonotonicity) という新たなリスク管理の概念が提唱されている．共単調性とは，ポートフォリオにおける各個別リスクが同一方向へ変動するリスクを意味する．一見すると，共単調性は「強すぎる」概念であり，保険やファイナンスにおいては限定された役割しか果たさないように思われるかもしれない．しかし，共単調性の理論を用いると，従属性を明示的にモデル化することなく，個別リスクの総和に対する有用な「上限」と「下限」を求めることができる．共単調性は，その非現実的な装いにもかかわらず，多変量リスクを評価し，管理する有効な手段を与える．本稿では，Kaas et al [2000] や Dhaene et al [2002a, 2002b] らの論文に基づいて，共単調性の理論と応用について展望する．

キーワード： 多変量保険リスク，共単調性，共単調和，凸順序，アジアン・オプション

1 はじめに

保険ポートフォリオのように多変量のリスクを考えるとき，各個別リスクの周辺分布だけでなく，それらの間の従属関係を規定する必要がある．最も簡単でしばしば有効なアプローチは独立性を仮定することである．しかし，例えば，同一グループに対する保険契約のように何らかの共通リスク要因が存在するようなケースでは，独立性の仮定は実態から乖離しており，トータルなリスクを過小に評価してしまう恐れがある．

より現実的と思われるアプローチは個別リスク間の相関係数を計算することであろう．しかし，相関係数は線形的な従属性しか捕捉することができない．保険リスクで扱う損失分布や寿命分布の間に存在する非線形的な従属性を把握するためには，同時分布全体の知識が必要となってくる．

非線形的な従属性のモデリングの標準的手法は，コピュラを用いて各個別リスクの周辺分布を結びつけるアプローチである[*1]．最近では，コピュラは保険リスクのみならず，信用リスクのモデリングにおいても盛んに用いられるようになってきた[*2]．しかし，このコピュラ・アプローチには，いかなるコピュラ関数を選択すべきかという困難な問題が伴う．コピュラ関数を選択することは，結局のところ同時分布の推定を行うことに他ならない．しかし，同時分布の次元の増大とともに，有効な推定に必要とされるデータの大きさは加速度的に増していく[*3]．同時分布に関する事前情報やそれを推定すべきデータが十分でない場合，コピュラ関数の選択はアドホック

* 慶應義塾大学 総合政策学部 〒252-8520 神奈川県藤沢市遠藤 5322 mail: kogure@sfc.keio.ac.jp.

*1 保険数理への応用は，例えば Frees and Valdez (1998) を参照されたい

*2 CreditMetrics[1997] はその代表的な例である．また，2006 年度から適用が開始される新 BIS 規制においては信用リスクだけでなくオペレーショナル・リスクを含む統合的なリスク管理においても，コピュラに基づく「先進的手法」によるリスク計量化が提唱されている．

*3 統計学では，そのような事実を「次元の呪い」と呼ぶ．

にならざるをえないであろう．

本稿では，共単調性という新たな視点からの多変量保険リスク管理の理論を展望する．共単調性は，完全相関を一般化した概念である．実際の個別リスクが共単調関係にあるケースは少なく，そのような理論の有用性は極めて限定されるように思われるかもしれない．しかし，共単調性の理論を用いると，従属性を明示的にモデル化することなく，個別リスクの総和に対する有用な上限と下限を求めることができる．従属性に関する事前情報やそれを推測するデータに乏しい状況において，直面するリスクを管理し評価する有用な手段を与える．

以下，本稿では，2 節でリスク・プーリング（大数の法則）では対処できない従属性について注意し，3 節で共単調性の概念を導入する．4 節以降では，共単調性によっていかに非独立な確率変数の和のリスクを評価するかに関する基本的な考え方と手法を説明する．いくつかの重要な定理を与えるが，証明はスケッチ程度に留める．最後に，8 節において，共単調性の重要な応用であるアジアン・オプションの評価問題を取り上げる．

2　保険リスクと従属性

n 個の保険契約からなる保険ポートフォリオを考える．その第 i 番目の保険の満期時点における不確実な保険支払い額を $X_i\ (\geq 0)$ と表すとき，この保険ポートフォリオは n 変量ベクトル

$$\boldsymbol{X} \equiv \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & \cdots & X_n \end{pmatrix} \tag{1}$$

によって表される．この保険ポートフォリオの支払い総額は

$$S \equiv \sum_{i=1}^{n} X_i \tag{2}$$

である．しばしば $\{X_i\}$ は互いに独立に同一の分布に従うと仮定する．このとき，n を増加させることによって一契約当たりのリスク

$$\mathrm{Var}\left(\frac{S}{n}\right) = \frac{\mathrm{Var}(X)}{n}$$

はゼロに近づく．いわゆるリスク・プーリングによるリスク低減効果である．実際には，個別リスクは互いに独立ではないかも知れない．例えば損害保険であれば地震や台風のような自然災害リスク，生命保険であればインフレや金利のような経済リスクが保険ポートフォリオ全体に共通の影響を与えるかもしれない．そのような共通リスク・ファクターを Y とし，

$$X_i = Z_i Y \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{3}$$

となる場合を想定しよう．但し $\{Z_i\}$ は互いに独立な非負値確率変数であり，また Y に対しても独立に分布すると仮定する．この場合，X_i と X_j という 2 つの保険支払いの共分散は

$$\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = \mathrm{E}[Z_i]\mathrm{E}[Z_j]\mathrm{Var}(Y), \quad i \neq j$$

となり，正の相関関係が生じる．また分散は

$$\mathrm{Var}\,(X_i) = \mathrm{Var}(Z_i)\mathrm{E}[Y^2] + \mathrm{Var}(Y)\,(\mathrm{E}[Z_i])^2$$

と表せるから，共通ファクター Y が存在する場合の一契約当たりのリスクは

$$\mathrm{Var}\left(\frac{S}{n}\right) = \frac{1}{n}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}(Z_i)}{n}\right)\mathrm{E}[Y^2] + \left(\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mathrm{E}[Z_i]\mathrm{E}[Z_j]\right)\mathrm{Var}(Y)$$

と計算される．分かりやすいように，各 Z_i の平均と分散が等しい

$$\mathrm{E}[Z_i] = \mu, \quad \mathrm{Var}(Z_i) = \sigma^2, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

の場合を考えると

$$\mathrm{Var}\left(\frac{S}{n}\right) = \frac{\sigma^2}{n}\mathrm{E}[Y^2] + \mu^2\mathrm{Var}(Y)$$

