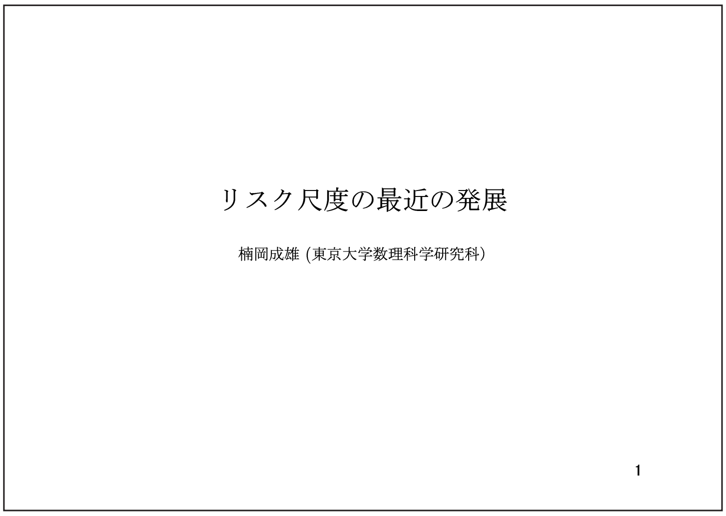
講演

リスク尺度の最近の発展

東京大学大学院数理科学研究科教授　楠岡　成雄

ＪＡＲＩＰ第６回大会　2008 年 9 月 27 日　こまばエミナース

【司会】本日の特別講演ということで、東京大学大学院数理科学研究科教授の楠岡先生からご講演を賜りたいと存じます。確率論およびその応用がご専門で、数理ファイナンスをはじめとして幅広く研究されております先生はJARIPの会員でもありますので、皆さんはよくご存じだと存じます。先生は 1978 年に東京大学の大学院の修士課程を修了されまして、同年、東京大学理学部助手となられました。それから 1993 年より東京大学大学院数理科学研究科教授となられております。本日はお忙しいところですが、「リスク尺度についての最近の発展」という大変興味深い話題を取り上げてお話をしていただけます。よろしくお願いいたします。



【楠岡】　ありがとうございます。楠岡でございます。本日のテーマは「リスク尺度の最近の発展」でございますが、実はあまり難しい話をするなといわれています。最近の発展を本当にしゃべると難しすぎるからやめてくれと言われている部分もありますので、考え方を大雑把にお伝えしたいと思います。最初、前半 40 分ぐらいは、ご存じのかたにはもうほとんど当たり前の話だという感じかもしれない内容を、お話しさせていただきます。

リスクの計量化
BASEL Ⅱ
不確実性に備えて必要な資本はいくらか？
生命保険：責任準備金
ファイナンスとアクチュアリーの融合　（１９９０年代後半～）

現在の基本的な考え方
１期間モデル：時刻　現在、将来の２つ　(金利ゼロとする)
将来における資産状況は不確実 ⇒ 確率変数 X
必要な資本 $\phi(X)$ リスク尺度
リスク尺度　確率変数 X に対して、実数 $\phi(X)$ を対応させるもの
Gerber, H., An Introduction to Mathematical Risk Theory, 1980

2

ここで問題なのは、先ほどの田中さんの最初の話もありましたけれども、リスクの計量化ということです。リスクの計量化をどうやるかということについては、現在、例えば金融機関ですと、BASELⅡというのが走っておりますけれども、そこではとにかく何かいろいろリスクを分類してちゃんと計量化せよと述べているわけですが、では一体どうすればリスクを計量化したことになるのかということについては、必ずしも明確に述べてないというより、実際問題としてはよく分からない。これだということが、わたしが聞いている限りでは、要するに政府当局も言えない。言って違っていたら自分の責任になるので、怖くて言えないという部分もあると思うのです。

基本的な考え方は単純で、不確実性[1]がある。リスクとはすなわち不確実性なわけですから、それにどれぐらい備えてどれぐらい資本を積んでおけばいいかということであります。これ自体の考え方は、昔から生命保険では責任準備金と言う考え方があるわけです。ただ生命保険の場合の責任準備金は若干違うのは、不確実というよりは大数の法則等で、確実に将来必要である資本を積んでおけというようなニュアンスがありますが、基本的には将来に向けて資本を積む、特に不確実性に備えて資本を積むという考え方がアクチュアリーのほうで古くからあった。ファイナンスというのは、元々はこのようなリスクを管理するという話だったのですが、ブラック・ショールズの理論が結構大成功してしまったために、動的ヘッジングというものでリスクを完全に消せると信じていた時代がしばらくあったわけです。

実際にやり始めるとどうもそう甘くはないということになってまいりまして、それでも、現代でもブラック・ショールズの考え方は、特に実務では用いられておりますけれども、一方において、どうしても消せないリスクというのは存在するということは、ファイナンスの、特に研究者の間では大体アイデアとして一般化している。そうすると、リスクの完全なヘッジというのがファイナンスの元々の考え方だったわけですけれども、残るリスクというのはどうしてもある。それをどう処理するのかということですが、実はそのようなことは当然で、元々アクチュアリーといいますか、生命保険の場合はリスクの完全ヘッジなどありえないわけですね。

ですから、元々そのようなアクチュアリーの考え方というものがあったので、例えば私自身、非常に印象的

[1] （編注）ここで用いている「不確実性」は、経済学においてナイト等が提唱している「生起確率そのものが不明である」という意味での「不確実性」ではなく、一般用語としての「不確実性」である。

なのは、もう10年以上前だと思いますが、ドイツのOberwolfachというところに研究所がございまして、年に１回ぐらいファイナンスの人たちが、割と世界中、アメリカとかヨーロッパから、日本からはわたしぐらいしか行っていなかったのですが集まって、研究集会を１週間続けてやるのですが、ある時期からファイナンス＆アクチュアリーというタイトルに変わってまいりました。実際にそこに参加してくるのは、Bühlmannとか、Embrechtsとかいう人たち、あるいはいわゆるアクチュアリー関係の人、それから統計の人たちというのが参加するようになって、それまでのファイナンスという感じとはちょっと様相が変わってまいりました。ですから当時すでに、1990年代後半ぐらいから、研究者のレベルではアクチュアリーとファイナンスというのは基本的にそのように突き詰めると理論的には大差ない、ただ実際に実務的になってくると全然違う部分があるのでしょうけれども、結局、考え方としては一つにならざるをえないという、そのような発想がございました。

今日お話しするのはリスク尺度ということなのですが、リスク尺度というものは実はどちらかと言うと、アクチュアリー的な立場から起こってきた考え方であります。リスクの計量化というのもどちらかというと、ファイナンスというよりは、アクチュアリー的な考え方ですから、ファイナンスとは矛盾する部分が若干あります。研究者のわたしなどもそうですが、リスク尺度をやったりヘッジの話をしたりしていて、同じ研究をしているわけですが、実は思想的にはかなり矛盾しておりまして、ただわれわれは論文書くのが商売ですから、別に矛盾していてもかまわないということなのでやっているわけで、実はその二つを融合するという研究は、最近かなり出てきていますが、なかなかうまくいっておりません。

余談ですが、最近になってアクチュアリーの講義を東大でもやってもらうようになりまして、いろいろな方が盛んに国際的な基準というような話をされて、聞いていますと要するにファイナンス的なリスクはファイナンス理論で制御して、アクチュアリー的なリスクは従来の考え方で制御するというのですけれども、実際にはごちゃ混ぜになったときにどう制御するのかというのは、そのように一言で言えるような単純な話ではございません。それからこの間、水曜日ですか、カナダのアラン・ブレンダーさんが来られて講演されたのを聞いていると、彼など、もう市場価格などどうせいい加減だから、ファイナンスではなく徹底的にアクチュアリー的な考え方で全部リスク管理すべきだというような感じのことおっしゃっておられました。

ただし、それはそう簡単ではありません。というのはアクチュアリー的と申しましても、要するにマーケットのリスクが入ってきますとちょっと厄介な問題がありますので、そのように単純には考えにくいところもございます。とにかく今日の話はちょっと数学的な側面についてお話しさせていただきますので、皆さんのご期待に添えるかどうか分かりませんが、リスクの計量化ということについて、まず基本的にはどのような考え方で現在研究が進んできたかというお話をさせていただきます。