となる．この式の右辺第 1 項はリスク・プーリングによって減少していく保険リスクを表す．第 2 項は Y に起因する非保険リスクを表す．保険契約数 n をいくら増やしても第 2 項の非保険リスクは低減しない．

以下では，共単調性によって，このような従属性のある非独立な確率変数の和で表現されるリスクを評価する基本的な考え方を説明する．特に断らない限り，各確率変数の分布はすべて連続型であり，その分布関数は厳密な意味で単調増加であると仮定する．この仮定により，多くの結果の導出が簡単となる．

3　共単調性

共単調性とは comonotonicity に充てた邦語である．それは文字通り共通の (common) 単調性 (monotonicity) であり，同一方向へ変動するリスクを意味する．別の言い方をすれば，それはリスク・プーリングによってヘッジできないリスクを表す．

3.1　共単調性とは何か

この節では $n=2$ のケースを取り上げ，共単調性とは何かを説明する．$i=1,2$ に対して，$F_{X_i}(\cdot)$ を X_i の分布関数，U_i を $[0,1]$ 上の一様分布に従う確率変数とするとき

$$X_1 \stackrel{d}{=} F_{X_1}^{-1}(U_1), \quad X_2 \stackrel{d}{=} F_{X_2}^{-1}(U_2)$$

と表せる．ここで，$\stackrel{d}{=}$ は分布の意味での等号を表す．もしも U_1 と U_2 が独立ならば，X_1 と X_2 も独立となる．対極的に，もしも $U_1=U_2$ ならば

$$X_2 \stackrel{d}{=} F_{X_2}^{-1}(F_{X_1}(X_1))$$

となる．F_{X_1} と $F_{X_2}^{-1}$ は単調増加であるから，X_2 と X_1 は一方が増加（減少）すれば他方も増加（減少）するいう単調関係になる．

最も分かりやすい例として，X_1 と X_2 が同時正規分布に従うケースを考える．X_i の周辺分布の平均を μ_i，分散を σ_i^2 とし，Φ を標準正規分布の分布関数とするとき，

$$F_{X_i}^{-1}(u)=\mu_i+\sigma_i\Phi^{-1}(u) \quad 0<u<1; \quad i=1,2$$

と表せるから

$$X_i \stackrel{d}{=} \mu_i+\sigma_i\Phi^{-1}(U_i), \quad i=1,2$$

となる．もしも $U_1=U_2$ ならば

$$\begin{aligned} S &= X_1+X_2 \\ &\stackrel{d}{=} \mu_1+\mu_2+(\sigma_1+\sigma_2)\Phi^{-1}(U_1) \\ &\sim N\left(\mu_1+\mu_2,\ (\sigma_1+\sigma_2)^2\right) \end{aligned}$$

となる．このケースは，相関係数が 1 であるから X_1 と X_2 は正の直線関係にあり，明らかに共単調関係のケースである．

より興味深い例として，X_1 と X_2 が対数正規分布に従う場合

$$\log X_1 \sim N(0,1), \quad \log X_2 \sim N(0,\sigma^2)$$

を取り上げる．このとき，Embrechts, McNeil and Straumann (2001) で証明されたように，$X_1 \stackrel{d}{=} F_{X_1}^{-1}(U)$ と $X_2 \stackrel{d}{=} F_{X_2}^{-1}(U)$ の相関係数は

$$\rho(F_{X_1}^{-1}(U),F_{X_2}^{-1}(U))=\frac{e^{\sigma}-1}{\sqrt{e^{\sigma^2}-1}\sqrt{e-1}}$$

となる．図 1 で示されているように．σ が大きくなるとき，この相関係数の値はゼロに近づく．

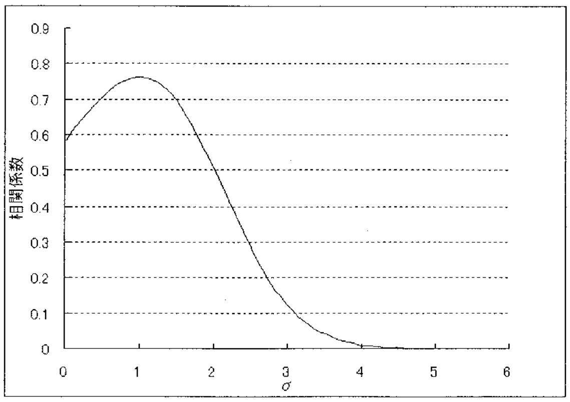

図 1：周辺分布が対数正規分布である共単調同時分布の相関係数

以下の 4 節で示す定理 2 から，一般に

$$\rho(X_1,X_2) \le \rho(F_{X_1}^{-1}(U),F_{X_1}^{-1}(U)) \qquad (4)$$

であることが証明できる．従って，特に X_1 と X_2 が独立である場合を考えれば，

$$\rho(F_{X_1}^{-1}(U),F_{X_1}^{-1}(U)) \ge 0$$

となる．すなわち共単調関係ならば常に相関係数は正である．しかし，上で見たように，周辺分布が対数正規分布の場合には，2 つの資産間の関係が非線形な共単調関係であれば，相関係数がゼロに近い値を取ることもありうる．

3.2　コピュラと共単調性

共単調性は，コピュラの特別な場合である．コピュラ関数とは，一般に 2 つの一様確率変数 U_1 と U_2 の同時分布関数

$$C(u_1,u_2) \equiv \Pr(U_1 \le u_1, U_2 \le u_2), \quad 0<u_1,u_2<1$$

のことをいう．コピュラ関数を用いると，X_1 と X_2 の同時分布関数は

$$F_{X_1,X_2}(x_1,x_2)=C(F_{X_1}(x_1),F_{X_2}(x_2))$$

と表せる．従って，周辺分布が所与ならば，同時分布はコピュラ関数によって完全に特定化できる．X_1 と X_2 が共単調の場合は，コピュラは

$$\begin{aligned} C(u_1,u_2) &= \Pr(U \le u_1, U \le u_2) \\ &= \Pr\left(U \le \min(u_1,u_2)\right)=\min(u_1,u_2) \end{aligned}$$

となる．

よく知られているように，いかなるコピュラ関数も

$$\max(u_1+u_2-1,0)\le C(u_1,u_2)\le \min(u_1,u_2)$$

という関係（Frechet-Hoffding の不等式）を満たす．コピュラ関数として共単調性を選択することは，$\{U_1\le u_1\}$ と $\{U_2\le u_2\}$ という 2 つのイベントが同時に起きる確率が最も大きくなる状況を想定していることになる．