まず最初に、問題をあまり最初から難しくするとややこしいので、１期間モデル、これでも十分ややこしいのですが、そこからお話をさせていただきます。１期間モデルというのは要するに現在と将来という二つしか時点がないと考えます。そしてもちろん不確実性ということですから、将来、すなわち１期間たった後にですね、何かキャッシュ・フローが発生する、収益が発生する、ただし損も発生するかもしれない。そのような状態において、その資産状況は不確実ですから、それを確率変数Xと置こうと、Xというのは何であるかは問わなくて、とにかくXと書いたとします。それからもう一つ、実はこの場合、債券とかそのようなもので運用

するというようなことが出てきますので、本来は金利というものを勘案しなければいけませんが、金利を入れるということはちょっとファイナンス的な要素が絡みますので、金利は0とします。将来の資産状況が X であるときに、その X に対して、必要な資金を $\phi(X)$ と与えましょう。その X という確率変数に対して $\phi(X)$ というある数値を対応させるものをリスク尺度という。それだけのことです。そのようなものを考えるということです。

このようにものを考えていくということは、歴史的にはもちろん、例えばマーコビッツとか、非常に古くは分散とかでリスクを計ろうとかいろいろあったわけですが、マーコビッツ流の考え方はあまりにもナイーブすぎるので、もっと複雑なものが必要だろう。それに似た考え方、責任準備金というよりは保険料の計算かもしれませんが、Gerber さん、これもアクチュアリーで有名な方ですが、その方が 1980 年の本の中で、そのようなアイデアを述べています。わたしは文献はちゃんと調べきれていませんけれども、やはり、そのような考え方を最初に言い出した人たちは、どちらかというとアクチュアリーの人たちという感じであります。ですから、そのような考え方で進めていく。それから Gerber さんの議論は少し何と言うのですか、まだまだナイーブすぎるということで、現在ではもう少し複雑なものの考え方をしている。

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$：確率空間
Ω：基礎空間、「全事象の空間」 $\longleftarrow$ 起こりうるシナリオ全体

確率測度 P とは何か？

生命保険：　死亡率　客観性がありそう

ファイナンス：　証券の市場価格　確率に客観性があるか？

過去の経験から未来の不確実性について定量的に語ることができるか？
証券価格に対する見方・考え方により決まる

実務的には　どのようなモデルをたてるか
(この点は本日は論じない)

3

それでまず、わたしは数学者なので確率論をやるときはまず呪文のようにΩ、$\mathcal{F}$、Pということで。ただ、これはちょっと意味があります。と申しますのは、数学の理論というのは何か、裏に確率空間というのが隠れているよと。ではこの場合確率空間Ωとは何であるかということなのですが、これは恐らくですね、ファイナンスの議論の、あるいはアクチュアリーでも全部そうですが、起こりうるシナリオ全体。これはものすごい数に及ぶのだろうと思いますが、要するに、例えば生命保険だとだれそれさんが何月何日にお亡くなりになったということまでも含めてシナリオ全体ということになります。それからもちろん株価がどう変動したとか、どこか会社つぶれましたということも、全部含めて起こりうるシナリオ全体ということです。ですから、そのようなことでちょっとΩというのは気軽には使えない。

次に、確率測度というのは起こりうるシナリオ一本一本に確率を与えるということであります。けれども、ここに実は本当の最大の問題があります。というのは、例えば生命保険の場合にはAさんがお亡くなりになった、Bさんがお亡くなりになったといっても同じような契約であれば、Aさんという人はすごく親しかったと

いう、そのようなこととあまり関係なく、いくら支払う。そうすると結局Ａさんがどうなる、Ｂさんがどうなるというよりも、集団としてどれぐらいの人数の方がお亡くなりになるかとかそのような話になってきます。そのような場合、死亡率は.... 歴史的に研究がされ尽くしているというとちょっと言い過ぎですが.... 研究されていますから、死亡率は非常に安定性を持っているとか、そのようなことがいえることは必要です。死亡率は、流行の病気とか発生して突然何か変わってしまうということはあるかもしれないが、基本的には客観性がかなりありそうだ。ですから、その場合に確率測度というものを考えるときには、死亡率などについて言えばそれほど問題にはならない。

ところがファイナンスの場合に、証券の市場価格、例えばそのようなものについて、確率というものは客観的に存在しうるかということになります。ここら辺が実はファイナンスと経済学があちらこちら全部よくわからないところで、実はこのようなことまで立ち返るとそれだけで何時間でも議論できて、今日はあまりする気はないのですけれども、経済学的にはあまり確率については客観性を与えるというようなことは考えておりません。むしろ主観的な確率、そうすると必然的にこのＰというのは人によって違うというような考え方になって.... ファイナンスの場合はどのようなわけか知らないですけれども physical とかいう訳の分からない言葉を入れてあたかも客観性があるような言い方をしておりますが... その辺がまたよく分からないわけです。けれども、死亡率と違って、例えば証券の市場価格などの場合に、過去 10 年こう動いていたとして、それから次の 10 年を本当に予測できるのかというようなことを考えたときに、ここら辺にまだ研究が十分進んでない部分がありますので、本当に市場価格を確実に客観性を持って抑えることができるかということが問題です。

実はファイナンスで、ブラック・ショールズの理論が成功した理由と言うのはこのＰを離れることができる、要するにＰが何であっても価格は同じという点です。いろいろな計算をするときには、大雑把と言ってしまうと、同値マルチンゲール測度、しばしばリスク中立確率という言葉で呼ばれますが、そのようなものを使って期待値を取ればいい。そうすると、Ｐは何であっても、計算するのはQでやればいいから、結局あたかも客観性があるように見えるというのがファイナンスの一つのポイントであります。しかしながら、先ほどから申し上げているように、それは完全ヘッジということがあればそうなのですが、でなければやはりこのＰというのは問題にならざるをえない。ちょっと時間を費やして申し訳ありませんが、ここのところがかなり重要なポイントで、これからの話はこのようなこと一切忘れてやりますということなので、あとになって何かあなたの話は現実的ではないといわれても、しょうがないというところがあるのです。

ですから結局、最大の問題というのは、ファイナンスの場合、過去の経験から未来の不確実性について計量的に語ることができるかという最大のポイントがあります。けれどもこれは語れと言われているので、語らざるをえないわけですね。ですから、実際にはこれをどうやって測るかというときにモデルを立てるわけですね。結局、モデルの中に実は世界観のようなものが、宇宙観と言ったらちょっと大げさですが入っているわけです。そのモデルを間違えたらこれは要するに世の中とあわなくなる。何と言いますか、わたしも余計な話をするとつい思い出すのですが、昔ある物理の先生から聞いたのですけれども、東大のあるものすごく優秀な先生が突然、重力定数がマイナスだったらどうなるだろうかと言って反重力装置を作るということを研究して、一生費やしてしまった人がいるらしいのです。その話をしてくれた人によると、「それはやはり重力定数がマイナスに

なるはずがないのだから彼は根本が間違っている、けれども何となく反重力装置ができると思い始めた」という話をしておられましたが、そこら辺になってくるとちょっと極端ですけれども、それに近いことが実際、リーマン・ブラザーズの話では起こっているとしかいいようがない。要するに、後から聞いてびっくりするようなモデルが平然と用いられている。

特に非常に難しい問題は、過去の経験から不確実な未来を定量的に語ることができるかという点です。過去の経験と言うときに、実はわたし、リーマン・ブラザーズのリスク管理で何をやっていたかを調査したのですが.... 割と頑張ってやっているなと思っていたのだがいきなりつぶれたのでびっくりしましたけれども....そのとき結局、例えばリーマン・ブラザーズなどは、過去と言ったときに過去４年間ぐらいしか見ていない。どうしてかというと、100 年前のデータは役に立たないからでしょう。けれども、モデルの中には 100 年間の経験が入っていないといけない。要するにそこら辺が非常にアドホックにモデルを立ててしまったということなのです。先ほどちょっとモデルリスクという話を田中さんがされていましたが、全くモデルが間違っているときは、そのようなのはモデルリスクとは言わないのですね。要するに根本的に間違っているので、もはやそれは計量化できるような話ではもちろんなくて、モデルのパラメーターが少々間違っていたとかいうのはモデルリスクかもしれませんが、要するに反重力装置のような話になってきたら、それはもうモデルリスクとは言わないということです。