3.3 共単調性の例

ここでは保険とファイナンスの分野で共単調性が成立する例をあげておく．

3.3.1 年金

x 歳の人 (x) に対する年金を考える．この年金の毎年の受取額を α 円とし，T を (x) の余命時間を表す確率変数とする．連続リスクフリーレートを δ，$I_{\{\cdot\}}$ を指示関数とすると，この年金の現在価値は

$$S\equiv\sum_{i=1}^{n}e^{-\delta\, i}I_{\{T>i\}}\alpha=\sum_{i=1}^{n}X_i$$

と表せる．但し，$X_i\equiv e^{-\delta\, i}I_{\{T>i\}}\alpha$ であり

$$n\equiv\lceil\omega-x\rceil-1$$

とする．ここで，ω は生命表の最終年齢であり，$\lceil\cdot\rceil$ は天井関数とする．このとき，$\{X_i\}$ は共単調関係にある．

3.3.2 オプション

危険資産（例えば配当支払いのない株式）の 1 年後の株価を A とする．任意の定数 d に対して，2 つの確率変数 X_1 と X_2 を

$$X_1\equiv(A-d)_+,\quad X_2\equiv(A-d)_-=(d-A)_+$$

と定義する．ここで，$(A-d)_+$ と $(A-d)_-$ はそれぞれ $A-d$ の正部分と負部分である．このとき，X_1 は危険資産に対する行使価格 d のコールオプションのペイオフ，X_2 は行使価格 d のプットオプションのペイオフを表す．原資産とコールオプションを同時に保有するポートフォリオ

$$\{A,\ X_1\}$$

は共単調である．また，原資産とコールオプション，プットオプションの売りのポートフォリオ

$$\{A,\ X_1,\ -X_2\}$$

も共単調である．

4 非独立な確率変数の和の評価

共単調性理論の有用性は，従属性をモデル化することなく，個別リスクの総和に対する「上限」と「下限」を求めることができる点にある．本節では，凸順序によるリスクの順序付けを説明し，共単調性の理論に基づいて，「上限」を導く．

4.1 凸順序

X を保険リスクを表す確率変数とするとき，任意の定数 d に対して

$$X-d=(X-d)_+-(X-d)_-=(X-d)_+-(d-X)_+$$

と表せる．$(X-d)_+$ は分布の上裾であり，その期待値

$$\mathrm{E}[(X-d)_+]=\int_d^{\infty}(1-F_X(x))\,dx$$

は X の上方リスクを表す．$(d-X)_+$ は分布の下裾であり，その期待値

$$\mathrm{E}[(d-X)_+]=\int_{-\infty}^{d}F_X(x)dx$$

は X の下方リスクを表す．[*4]

定義：凸順序

2 つのリスク X，Y は，任意の定数 d に対して

$$\mathrm{E}[(X-d)_+]\le \mathrm{E}[(Y-d)_+]$$

かつ

$$\mathrm{E}[(d-X)_+]\le \mathrm{E}[(d-Y)_+]$$

が成立するならば，「Y は X より凸順序の意味で大きい」といい

$$X\le_{cx}Y$$

と記す．

凸順序 $X\le_{cx}Y$ は

$$\mathrm{E}[X]=\mathrm{E}[Y]$$

かつ，任意の非減少な凹関数 u に対して

$$\mathrm{E}[u(-X)]\ge \mathrm{E}[u(-Y)]$$

*4 X を将来の保険支払金額とするとき，$(X-d)_+$ は d をリテンションとするストップロス再保険の支払額を表し，$\mathrm{E}[(X-d)_+]$ はその保険料，すなわちストップロス・プレミアムを表す．

が成立することと同値である．u は危険回避的な主体の効用関数を表すから，$X \leq_{cx} Y$ はすべての危険回避的な投資家が Y より X を好むことを意味する[*5]．

4.2　共単調和

(1) の形の n 変量のポートフォリオを考える．U を $[0,1]$ 上の一様分布とし，

$$X_i^c \equiv F_{X_i}^{-1}(U) \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

とおくとき，n 次元確率ベクトル $\boldsymbol{X}^c$ を

$$\boldsymbol{X}^c = \begin{pmatrix} X_1^c & X_2^c & \cdots & X_n^c \end{pmatrix} \tag{5}$$

と定義する．$\boldsymbol{X}^c$ のサポート D は，次の性質を満たす：

「$\boldsymbol{y} \equiv (y_1, y_2, \cdots, y_n)$，$\boldsymbol{z} \equiv (z_1, z_2, \cdots, z_n)$ を D に属する任意の 2 点とする．このとき，$y_i < z_i$ となる i が存在すれば，すべての $1 \leq j \leq n$ に対して $y_i \leq z_i$ が成立する．」

この性質が成立する集合を共単調集合という．一般に，ある確率ベクトルのサポートが共単調であれば，その確率ベクトルを共単調であると定義する．

共単調確率ベクトル $\boldsymbol{X}^c$ の和

$$S^c \equiv \sum_{i=1}^n X_i^c = \sum_{i=1}^n F_{X_i}^{-1}(U) \tag{6}$$

を (1) の共単調和 (comonotonic sum) という．S^c の確率分布は，個別リスク $\{X_i\}$ の周辺分布のみに依存する．

4.3　共単調和の裾確率

任意の定数 d に対して

$$d_i \equiv F_{X_i}^{-1}(F_{S^c}(d)) \tag{7}$$

と定義すると

$$\sum_{i=1}^n d_i = d$$

となる．また，点 $\{d_i\}$ は $\boldsymbol{X}^c$ のサポートに属することが証明できる．従って

$$\begin{aligned}(S^c - d)_+ &= \left(\sum_{i=1}^n X_i^c - d\right)_+ \\ &= \sum_{i=1}^n (X_i^c - d_i)_+\end{aligned}$$

が成立する．この両辺の期待値を取ると，次の定理を得る：

定理 1

共単調和 S^c の裾確率は

$$\mathrm{E}[(S^c - d)_+] = \sum_{i=1}^n \mathrm{E}\left[(X_i - d_i)_+\right] \tag{8}$$