これは本当は重要なポイントなのですが議論がまちまちなのでお話しましたが、もうこの話はこれ以上いたしません。それからもう一つはリーマン・ブラザーズといいますか、今回の金融機関でめちゃくちゃなモデルを使ったということはありますが、一方において実務的にはそのようなモデルしか使えなかったという実態もありますので、あまりここで、どうすればいいかというのは、これは今後のかなり大きな課題ですが、お話しいたしません。

ここから話は、いろいろなもろもろの話はありますが、確率、すなわちシナリオ全体をわれわれ知っていて、その中に確率というのは与えられている、その上で、どのようにものを考えていくかということを議論していきたいということでございます。ですから、時々人知を超えたといいますか、ちょっと、全然考えてなかったことが起こるということがしばしばあって、そうすると、そもそもこの枠組みそのものが、確率論そのものがちょっとおかしいのではないかということに、要するにあらかじめすべてのシナリオを知っていることということ自体がおかしいのではないかという話になりますが、そこはもう議論いたしません。

今日の話題

１．リスク尺度の例と公理的特徴付け
特に Coherent なリスク尺度

２．多期間リスク尺度

３．リスク尺度とヘッジング

4

それで、以下は数学的なお話に入りたいと思うのですが、本日お話しさせていただくことは、ちょっとスライドに示しましたが、リスク尺度の例と公理的特徴付けという、このようなお話をさせていただきます。特に Coherent なリスク尺度というもの、それから多期間リスク尺度、それからリスク尺度とヘッジングと、この三つの内容についてお話をします。そのように、どうしてもだんだん分かりにくくなりますが、なるだけ一般的な定理というより、実際どのようなことが行われているかが分かるような形でお話を進めていきたい。

リスク尺度の例　Value at Risk (VaR)
Conditional Tail Expectation (CTE)

確率変数 X
X の確率法則・確率分布
X の（確率）分布関数 F_X

$$F(x) = F_X(x) = P(X \leqq x), \qquad -\infty < x < \infty$$

F は $(-\infty, \infty)$ から $[0,1]$ への単調非減少関数

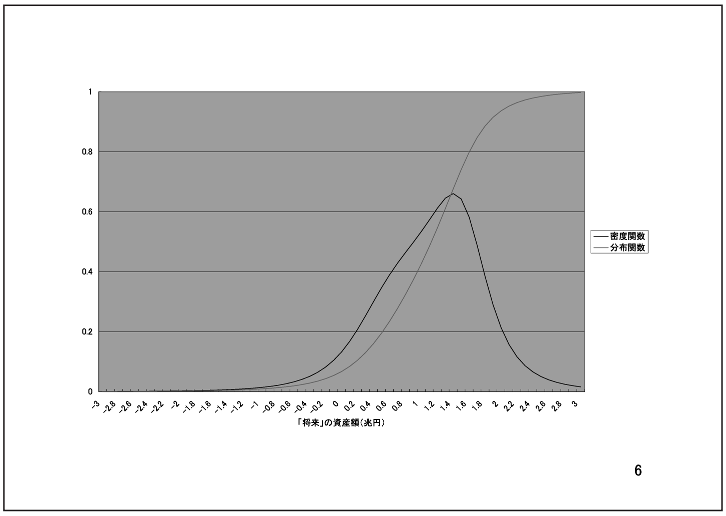
$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0, \qquad \lim_{x\to\infty} F(x) = 1$$

F は右連続

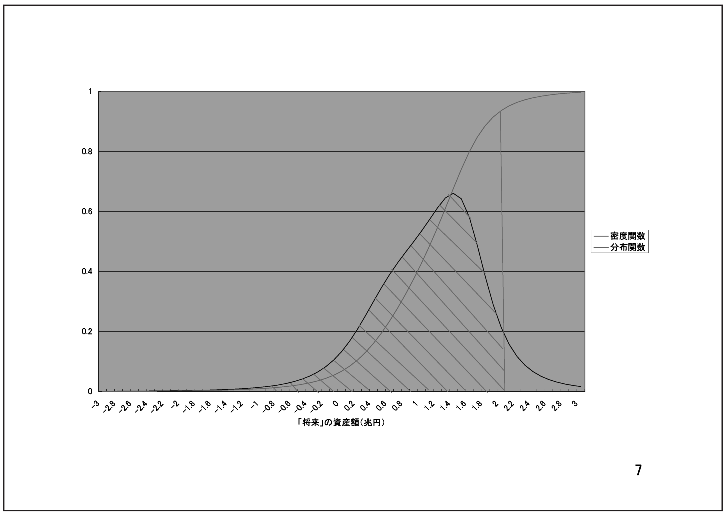
5

まずリスク尺度ですけれども、リスク尺度について、今日実務的に多く用いられているのは、まず Value at Risk というものです。その次に CTE、あるいは CVaR とかいろいろな名前こちらにございますが、そのようなものです。ご存じだと思いますが、どのようなものであったかということを、ちゃんとご説明させていただきます。まず、その確率変数 X というのがある。確率変数ですから、それに対して確率法則、あるいは確率分布というのがございます。その確率法則とか確率分布を表わす一つの方法として、普通は測度とかいうのを使うのですが、測度というのはちょっと分かりにくいので、今日はすべて分布関数の言葉でお話をいたします。そうすると確率変数 X の分布関数とは何かというと、それは１変数の関数 $F_X(x)$ であります。これは、確率変数 X が x 以下である確率を表しています。そうするとこれは当たり前ですが、x を増やしていけば当然この部分は増えていきますから、単調非減少関数であって、値は確率ですから当然０と１の間になります。それか

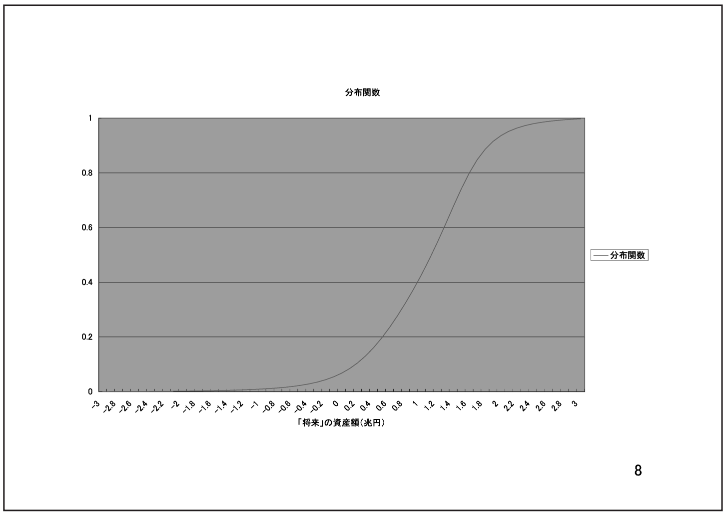
らもう一つはxを$-\infty$に近づけると当然これはなくなってしまいますから０。今度はxを∞に近づければこれは全体になりますから１、そのような性質を持ちます。さらに右連続性というものを持っています、どうでもいいことですが。逆にこのような性質を持つものに対して、Ωがあまり変な空間でなければ、必ず逆にそのような分布関数を持つ確率変数を見つけることができるということになります。



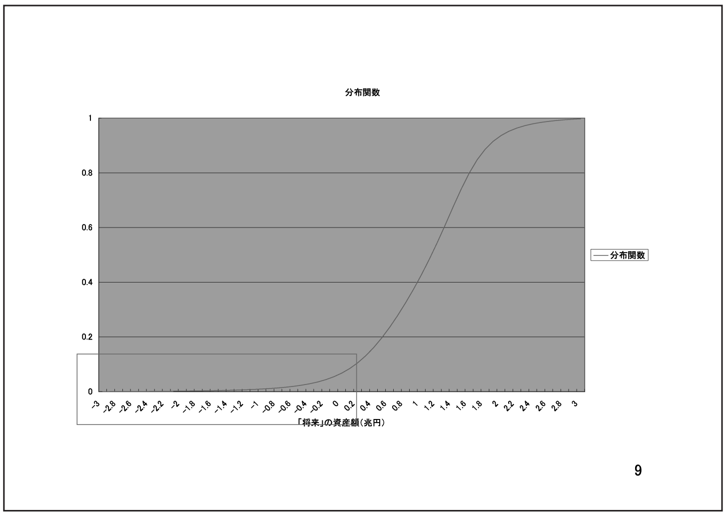
これでちょっとご説明しますと、これ（スライド６の濃い線）は密度関数を書いたつもりですが、これが密度関数だと、そうすると、それに対応する確率分布関数というのは大体このような形（スライド６の薄い線）になります。