と与えられる

この結果は，$\sum_{i=1}^n K_i = d$ となる任意の $\{K_i\}$ に対して成立する

$$\mathrm{E}[(S^c - d)_+] \leq \sum_{i=1}^n \mathrm{E}\left[(X_i - K_i)_+\right] \tag{9}$$

と比較すべきである．

4.4　S の上限

共単調和 S^c は凸順序の意味で S の上限である：

定理 2

$$S \leq_{cx} S^c$$

これを示すために，任意の d に対して，d_i を (7) のように定めると

$$S - d = \sum_{i=1}^n (X_i - d_i) \leq \sum_{i=1}^n (X_i - d_i)_+$$

となるから

$$(S-d)_+ \leq \left(\sum_{i=1}^n (X_i - d_i)_+\right)_+ = \sum_{i=1}^n (X_i - d_i)_+$$

が成立する．この式の両辺の期待値を取ると

$$\mathrm{E}[(S-d)_+] \leq \sum_{i=1}^n \mathrm{E}\left[(X_i - d_i)_+\right] = \mathrm{E}[(S^c - d)_+]$$

となり，定理 2 が得られる．

定理 2 は，個別リスク間の同時分布が不明であったり，仮に分かっていたとしても複雑な場合には，S の代わりに S^c の分布を考えることによって，S のリスクを上から抑えることができるということを意味する．

4.5　凸順序と分散

定理 2 から，

$$\mathrm{Var}(S) \leq \mathrm{Var}(S^c)$$

[*5] ファイナンスの用語では，$-X$ は $-Y$ に第 2 次確率的優越 (second-order stochastic dominance) と呼ぶ．

が示される．また

$$\begin{aligned}&\mathrm{Var}(S^c)-\mathrm{Var}(S)\\&=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}|\mathrm{E}[(S^c-t)_+]-\mathrm{E}[(S-t)_+]|\,dt\end{aligned}$$

が成立する [6]から，もしも $\mathrm{Var}(S^c)=\mathrm{Var}(S)$ ならば，任意の t に対して

$$\mathrm{E}[(S^c-t)_+]=\mathrm{E}[(S-t)_+]$$

となる．この式の両辺を t に関して微分すれば

$$F_{S^c}(t)=F_S(t),\quad -\infty<t<\infty$$

を得る．すなわち，分散が等しければ，S^c の分布は S の分布に一致する．

4.6 例：支払備金

将来時点 $\{1,2,\cdots,n\}$ において $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$ 円の支払義務が生ずるとしよう．期間 $[0,i]$ の割引ファクターを v_i とすれば，それらの現在価値は

$$S=\sum_{i=1}^{n}v_i\alpha_i$$

となる．S は，将来の損失に対する支払備金と解釈できる．ここで，α_i は正の定数であるが v_i は金利変動などと連動して変化する確率変数であるとする．このとき，S も確率変数となるが，そのリスクは共単調和によって抑えられる．いま

$$v_i\equiv e^{-(Y_1+Y_2+\cdots+Y_i)},\quad i=1,2,\cdots,n$$

と仮定する．ここで，例えば，$\{Y_i\}$ は互いに独立に同一分布 $N(\mu,\sigma^2)$ に従うものとする．このとき $X_i\equiv v_i\alpha_i$ は平均が $\mathrm{E}[X_i]=\alpha_i e^{i\left(-\mu+(1/2)\sigma^2\right)}$，分散が $\mathrm{Var}(X_i)=\alpha_i^2e^{2(\mu+(1/2)\sigma^2)}[e^{i\sigma^2}-1]$ の対数正規分布に従う．3.1 節と同様にして

$$\begin{aligned}F_{X_i}^{-1}(p)&=\alpha_i e^{-i\mu-\sigma\sqrt{i}\Phi^{-1}(1-p)}\\&=\alpha_i e^{-i\mu+\sigma\sqrt{i}\Phi^{-1}(p)}\end{aligned}$$

が示される．従って

$$S^c=\sum_{i=1}^{n}F_{X_i}^{-1}(U)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e^{-i\mu+\sigma\sqrt{i}\Phi^{-1}(U)}$$

となる．

[6] Dhaene, Denuit, Goovaerts, Kaas, Vyncke [2002a] の (9) 式を参照されたい

5 共単調和の確率分布

X_i の周辺分布からその和 S の分布を計算することは，仮に個別リスク X_i が独立であっても，必ずしも容易ではない．しかし，共単調和 S^c の分布は比較的簡単に導出できる：

5.1 逆分布関数

S^c の逆分布関数は以下のように与えられる：

定理 3

共単調和 S^c の逆分布関数は

$$F_{S^c}^{-1}(p)=\sum_{i=1}^{n}F_{X_i}^{-1}(p),\quad 0<p<1 \qquad (10)$$

と与えられる．

なぜならば

$$g(u)\equiv\sum_{i=1}^{n}F_{X_i}^{-1}(u)$$

という関数を考えると：

$$F_{S^c}(x)=\Pr(g(U)\le x)=\Pr(U\le g^{-1}(x))=g^{-1}(x)$$

であり，この逆写像を考えれば，(10) が得られるからである．

5.2 リスク測度

代表的なリスク尺度として，バリューアットリスク

$$\mathrm{Q}_p[X]\equiv F_X^{-1}(p)$$

とテイル・バリューアットリスク

$$\mathrm{TVaR}_p[X]\equiv\frac{1}{1-p}\int_p^1 Q_q[X]dq=\mathrm{E}[X|X>Q_p(X)]$$

を考えてみよう．定理 3 より明らかに

$$\mathrm{Q}_p[S^c]=\sum_{i=1}^{n}F_{X_i}^{-1}(p)=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Q}_p[X_i^c]=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Q}_p[X_i]$$

となる．同様に，

$$\mathrm{TVaR}_p[S^c]=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{TVaR}_p[X_i]$$

が成立する．Dhaene, Vanduffel, Tang, Goovaerts, Kaas, Vyncke [2003] は，この性質がより一般に distortion measure

$$\begin{aligned}\rho_g\equiv&-\int_{-\infty}^{0}\left(1-g\left(1-F_X(x)\right)\right)dx\\&+\int_0^{\infty}g\left(1-F_X(x)\right)dx\end{aligned}$$