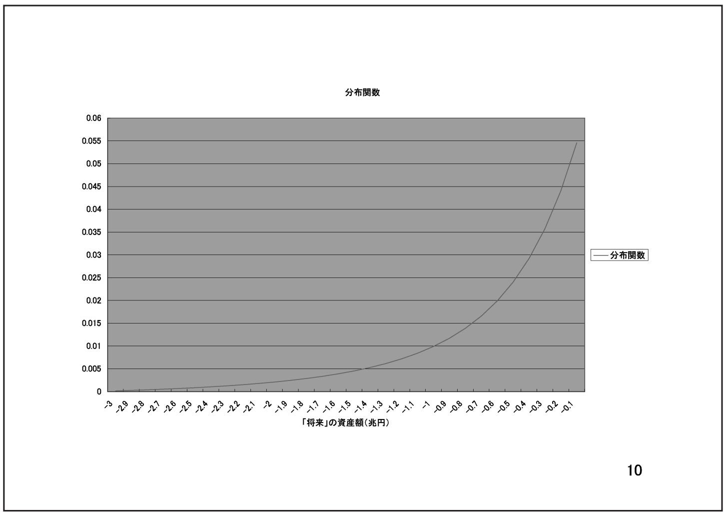
すなわちどのようなことかと申しますと、例えばここ（スライド７の縦線の部分）における分布関数の値というのは、密度関数のここ（スライド７の斜線部）の面積が対応している。それが分布関数です。今日の話はすべて分布関数の言葉で述べさせていただきます。



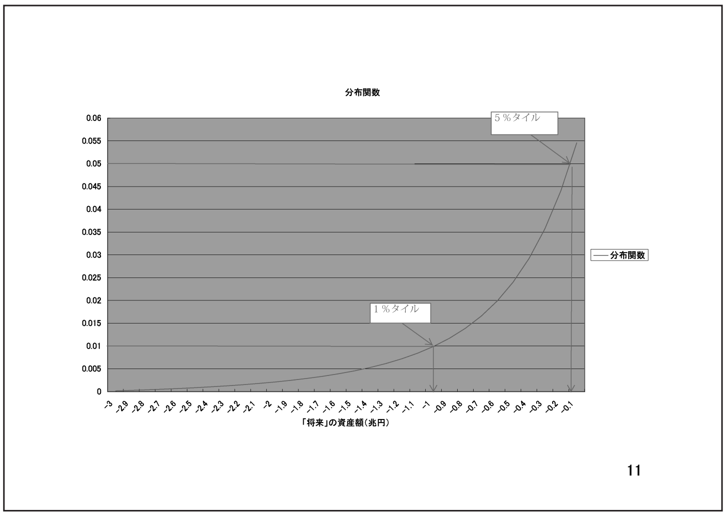
これは分布関数なわけですが、ここでXが資産だとします。保険ではむしろロスを書いていることが多いようですが、われわれのほうの分野では最近は全部資産額を確率変数としますからロスは$-X$ということになります。



そうしますとロスというのは図の左側になりますので、ロスが大きいところを問題にします。



ちょっとここを拡大しますと、このような図（スライド１０）になります。ですから、ロスがマイナス、これは景気よく兆を単位にしました。ロスが１兆円以上である確率が 0.01 とか、そのような感じです。



そこで問題になるのは、そのパーセンタイルです。ロスの 95 パーセンタイルというのは資産のほうで言えば５パーセンタイルということです。５パーセンタイルというのは、ちょうど分布関数が 0.05 に対応する値、１パーセンタイルは分布関数の 0.01 に対応する値、ここが１パーセンタイルになります。ここでちょっと恐縮ですが、分布関数というのはこの値に対して確率が決まるわけですが、逆にこちら（確率）からこちら（値）を見ていますので、これは分布関数の逆関数ということになります。ですから、これはパーセンタイル、分位点と申します。分位点というのは分布関数の逆関数である。

分位点：分布関数の逆関数

$$F^{-1}(\alpha) = \inf\{x;\ F(x) > \alpha\}, \qquad 0 \leqq \alpha < 1$$

大雑把に言って

$$P(X \leqq F_X^{-1}(\alpha)) = \alpha, \qquad 0 < \alpha < 1$$

Value at Risk

$$VaR_\alpha(X) = -F_X^{-1}(1-\alpha) \qquad 0 < \alpha < 1$$

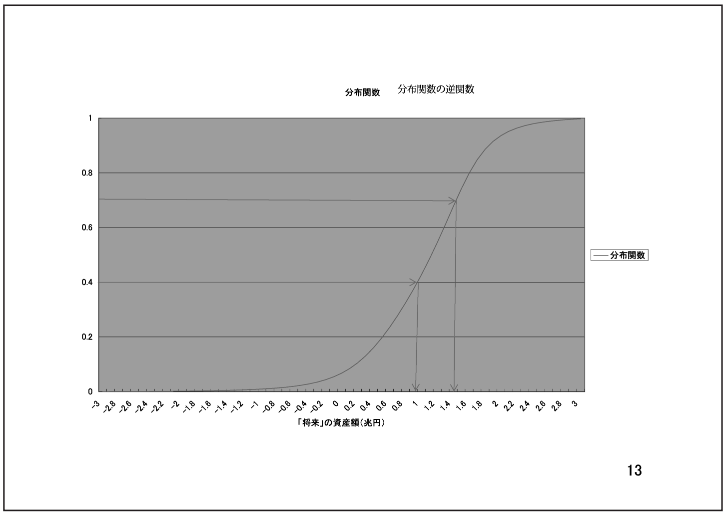
大雑把に言って

$a = VaR_{95\%}(X) \iff X \leqq -a$ となる確率が 0.05

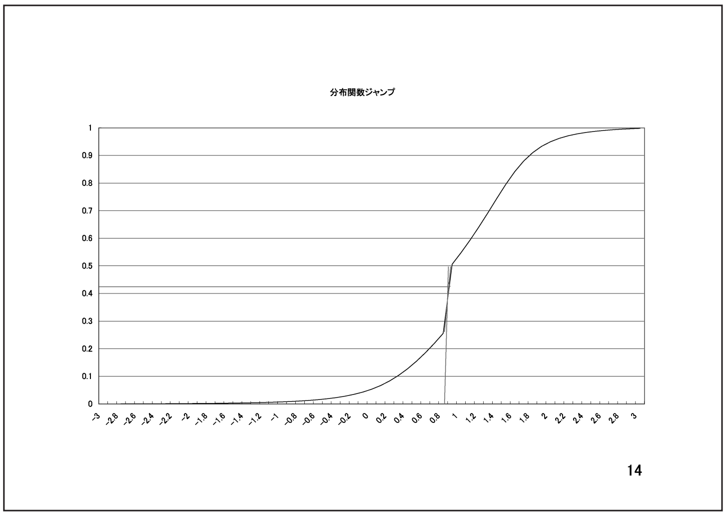
（ VaR の良さは意味がわかりやすいこと　）

12

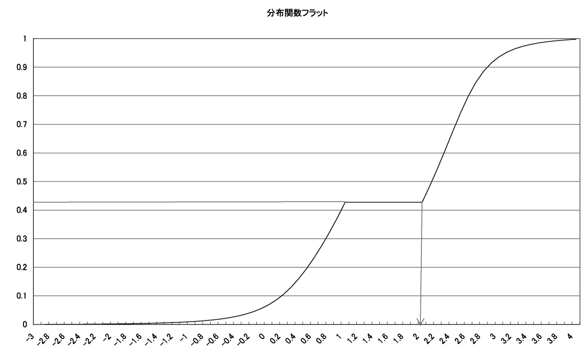
それをこれはまた、数学者なので厳密に定義を書いてあります（スライド１２）が、大雑把に言って、ちょうど X がこの値以下である確率があるか否かということです。