に対して成立することを示している．ここで，$g(\cdot)$ は distortion function と呼ばれる，$g(0)=0,\quad g(1)=1$ となる $[0,1]$ 上で定義される非減少関数である．例えば，テイル・バリューアットリスク $\mathrm{TVaR}_p[X]$ の場合，

$$g(x)=\min\left(\frac{x}{1-p},1\right),\quad 0\le x\le 1$$

である．この場合のように，g が凸関数の場合には

$$\rho_g(S)\le\rho_g(S^c)$$

であることが示される．従って，

$$\mathrm{TVaR}_p[S]\le\sum_{i=1}^n\mathrm{TVaR}_p[X_i]$$

が成立する．

5.3 分布関数

定理 3 より，共単調和の分布関数 $F_{S^c}(x)$ は

$$\sum_{i=1}^n F_{X_i}^{-1}\left(F_{S^c}(x)\right)=x,\quad -\infty<x<\infty$$

によってインプリシットに与えられる．

例えば，各 X_i の周辺分布がワイブル分布

$$F_{X_i}(x)=1-\exp\left[-\left(\frac{x}{\phi_i}\right)^{\gamma_i}\right],\quad x\ge 0$$

と与えられる場合を考える．ここで，$\phi_i>0,\gamma_i>0$ はパラメータである．その逆分布関数は

$$F_{X_i}^{-1}(p)=\phi_i\left[\log\left(\frac{1}{1-p}\right)\right]^{1/\gamma_i}$$

と与えられる．従って，共単調和 S^c の逆分布関数は

$$F_{S^c}^{-1}(p)=\sum_{i=1}^n\phi_i\left[\log\left(\frac{1}{1-p}\right)\right]^{1/\gamma_i}$$

となる．もしも $\gamma_i=\gamma$ ならば

$$F_{S^c}^{-1}(p)=\left(\sum_{i=1}^n\phi_i\right)\left[\log\left(\frac{1}{1-p}\right)\right]^{1/\gamma}$$

となるから，S^c はパラメータが $\sum_{i=1}^n\phi_i$，γ のワイブル分布に従う．

6 上限の改善

個別リスクの周辺分布だけでなく，同時分布に関して追加的な知識が与えられれば，共単調和よりシャープな上限が導出可能である．

6.1 条件付け

ある確率変数 Λ に対して，$\Lambda=\lambda$ を所与としたときの各 X_i の条件付周辺分布 $F_{X_i|\lambda}(\cdot)$ が分かっていると仮定する．$\Lambda=\lambda$ を所与としたときの S の条件付き分布を表す確率変数を $S|\lambda$ とし，その共単調和を

$$\sum_{i=1}^n F_{X_i|\lambda}^{-1}(U)$$

と表す．ただし，$F_{X_i|\lambda}^{-1}(\cdot)$ は，$F_{X_i|\lambda}(\cdot)$ の逆関数であり，U は Λ と独立に分布する $[0,1]$ 上の一様確率変数とする．いま

$$S^u\equiv\sum_{i=1}^n F_{X_i|\Lambda}^{-1}(U)$$

と定義するとき，定理 2 から，任意の凸関数 v に対して

$$\mathrm{E}[v(S)|\Lambda=\lambda]\le\mathrm{E}[v(S^u)|\Lambda=\lambda]$$

が成立する．ここで，両辺の Λ に関する期待値を取ると，

$$\mathrm{E}[v(S)]\le\mathrm{E}[v(S^u)]$$

となる．明らかに，$\mathrm{E}[S]=\mathrm{E}[S^u]$ であるから，S^u は凸順序の意味で S の上限となる．すなわち

$$S\le_{cx}S^u$$

が成立する．さらに，

$$\begin{aligned}F_{X_i}(x)&=\mathrm{E}[\Pr(X_i\le x|\Lambda)]=\mathrm{E}[F_{X_i|\Lambda}^{-1}(U)\le x]\\&=\Pr\left(F_{X_i|\Lambda}^{-1}(U)\le x\right)\end{aligned}$$

より，$F_{X_i|\Lambda}^{-1}(U)$ の周辺分布は X_i の周辺分布に一致する．従って：

$$S^u\le_{cx}S^c$$

が成立する．以上の結果は次の定理にまとめられる：

定理 4

S^u は S の上限として S^c を改善する．

$$S\le_{cx}S^u\le_{cx}S^c$$

S^u の改善の程度を見るには，S 及び S^c の分散と比較すればよい．もしも Λ が S と独立ならば，$\mathrm{Var}(S^u)=\mathrm{Var}(S^c)$ となり改善はゼロである．逆に，Λ の条件付で S が共単調ならば

$$\mathrm{Var}(S|\Lambda=\lambda)=\mathrm{Var}(S^u|\Lambda=\lambda)$$

が成立するから

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(S) &= \mathrm{E}[\mathrm{Var}(S|\Lambda)] + \mathrm{Var}\left(\mathrm{E}[(S|\Lambda)]\right)\\ &= \mathrm{E}[\mathrm{Var}(S^u|\Lambda)] + \mathrm{Var}\left(\mathrm{E}[(S^u|\Lambda)]\right)\\ &= \mathrm{Var}(S^u)\end{aligned}$$

となり，最大限の改善が実現される．

6.2 例：正規分布と対数正規分布

簡単な例で S^u を説明する．

6.2.1 正規分布

Y_1 と Y_2 を互いに独立な標準正規確率変数とし，

$$X_1 = Y_1, \quad X_2 = Y_1 + Y_2$$

とする．このとき

$$S = X_1 + X_2$$

の分布を考える．

$$X_1^c = F_{X_1}^{-1}(U) \overset{d}{=} Z, \quad X_2^c = F_{X_2}^{-1}(U) \overset{d}{=} \sqrt{2}Z$$

と表せる．ここで，U は一様分布，Z は標準正規分布に従う．また，任意の定数 a に対して $\Lambda = Y_1 + aY_2$ とすると，(Y_1, Y_2, Λ) は 3 変量正規分布

$$\begin{pmatrix} Y_1\\ Y_2\\ \Lambda\end{pmatrix} \sim N_3\left[\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & a\\ 1 & a & 1+a^2\end{pmatrix}\right]$$

に従う．ここで，$N_m(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ は，平均ベクトルが $\boldsymbol{\mu}$，分散共分散行列が $\boldsymbol{\Sigma}$ の m 変量正規分布を表す．従って，Λ を条件付としたときの $X_1 = Y_1$ と $X_2 = Y_1 + Y_2$ の同時分布は

$$\left.\begin{pmatrix}X_1\\X_2\end{pmatrix}\right|\Lambda$$
$$\sim N_2\left[\frac{1}{1+a^2}\begin{pmatrix}1\\1+a\end{pmatrix}\Lambda,\ \frac{1}{1+a^2}\begin{pmatrix}a^2 & -a\\ -a & (1-a)^2\end{pmatrix}\right]$$