実はここで、ちょっとだけ申し上げますと、逆関数ですから、この（スライド１３の）ように、これ（確率）に対してそれ（値）を対応させる。



それだけのことなのですが、ここは数学者のあれで、あまりそのようなことを普通のときは考えないのですが、一点に確率があるという場合には、分布関数というのはこのようにジャンプをします（スライド１４）。ジャンプに見えませんけれども。そうすると、グラフとしてはこの間がないので、ここに対応する値は何だということになりますが、それはここ（ジャンプしている部分）を直線で結んでここ（値）に落ちるというようになる。



15

それからもう一つ、今度はここに全然確率がない場合（スライド１５）は、分布関数がフラットになってしまう。フラットになるときには、これはどこを返せばいいのかということですが、それは右端を返す。ということで、ちょっと分布関数を（スライド１２のように）定義いたしますということです。ですから逆関数というのは、一応そのように定義します。ただ、大雑把に言うとこの（スライド１３）ようなことだと。

そうすると、Value at Risk というのは、要するに先ほど申し上げましたように、分布関数の逆関数というのは値の一意性がないのでややこしいことになるのですが、今のところわれわれは Value at Risk の α、例えば 95%というものは 0.05 の逆関数、それのマイナス、これは資産額ですので、Value at Risk というのはリスクですからロスのほうを見ますので、そこにマイナス、符号を逆転させます。それが Value at Risk。そうすると、非常に大雑把に言って、Value at Risk の例えば 95%が a であるということは資産の価値がですね、－a 以下になる確率が 0.05 ということで、これは非常に何となく分かったような気になる。Value at Risk が何だということが分かります。

Conditional Tail Expectation

$$CTE_\alpha(X) = -\frac{1}{1-\alpha}\int_0^{1-\alpha} F_X^{-1}(z)dz, \quad 0 \leqq \alpha < 1$$

大雑把に言って

$$CTE_\alpha(X) = -E[X|X \leqq -VaR_\alpha(X)]$$

何がよいリスク尺度であるか？

公理的アプローチ（Artzner, Delbaen, Eber, Heath, ...）

リスク尺度 ϕ とは？

有界な確率変数 X を実数 $\phi(X)$ に対応させる汎関数

ϕ に対する諸性質：何が望ましいかを考えていくアプローチ

16

それに対して CTE_α の定義は、$-1/(1-\alpha)$に、０から $1-\alpha$ までの F_X の逆関数の積分を乗じたもの（スライド１６）というもので定義されている。この式を見ると、何だこれはということになりますが、非常に大雑把に言って、実は CTE_α というのは、ロスが Value at Risk 以上であるものの期待値ということになります。

ですからちょっと戻りますと（スライド１１に戻って）例えばValue at Risk の95%というのはこの値、今の場合それの符号をひっくり返したものですが、実はCTE というのはこれ以下であるという条件におけるX の期待値、つまり条件付け期待値を計算して、これに今X が資産額ですので、マイナスをつけるとリスクになる。ロスでやっていないので分かりにくいですが、そのような条件のもとでのX の期待値にマイナスをつけるということ。この二つが典型的に非常によく使われるリスク尺度です。

ところで、結局リスク尺度というものを考えるときに問題になるのは、何が「よい」リスク尺度であるかということです。要するに、どのようなリスク尺度を用いるべきか。結局このような「よい」とかいう話は、数学的な決着のつかないものなわけですから、これは人間が決めるしかないわけですね。そのときに、結局何がよいリスク尺度であるかを理解、議論するために、リスク尺度が満たすいろいろな条件というのを考えて、どのような条件は満たすべきかとか、そのようなことで何がよいリスク尺度かを考える。そのために公理的なアプローチを考える。これはArtzner、Delbaen、あるいはHeath といった人たちが行っています。

ちょっとまずその話をさせていただきます。特にここ（スライド１６）で有界な確率変数と書いてありますが、数学的な理論の観点から言って、最もリスク尺度を広くしておくためには、X というものは有界であると、現実に有界性があるかという問題はありますが、とにかく有界な確率変数に対して実数$\phi(X)$ を対応させる汎関数をリスク尺度と呼ぶことにしようというように考えます。それに対してどのような性質が考えられるかということになります。

(1) ϕ が**単調非増大**

$\Longleftrightarrow$ 確率変数 X, Y が確率 1 で $X \leqq Y$ を満たすならば $\phi(X) \geqq \phi(Y)$

(2) ϕ が**定数不変性**を持つ

$\Longleftrightarrow$ 確率変数 X, 実数 c に対して $\phi(X-c) = \phi(X) + c$

(3) ϕ が**凸 (convex)**

$\Longleftrightarrow$ 確率変数 $X, Y, 0 \leqq \lambda \leqq 1$ に対して

$$\phi(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leqq \lambda\phi(X) + (1-\lambda)\phi(Y)$$

(4) ϕ が**正同次**

$\Longleftrightarrow$

確率変数 $X, \lambda > 0$ に対して $\phi(\lambda X) = \lambda\phi(X)$

17

最初にまず、単調非増大性。すなわち「X とY が確率1で必ずX よりはY のほうが大きい」ということを満たすならば、X は資産状況ですから、資産状況はX よりY の方が必ずいいときには、積むべき資本$\phi(X)$ はX のほうがより厚くないといけない。そのような性質を非増大性と呼ぶことにしよう。

それから次に定数不変性というのは、$X-c$ と、c というのは定数なのですが、要するに例えば状況が二つあったとして、一つはX で資産状況が出てくる、もう一つの資産状況はX よりも（例えばc をマイナスにすれば）100 億円必ず多くなる。そうすると積むべき資本はいくらになるかというと、100 億円多くなるという方は、100 億円少なくてもいい。要するに、二つ比較したとき、例えば今$X-c$ とX というのは、比較すると確実に$X-c$ のほうが、c が正だとすると、c だけロスが大きいとするならば、積むべき資本はX と比較する

と、必ずcだけ多く積まなければいけなくなると、そのような性質であります。

それから convex、凸性ですね、これは訳が分からないのですね。凸性というのは、今X、Yとλに対して必ずこのように、ϕというのが凸関数になる。なぜ凸関数ということが大事なのかと言われても、それは実は凸でないと数学的には扱いが難しくなる。もう一つ理由がありますが、それはあとで述べることにします。ただこれだけは絶対的かと言われたらこれだけ見るとちょっと、どうしてこれが必要なのかよく分かりません。

それから次、正同次性というものがあります。正同次性というのは、今Xというのは確率変数で、λは正の数であるときに、λXに対して積む資本は必ずλ倍せよと。正同次性というのが、例えば個人のリスク管理とするとちょっと問題があるかなと。要するに例えば競馬にかけをする。そのときに 10 万円かけて、お金をすったら帰りに食事が食べられないけれども、財布に１万円残っているからいいやというので、10 万円かけましょうと。そうすると 10 億円かけるときには、財布に１億円あればいいかというとちょっと待てよと、ちょっと打撃が大きすぎるから、もっと裕福になったらいいけれども、今はもうちょっとないとだめではないかと、そのような個人のリスク回避という観点からいくと、正同次というのはちょっと奇妙な性質であります。ただ、これは会社の話になってきますと、例えばλが 1.01 倍のときに微妙に変わるということはないので、そうするとこのような性質は必要かなというような話になる。そこら辺は、これは皆さんがどう考えるかということであります。

(5) ϕ が**法則不変** (law invariant)

$\Longleftrightarrow$

確率変数 X と Y の P の下での分布が等しいならば $\phi(X)=\phi(Y)$

(6) ϕ が **comonotone**

$\Longleftrightarrow$

X が確率変数、f_1, f_2 が単調非減少関数ならば

$$\phi(f_1(X)+f_2(X))=\phi(f_1(X))+\phi(f_2(X))$$

(7) ϕ が **Fatou 性**を持つ（技術的な性質）

$\Longleftrightarrow$

$X_n(\omega)\downarrow X(\omega),\ n\to\infty,\ P\text{-a.s.}\,\omega \Rightarrow \limsup_{n\to\infty}\phi(X_n)\leqq\phi(X)$