となる．このとき，

$$X_1^u = F_{X_1|\Lambda}^{-1}(U) \overset{d}{=} \frac{1}{1+a^2}\Lambda + \frac{|a|}{\sqrt{1+a^2}}Z$$

$$X_2^u = F_{X_2|\Lambda}^{-1}(U) \overset{d}{=} \frac{1+a}{1+a^2}\Lambda + \frac{|1-a|}{\sqrt{1+a^2}}Z$$

であり

$$\mathrm{Cov}(X_1^u, X_2^u) = \frac{1+a+|a(1-a)|}{1+a^2}$$

となる．従って，$a \leq 0$ または $a \geq 1$ のとき，S と S^u の分布は一致する．

6.2.2 対数正規分布

Y_1 と Y_2 を互いに独立に標準正規分布に従うリスクとするとき

$$X_1 = e^{Y_1}, \quad X_2\ e^{Y_1+Y_2}$$

として，$S = X_1 + X_2$ の分布を考える．このとき

$$X_1^c = F_{X_1}^{-1}(U) \overset{d}{=} e^Z, X_2^c = F_{X_2}^{-1}(U) \overset{d}{=} e^{\sqrt{2}Z}$$

と表せる．また，$\Lambda = X_1 + aX_2$ とすると，

$$X_1^u = F_{X_1|\Lambda}^{-1}(U) \overset{d}{=} \exp\left(\frac{1}{1+a^2}\Lambda + \frac{|a|}{\sqrt{1+a^2}}Z\right)$$

$$X_2^u = F_{X_2|\Lambda}^{-1}(U) \overset{d}{=} \exp\left(\frac{1+a}{1+a^2}\Lambda + \frac{|1-a|}{\sqrt{1+a^2}}Z\right)$$

が成立する．

6.3 例：支払備金

4.6 節の支払備金の例を再び考えよう．

$$\Lambda \equiv \sum_{i=1}^{n} \beta_i X_i$$

とすると，$\Lambda = \lambda$ を与えたときの $-\sum_{j=1}^{i} X_j$ の条件付分布は

$$\left.-\sum_{j=1}^{i} X_j\right|\Lambda = \lambda$$
$$\sim N\left(-\mu i - \rho_{(i)}\sigma\sqrt{i}\left(\frac{\lambda - \mathrm{E}[\Lambda]}{\sqrt{\mathrm{Var}(\Lambda)}}\right), (1-\rho_{(i)}^2)\sigma^2 i\right)$$

となる．ここで

$$\rho_{(i)} \equiv \frac{\mathrm{Cov}\left(\sum_{j=1}^{i} X_j, \Lambda\right)}{\sqrt{\mathrm{Var}\left(\sum_{j=1}^{i} X_j\right)\mathrm{Var}(\Lambda)}}$$

従って

$$F_{X_i|\Lambda=\lambda}^{-1}(p) = \alpha_i \exp\left\{-\mu i - \rho_{(i)}\sigma\sqrt{i}\left(\frac{\lambda - \mathrm{E}[\Lambda]}{\sqrt{\mathrm{Var}(\Lambda)}}\right)\right.$$
$$\left. + \sqrt{1-\rho_{(i)}^2}\sigma\sqrt{i}\Phi^{-1}(p)\right\}$$

が示される．ここで，V を U と独立に $[0,1]$ 上の一様分布に従う確率変数とすれば

$$\Phi^{-1}(V) \overset{d}{=} \frac{\lambda - \mathrm{E}[\Lambda]}{\sqrt{\mathrm{Var}(\Lambda)}}$$

となる．従って

$$F_{X_i|\Lambda}^{-1}(U) \overset{d}{=} \alpha_i \exp\left\{-\mu i - \rho_i\sigma\sqrt{i}\Phi^{-1}(V)\right.$$
$$\left. + \sqrt{1-\rho_{(i)}^2}\sigma\sqrt{i}\Phi^{-1}(U)\right\}$$

と表せる．

6.4 S^u の分布とストップロス

$\Lambda=\lambda$ の条件付で考えるとき，S^u は S の共単調和である．従って，その逆分布関数と分布関数は

$$F^{-1}_{S^u|\Lambda=\lambda}(p)=\sum_{i=1}^{n}F^{-1}_{X_i|\Lambda=\lambda}(p),\quad 0<p<1$$

$$\sum_{i=1}^{n}F^{-1}_{X_i|\Lambda=\lambda}\left(F_{S^u|\Lambda=\lambda}(x)\right)=x,\quad -\infty<x<\infty$$

により与えられる．この結果，Λ の周辺分布を $F_\Lambda(\lambda)$ とすると，S^u の分布関数は

$$\int_{-\infty}^{\infty}F_{S^u|\Lambda=\lambda}(x)dF_\Lambda(\lambda)$$

ストップロス・プレミアムは

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{E}\left[(S^u-d)_+|\Lambda=\lambda\right]dF_\Lambda(\lambda)$$

により計算できる．

7 非独立な確率変数の和の下限

リスク評価のためには，S の上限だけでなく下限を求める必要もある．この節では，凸順序の意味の下限を導出する．

7.1 条件付期待値

S に対して，その条件付期待値

$$S^l\equiv\mathrm{E}[S|\Lambda]=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}[X_i|\Lambda]$$

を考える．当然

$$\mathrm{E}\left[S^l\right]=\mathrm{E}[S],\quad \mathrm{Var}\left(S^l\right)\le\mathrm{Var}(S)$$

となる．ジェンセンの不等式を用いれば任意の凸関数 v に対して

$$v\left(S^l\right)=v(\mathrm{E}[S|\Lambda])\le\mathrm{E}[v(S)|\Lambda]$$

が成立する．ここで，Λ に関する両辺の期待値を取れば

$$\mathrm{E}[v\left(S^l\right)]\le\mathrm{E}[v(S)]$$

となる．以上の結果は次のように述べられる：

定理 5

S^l は凸順序の意味で S の下限である：

$$S^l\le_{cx}S$$

一般に

$$\mathrm{Var}(\mathrm{E}[X_i|\Lambda])\le\mathrm{Var}(X_i)$$

であるから，X_i^c とは異なり，$X_i^l\equiv\mathrm{E}[X_i|\Lambda]$ の周辺分布は X_i の周辺分布に一致しない点に注意されたい．