18

それから次に（スライド１８）、これはわたしが与えた性質なのですが、XとYというのが今Ｐという確率のもとで同じ分布を持つならば、XとYは同じ、要するに等価である。ですから積むべき資本は同じです。生命保険の考え方だと、例えばＡさんとＢさんが... 死ぬ話ばかりよくないですね... ですけれども、ＡさんとＢさんが例えば生命保険の契約上、年も同じ、何も同じ、すべて同じ。そのとき、Ａさんが亡くなるという場合と、Ｂさんが亡くなるという場合で、何か違うか、要するにＡさんというのは、日本にとって大事な人だから少し資本を多く積んでおこうとか。だけれども、生命保険の場合には大体その分布だけで、要するにＡさんとＢさんは同じ、同じ符号といったら変ですけれども、何も違いはない。だからＡさんとＢさんが全く同じ状況であれば、Ａさんが亡くなるとか、Ｂさんが亡くなるときに違う資本を積むということは考えにくいというわけですね。ですから、分布が等しいならば等しくなると、それは割と受け入れやすい考え方ですね、多分。

次にこれは一番わたしが理解できない、comonotoneという性質ですが、comonotoneというのは今 X が確率変数で f_1 と f_2 がともに単調非減少である場合に、$f_1(X)+f_2(X)$ に対しての積むべき資本は、それぞれの積むべき資本の和になっている。これは要するに f_1 と f_2 が単調非減少ということはどのようなことかというと、X が小さくなると、$f_1(X)$ も $f_2(X)$ もともに悪くなる。大きくなるとよくなる。ですから、根源になるものが一緒であるので、これは和になってしかるべきということなのですが、これはアクチュアリーの人たちが割とよく用いる仮定で[2]、必ずしもわたしはもう一つ分からないのですが、これは主観の問題ですから、納得する。

最後に Fatou 性と、これは技術的な数学上の性質です。

一般にリスク尺度の定義は
(1) 単調非増大性、 (2) 定数不変性　を持ち $\phi(0)=0$ を満たす汎関数

(3) 凸性、 (4) 正同次性　を持つ場合に coherent と呼ぶ
coherent：筋の通った　$<$　「整合的」= consistent

Q を P と互いに絶対連続な $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の確率測度とすると
(5) 法則不変性 を除き上記の性質は Q の下でも変わらない

VaR_α は (1),(2),(4),(5),(6) を満たす

CTE_α は　(1)〜(7) すべてを満たす

19

われわれ、研究者の間ではリスク尺度として、少なくとも最初に述べた単調非増大性、この１番目ですね、それから２番目の定数不変性、この１と２という性質は必ず満たす必要があるというように考えております。さらに０に対して０を返す、すなわち何も起こらないならば積むべき資本も０です。この１と２と、三つを満たすものをもって、リスク尺度というように一応呼んでおります。

さらに、これはDelbaenたちが主張したことなのですが、凸性と正同次性を持つ場合に、coherentと呼ぶ。このcoherentという言葉は、これも余談ですが、なかなかいろいろなところに、物理とかいろいろな世界にcoherentという言葉が出てくるのですが、coherentというのは、この場合は何か筋の通ったというような言葉のようです。実はこれは成城大学の塚原さんが最近訳本[3]を出されていて、そこでリスク尺度について詳しく述べられていますが、彼は訳として整合的という言葉を使っているのですが、数学の、われわれの世界では整合的というのはconsistentという言葉と対応関係がついておりますので、これはちょっとまずいのではないか。ただcoherentに対してどのような訳を当てはめていいのか、今だにちょっと分かりません。でも最近は「コヒーレント」とカタカナで書くようにしてます。coherentという言葉はいい意味なわけですね。ですから、いかにもこれがいいぞという感じで、述べているわけです。

まず最初に、申し上げなくてはいけないのは、今、確率空間に対してＰをどのように選ぶかという問題があ

2 （編注）例えばストップロス再保険における元受会社と再保会社のリスクの関係は comonotone に該当する
3 （編注）「定量的リスク管理」McNeil,A.,Frey,R.,Embrechts,P.　著、塚原英敦　他訳、共立出版

ったわけなのですが、もしＰではなくて、それと互いに絶対連続[4]なＱという確率測度をとる。そうすると確率空間が変わるわけです。ただし確率変数というのは、事象の変数ですから、確率変数であるということは変わらない。そうすると、確率空間を変えたときに、確率測度を取り替えたときに、これらの性質は変わるのかということなのですが、実は法則不変性を除きすべてほかの性質は変わりません。

すなわちどのようなことかと言うと、一応ここで述べられた性質というのは、確率をどう取るかということについて、（5）の法則不変性を除いては、安定的であるということです。ですから、それがどうしたと言われると何とも言いようがないのですが、そのような意味では法則不変性を除き、割と不変性を持つということである。さらに Value at Risk というのは（1）、（2）、（4）、（5）、（6）と、要するに３番を除き全部満たす。それから Fatou はちょっと微妙なのですが。CTE というのは、今述べた（1）から（7）の性質をすべて満たす。ですから CTE というのは、今、次から次へと述べた性質はすべて満たすということになります。

(8) ϕ が劣加法的

$\Longleftrightarrow$

確率変数 $X, Y,$ に対して $\phi(X+Y) \leqq \phi(X) + \phi(Y)$

(3) 凸性 & (4) 正同次性

$\Longleftrightarrow$

(4) 正同次性 & (8) 劣加法性

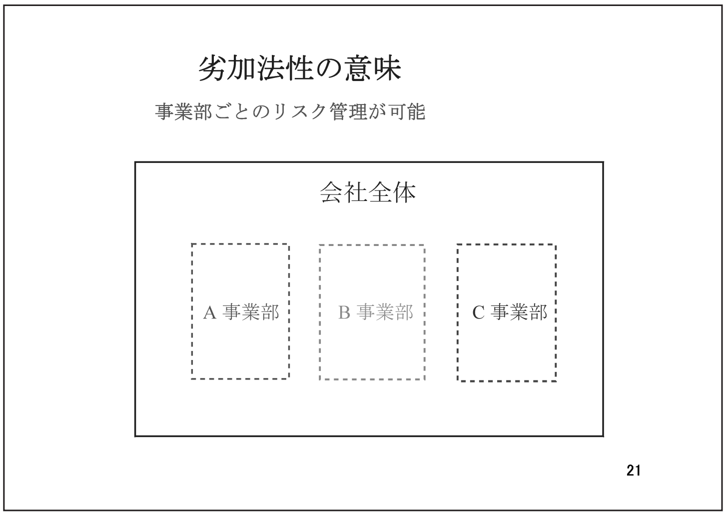
VaR_α は 劣加法性を持たない

CTE_α は劣加法性を持つ

20

それから、全部満たすことが必要かということが問題になるわけですが、ここで８番めの性質として、ϕ が劣加法的である。劣加法的であるとはどのようなことかというと、X と Y に対して X プラス Y の ϕ に対するリスク、そのようなものはそれぞれの和よりも小さくなる。それが劣加法性という。実は、凸性と正同次性を持つということと、正同次性と今言った劣加法性を持つということは同値になります。Value at Risk も CTE もどちらも正同次性を持ちますが、Value at Risk は結局今言ったことにより、劣加法性を持たない。それに対して CTE は劣加法性を持つということになります。ですから、もし正同次性を認めるならば、凸性ということは実は今言う劣加法性と同値ということです。劣加法性が必要なのかということなのですが、これまた多分意見が分かれる。すなわち劣加法性というのはどのようなことかというと、事業ごとのリスク管理ということですね。

4 （編注）同じ可測空間上で定義される確率測度ＰとＱについて、「Ｐに関する零集合ならばＱに関する零集合」が成立するときＱはＰに関して絶対連続であるという（以下同じ）



どのようなことかと申しますと、今、会社全体があるわけですが、実は会社は部門に分かれている。各部門でリスク尺度を持って、リスクを管理していたといたします。そうすると会社全体で、このリスク尺度を持って管理せよと言ってそれぞれが管理したとします。そのときにそれぞれでリスクはちょっと、A、B、Cでそれぞれ積むべき資本を積んでいる。そうすると会社全体として考えたときに、トータルなリスクと積んでいる資本との関係はどうなっているかということなのですが、劣加法性というのは、要するにXとYがそれぞれの部門だとしますと、$\phi(X)+\phi(Y)$というのがそれぞれの部門が積んだ資本ということです。それを足したものよりもこれが小さいということは会社全体が必要とする資本は、それぞれの部門が積んだ資本の和よりも小さいので、一応セーフだということになります。すなわちもし劣加法的であれば、各事業部門で一応リスク管理をしていれば、そして十分な資本がちゃんと積まれていれば、会社全体としても積まれている。けれども劣加法性でないときには、そのように個々の事業部でリスク管理をしても、全体としてはリスク管理になってない可能性、ですからトータルにリスク管理をしなくてはいけないということなのです。そのトータルにリスク管理してなくてはいけないということが、要するに重要かどうかということですから、劣加法性は本当に重要かどうかというのは、これまた解釈が分かれると思います。けれども、とにかく coherent。

以下の定理が Delbaen, . . . により示されている

$\mathcal{P}$ を $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の P に対して絶対連続な確率測度全体の集合とする

[基本定理]　汎関数 ϕ に対し, 以下は同値

(1) ϕ は coherent かつ Fatou 性を持つリスク尺度

(2) $\mathcal{P}$ の部分集合 $\mathcal{Q}$ が存在して

$$\phi(X) = \sup\{-E^Q[X];\ Q \in \mathcal{Q}\}$$

がすべての有界な確率変数 X. に対して成立する

Föllmer-Scheid により、より一般の定理が示されている

22

ここからだんだんあまりもう聞きたくないという数学の話になっていきますが、ただ非常に重要な基本定理

となります。最終的なこのような結果に到達するのはDelbaenだと思いますが、とにかくϕというリスク尺度ですね、これがcoherentでFatou性を持つということと、実はちょっとややこしいのですが、Pというのは...（$\Omega,\mathcal{F}$）上の確率測度で元のPに対する絶対連続... そのような確率測度全体としますと、それの部分集合を取ってきて、いちいちその期待値を取ってマイナスを取るのですが、最後にsupを取ったもの、それを$\phi(X)$と置いた。こうすると一つ汎関数が作れますが、実はこのようなものは必ずcoherentでFatou性を持つリスク尺度であるし、coherentでFatou性を持つリスク尺度は必ずこのような形に表すことができる。このような定理があります。実はFöllmerとScheidという人たちによってさらに一般の定理が示されておりますが、書くとかえって訳が分からないということになりますので、これはもしご興味があれば文献を見て下さい。

CTE は基本定理の (1) を満たす
よって (2) における表現が存在する
それは以下のように与えられる

$0 \leqq \alpha < 1$ に対しては

$$CTE_\alpha(X)$$
$$= \sup\{-E[\rho X];\ \rho \text{ は } 0 \leqq \rho \leqq \tfrac{1}{1-\alpha} \text{ かつ } E^P[\rho] = 1 \text{ を満たす確率変数 }\}$$

23

そうすると、今CTEというものはcoherentだったので、先ほど言ったようなDelbaenの表現を満たします。Delbaenの表現ではどのようなことになるかというと、それはsupのマイナスの期待値の絶対連続なので、期待値が1であるような、非負な関数がメジャーを表わすと考えることができますので、そのようなものとの積のマイナス sup で、それでρというのは、非負なのですが、同時に上限がありまして、$1/(1-\alpha)$、これは1より絶対大きいわけですが、そのようなもののsupで書ける。そのようなことが分かります。

法則不変性な coherent リスク尺度については次のような定理がある。
[定理] 確率空間が atomless とする。
この時、汎関数 ϕ に対し, 以下は同値
(1) ϕ は coherent, 法則不変, comonotone 性を持つリスク尺度
(2) $[0,1]$ 上の確率測度 m が存在して

$$\phi(X) = \int_{[0,1]} CTE_\alpha(X) m(d\alpha)$$

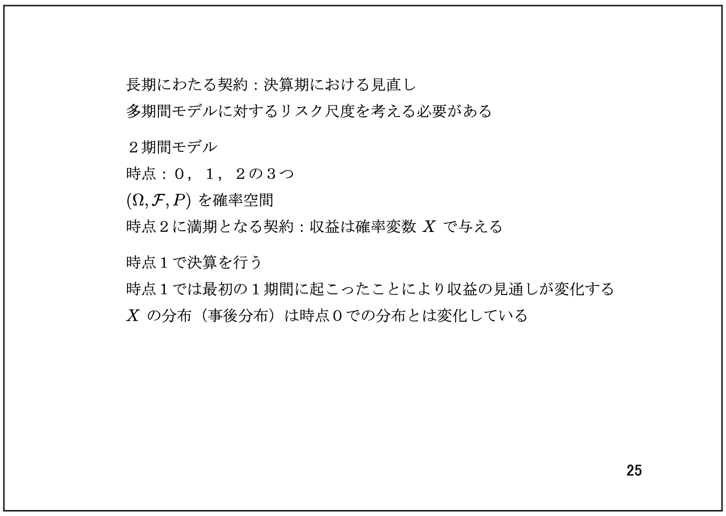
がすべての有界な確率変数 X に対して成立する
確率空間が atomless $\Longleftrightarrow$ 分布が正規分布となる確率変数が存在する

上記の定理に類する定理がいくつか知られている
法則不変な coherent リスク尺度の中で CTE は基本的なリスク尺度

24

それからさらに、これはいろいろな人の定理なので、ごちゃごちゃになってますが、基本的にですね、ちょ

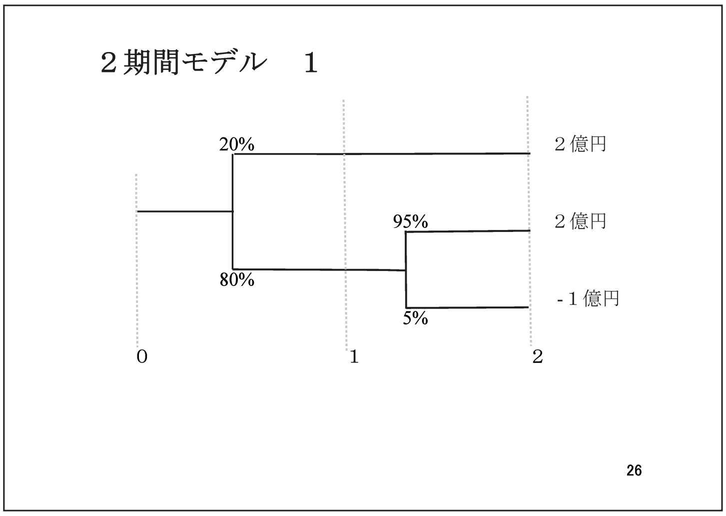
っと確率に若干条件はいりますが、coherent で法則不変でかつ comonotone である、そのようなリスク尺度について言えば、それは必ずですね、CTE の１次結合で書くことができるという定理が存在する。ですから実は coherent で法則不変で comonotone なものというものは本質的に CTE から構成することができる。そのような定理があります。もっと一般に、coherent で law-invariant であれば、comonotone でなくても、CTE から構成できるという定理があります。ですから CTE というのは、法則不変、coherent という中では最も基本的なリスク尺度であることが示せます。