7.2 例：正規分布と対数正規分布

簡単な例で S^l を説明する．

7.2.1 正規分布

6.2.1 節の例を再び考える．このとき

$$X_1^l=\frac{1}{1+a^2}\Lambda,\quad X_2^l=\frac{1+a}{1+a^2}\Lambda$$

であったから

$$\mathrm{Var}(X_1^l)=\frac{1}{1+a^2},\quad \mathrm{Var}(X_2^l)=\frac{(1+a)^2}{1+a^2},$$
$$\mathrm{Cov}(X_1^l,X_2^l)=\frac{1+a}{1+a^2}.$$

となる．従って

$$\mathrm{Var}\left(S^l\right)=\frac{(2+a)^2}{1+a^2}.$$

と計算される．

7.2.2 対数正規分布

6.2.2 節の例を再び考える．このとき

$$X_1^l=\mathrm{E}[X_1|\Lambda]=\exp\left\{\frac{1}{1+a^2}\Lambda+\frac{1}{2(1+a^2)}\right\},$$

$$X_2^l=\mathrm{E}[X_2|\Lambda]=\exp\left\{\frac{1+a}{1+a^2}\Lambda+\frac{(1-a)^2}{(1+a^2)}\right\}.$$

となる．

7.3 例：支払備金

6.3 節の支払備金の例を再び考えよう．前と同様に

$$\Lambda=\sum_{i=1}^{n}\beta_iY_i$$

とすると，各 $i=1,2,\cdots,n$ に対して

$$\begin{aligned}X_i^l&=\mathrm{E}[X_i|\Lambda]\\&=\alpha_i\exp\Big\{-\mu i-\rho_i\sigma\sqrt{i}\Phi^{-1}(V)\\&\qquad+(1/2)(1-\rho_{(i)}^2)\sigma\sqrt{i}\Big\}\end{aligned}$$

が示される．従って

$$S^l=\sum_{i=1}^{n}X_i^l$$

は共単調和となり，4節-6節の結果が適用できる．例えば，S^l のストップロス・プレミアムは

$$\mathrm{E}[(S^l-d)_+]=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}\left[\left(X_i^l-F_{X_i^l}^{-1}(F_{S^l}(d))\right)_+\right]$$

と計算される．

8 アジアン・オプションの評価

この節では，これまでに述べたきた共単調性の理論を用いて，アジアン・オプションの解析的な評価を行う．通常のオプションが満期時点の原資産価格を対象とするのに対して，アジアン・オプションは，満期時点及びそれ以前の複数時点の原資産価格の算術平均値を対象とする．よく知られているように，原資産価格が幾何ブラウン運動に従う場合であっても，アジアン・オプションの無裁定価格の解析解は導出できない．以下では，共単調性の理論に基づいて，アジアン・オプションの無裁定価格の上限と下限を求める．

8.1 アジアン・オプション

ある危険資産（例えば配当支払いのない株式）を考える．この資産の時点 t 価格を $A(t)$ とする．現時点を 0 とするとき，満期時点 $T(>0)$ において

$$\begin{aligned}AC(T)&\equiv\left(\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}A(T-i)-K\right)_+\\&=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=0}^{n-1}X_i-d\right)_+\end{aligned}\tag{11}$$

を支払うオプションをアジアン・オプションという．ここで，$X_i\equiv A(T-i)$，$d\equiv nK$ とする．いま任意の $t\geq 0$ に対して

$$\mathrm{E}^Q[e^{-\delta t}A(t)]=A(0),\quad t\geq 0$$

となる確率測度 Q が一意に存在するものとする．ここで，δ は連続複利リスクフリーレートである．このとき，ペイオフが (11) であるアジアン・オプションの無裁定価格は

$$AC(0)=e^{-\delta T}\mathrm{E}^Q\left[AC(T)\right]\tag{12}$$

によって与えられる．しかし，その解析解を求めることは一般には不可能である．例えば，$A(t)$ が（ブラック＝ショールズ・モデルが前提とする）幾何ブラウン運動

$$dA(t)=\mu A(t)dt+\sigma A(t)dB(t)\tag{13}$$

に従う場合を考えよう．ここで，$B(t)$ は標準ブラウン運動とする．このとき，(12) を求めることは，対数正規分布に従う確率変数の和の期待値を取ることに帰着する．よく知られているように，対数正規分布に従う確率変数の和は，たとえ各確率変数が互いに独立であっても，解析的表現を得ることはできない．

8.2 上限

満期時点が $T-i$，行使価格が K_i の通常のコール価格の無裁定価格を

$$C(K_i,T-i)\equiv e^{-\delta(T-i)}\mathrm{E}^Q\left[(A(T-i)-K_i)_+\right]$$

と表すと，定理 1 及び定理 2 より，共単調による上限は

$$\frac{e^{-\delta T}}{n}\mathrm{E}^Q\left[(S^c-d)_+\right]=\sum_{i=0}^{n-1}w_iC(d_i,T-i)$$

と与えられる．ここで，$w_i\equiv e^{-\delta i}$ であり，d_i は (7) で与えられるものとする．このとき (9) より $\sum_{i=0}^{n-1}K_i=K$ となる任意の $\{K_i\}$ に対して

$$\sum_{i=0}^{n-1}w_iC(d_i,T-i)\leq\sum_{i=0}^{n-1}w_iC(K_i,T-i)\tag{14}$$

が成立する．

(14) の右辺は 0 時点で満期時点が $T-i$，行使価格が K_i の n 個のコールオプションを $e^{-\delta}/n$ 単位購入し時点 T まで保有するというスーペー・ヘッジ戦略[*7]のペイオフを表す．従って，(12) は，通常のコール・オプションの組み合わせによってアジアン・オプションのヘッジを行おうとする場合，共単調和による権利行使価格の選択 (7) が，最も低いコストを与えることを示している．

具体的な上限の値を求めるために，例えば，$A(t)$ が幾何ブラウン運動 (13) に従うとしよう．このとき，よく知られたブラック＝ショールズのオプション公式から共単調による上限は

$$\begin{aligned}&\frac{A(0)}{n}\sum_{i=0}^{n-1}e^{-\delta i}\Phi(\sigma\sqrt{T-i}-\Phi^{-1}(F_{S^c}(nK)))\\&-e^{-\delta T}K(1-F_{S^c}(nK))\end{aligned}\tag{15}$$

と計算される．

[*7] スーパー・ヘッジ戦略 (superhedging) は，満期時点のペイオフを既存の資産で完全には複製できない場合に，満期時点のペイオフを保証するような投資戦略のことである．その概説については，例えば，Baxter(1998) を参照されたい．

8.3 下限

$A(t)$ が幾何ブラウン運動 (13) に従うと仮定して，(12) の下限を求める．Q 測度の下で，S の分布は

$$S = A(0)\sum_{i=1}^{n-1} e^{(\delta-\sigma^2/2)(T-i)+\sigma B(T-i)}$$

と与えられる．Λ を

$$\Lambda \equiv \sum_{j=1}^{n-1} e^{(\delta-\sigma^2/2)(T-j)} B(T-j)$$

とすると

$$\begin{aligned} S^l &= \mathrm{E}^Q[S|\Lambda] \\ &= A(0)\sum_{i=0}^{n-1} e^{\left(\delta-(\sigma^2/2)r_{T-i}^2\right)(T-i)+\sigma r_{T-i}\sqrt{T-i}\Phi^{-1}(U)} \end{aligned}$$

と与えられる．このように，S_l も共単調和となるため，7 節の結果が適用可能となり，(12) の下限

$$\frac{A(0)}{n}\sum_{i=1}^{n-1} e^{-\delta i}\Phi\left[\sigma r_{T-i}\sqrt{T-i} - \Phi^{-1}(F_{S^l}(nK))\right] \\ -e^{-\delta T}K(1-F_{S^l}(nK)) \qquad (16)$$

が得られる．ただし，r_{T-i} は

$$r_{T-i} \equiv \frac{\mathrm{Cov}(B(T-i),\Lambda)}{\sqrt{\mathrm{Var}(\Lambda)(T-i)}}$$

であり，$F_{S_l}(nK)$ は

$$\sum_{i=1}^{n-1} F_{E[A_{T-i}|\Lambda]}(F_{S^l}(nK)) = nK$$

により与えられるものとする．

8.4 数値例

共単調和アプローチの具体的なパフォーマンスを見るために，Dhaene et al (2002b) からの数値例を掲げておく．表 1 は，$A(0)=100, T=60$ 日，$n=30$ 日，$e^\delta - 1 = 0.09, \sigma = 0.3$ としたときの，アジアン・オプションの上限 (15) と下限 (16) とモンテカルロ法によるシミュレーション結果との比較である．シミュレーションは 5000 本のサンプルパスに基づき，分散減少法が使われた．行使価格が 80 円と 100 円の場合には，モンテカルロ法による評価値は下限を下回っている．また，行使価格が 80 円と 90 円の場合には，上限と下限の区間幅は，モンテカルロ法の 95 パーセント信頼区間より短い．

表 1：アジアン・オプションの価格評価の比較

行使価格	下限	モンテカルロ法	上限
80	20.8122	20.8055	20.8268
		(0.0441)	
90	11.4929	11.5160	11.6017
		(0.0410)	
100	4.5063	4.4711	4.7221
		(0.0289)	
110	1.1516	1.1458	1.3134
		(0.0150)	
120	0.1915	0.1945	0.2503
		(0.0059)	

注意：() 内は標準偏差

9 終わりに

本論文では共単調性という多変量リスク評価のための新たな概念を概観した．ここで述べたような理論的発展を背景にして，様々な共単調性の応用研究が現在進行中のようである．例えば Dhaene et al [2004] においては伝統的なマーコビッツ流に代わるポートフォリオ最適化問題が扱われている．また，Albrecher [2004] では原資産価格が Levy 過程に従う場合のアジアンオプションの評価問題が述べられている．さらに，Deelstra, Liinev and Vanmaele[2004] では，バスケット・オプションへの応用が議論されている．現時点での応用はモデリング段階に止まっているが，今後は実証研究へと応用範囲も広がっていくであろう．既に標準ツールとなりつつ感のあるコピュラや EVT（極値理論）に加え，共単調性の考え方が保険やファイナンスのリスク管理の現場に登場する時も近いかもしれない．

謝辞

本稿の作成にあたり，査読者から貴重なコメントを頂きました．ここに感謝致します．

参考文献

Albrecher[2004]. "The valuation of asian options for market models of exponential Levy type", Technical Paper.

Baxter[1998]. "Hedging in financial markets", *Astin Bulletin*, Vol. 28, pp.5-16.

CreditMetrics [1997]. Technical Document. JP Morgan.

Deelstra, Liinev and Vanmaele[2004]. "Pricing of arithmetic basket options by conditioning, "*Insurance: Mathematics and Economics*, Vol.34, pp.55-77.

Dhaene, Denuit, Goovaerts, Kaas and Vyncke[2002a]. "The concept of comonotonicity in actuarial science and finance: Theory," *Insurance: Mathematics and Economics*, Vol.31, pp.3-33.

Dhaene, Denuit, Goovaerts, Kaas and Vyncke[2002b]. "The concept of comonotonicity in actuarial science and finance: Applications," *Insurance: Mathematics and Economics*, Vol.31, pp.133-161.

Dhaene, Vanduffel, Tang, Goovaerts, Kaas and Vyncke[2003]. "Solvency capital, risk measures and comonotonicity: a review", Technical Paper.

Embrechts, McNeil and Straumann[2001]. "Correlation and dependency in risk management: properties and pitfalls," in *Risk Management: Value at Risk and Beyond*, edited by Dempster and Moffatt, Cambridge University Press.

Frees and Valdez[1998]. "Understanding relationships using copulas, *North American Actuarial Journal*, Vol.2, pp.1-25.

Valuation of Multivariate Actuarial Risk by Comonotonicity: a Survey

Atsuyuki Kogure

Faculty of Policy Management, Keio University
5322 Endo, Fujisawa, Kanagawa, 252-8520

Abstract

In the recent literature, the concept of the "comonotonicity" has been advanced as a new device for the risk management mainly by European scholars.

The comonotonicity represents the co-movement among the individual risks of the portfolio toward the same direction. As such, the comononicity may sound too strong and seem to play a limited role in actuarial science or finance. However, using the concept of the comononicity, one can obtain useful upper and lower bounds for the sum of individual risks without modeling the dependence among the individual risks. In spite of its unrealistic appearance, the comonotonicity will provide an effective means of valuating the multivariate risk . The present paper surveys the theory and applications of the concept of the comonotonicity