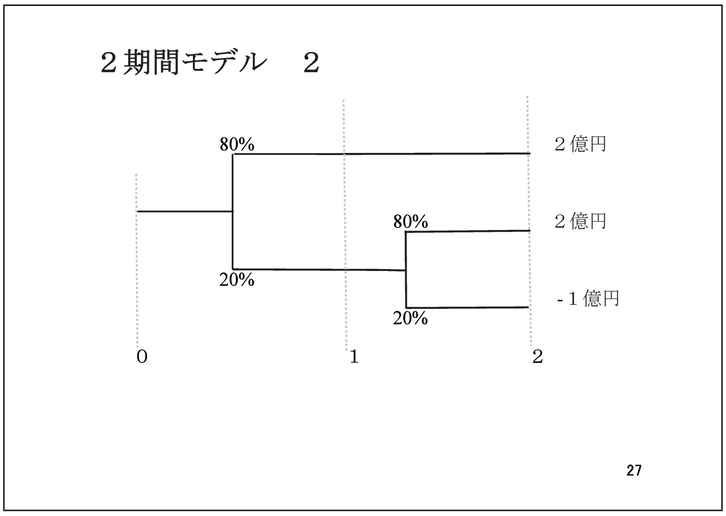
ここからちょっとだんだん駆け足になってまいります。今までの話は１期間の結果なのですが、ここで多期間のリスク尺度というものを考えていく。多期間のリスクモデルとはどのようなものかというと、要するに例えばここで生命保険というのは、そのような問題、要するに会社というのは今年があって来年があって、はい解散というわけにはいかないわけで、ずっと続いていくわけですね。そうすると、当然その契約というのは１年で全部書き直すというそのようなものではなくて、例えば生命保険だと 30 年、40 年と続いていくわけですから、そうすると、個人の場合はじっと我慢すればいいのですが、会社というのは必ず決算期に決算があって、決算のときに例えば債務超過だと、そこでいきなりアウトになるかもしれない。あるいは債務超過にならないまでも、成績が悪いと社長が首になるかもしれない。そのようなことになりますので、結局ですね、途中で見直しをしていかなくてはいけない。そうすると多期間モデルというのはどのようなことかというと、その決算期で見直しをするという、そのようなことを考慮したリスク尺度を考えると、１期間モデルではちょっと心もとないということで、多期間のモデルに対してのリスク尺度を考えています。

ここではちょっと、非常に単純のために２期間モデルのお話しをさせていただきます。２期間モデルと言うのは要するに時点としては、０、現在と１年後、２年後と考えていただいて結構ですが、そのような世界で、時点２に満期となる契約というのを考える。収益は確率変数 X である。ところが、時点１で決算を迎えてしまうのです。そうするとまだ、この契約は続いているわけです。ところが問題なのは、時点１では要するに１年後ですから、さまざまな情報は入ってきます。ですから確率変数 X に対する、すなわち収益に対する見通しが１年後には変化している。特に、今確率分布ということを考えると、これは X の時点１における分布というのは、言ってみればベイジアンでいう事後分布のようなものですが、要するに時点０での収益の見通しの分布と

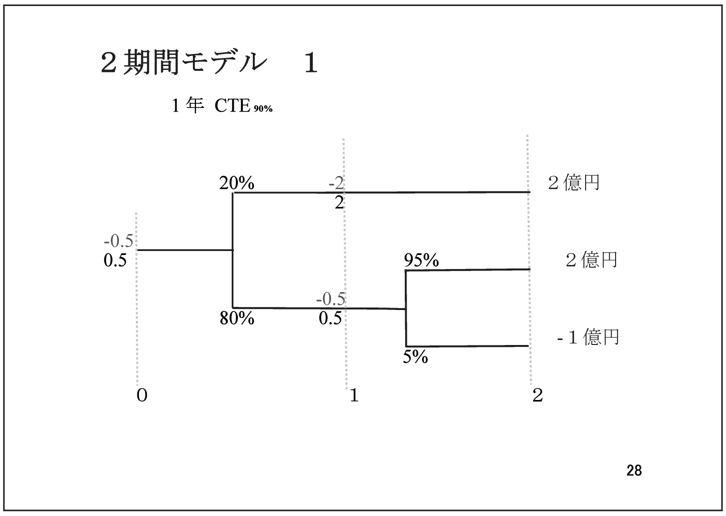
は変化している可能性がある。そうすると、一体どのようなことが起こるだろう。



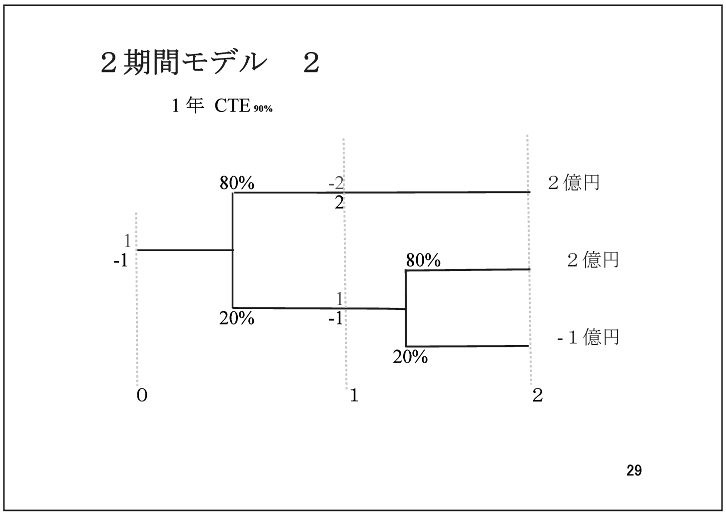
ここでちょっと二つモデルを挙げさせていただきますが、要するに非常に単純なものです。一つめ（スライド２６）は、収益というのは２億か－１億かと、このような大雑把なモデルなのですが、まずシナリオがこのような３本しかない、非常に単純なモデルです。単純なモデルなのですが、まずは１期間後にここ（図の上側）に来るとですね、これは確定して、２億円もらえます。ところがこっち（図の下側）に来たときには、まだ確定してなくてさらに場合が二つに分かれる。そのときに、まず０という時点から上のシナリオに行く確率は20%、下に行く確率は 80%、ここ（下側）からさらに上に行く確率は 95%、下に来る確率は５％。そうするとですね、結果としてこれは４％の確率で－１億円、96%の確率で２億円もらえるということになります。



もう一つ、モデルを考えます（スライド２７）。こっちも全く同じなのですが、違うのはここの確率です。すなわち、上に行く確率は今度は 80%である、下に行く確率は 20%。また上に行く確率は 80%、20%。実はこの場合もですね、実は－１億円に最終的に行く確率は４％、２億円が 96%で、この１というこの部分がなければ、最初の見通しとしては、確率４％に 96%ということで、全く変わらないわけです。



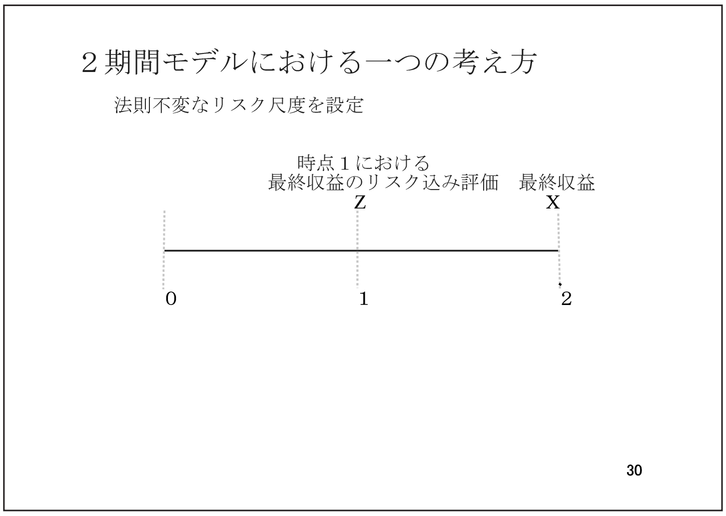
ところが、もしこれ常識的に、CTE で決算をするということで、今 90%がいいかどうか分かりませんが、一番計算しやすいので 90%。そうしますと、今時点１に来たときに、上にいればこれはもう２億円が収益として確定しています。ですから積むべき資本は－２億円。あるいは資産価値は２億円。一方こちらの場合は、５％の確率で－１億円いきますので、実は－0.5、要するに積むべき資本は CTE で計算すると時点１でここ（下側）にいると、－0.5 億円、すなわち資産価値は 0.5 億円という形。そうしますと、最終的にどちらに転んでも資本を積まなければいけないという情報はありません。今この場合には、時点０で、下に行けば資産価値は 0.5 億円。上にいけば２億円としますと、結局 CTE でもう一度それを計算し直すと 0.5 億円が資産価値で、積むべき資本は－0.5 億円。すなわちこの場合は、当初資本を全く積む必要がないということになります。



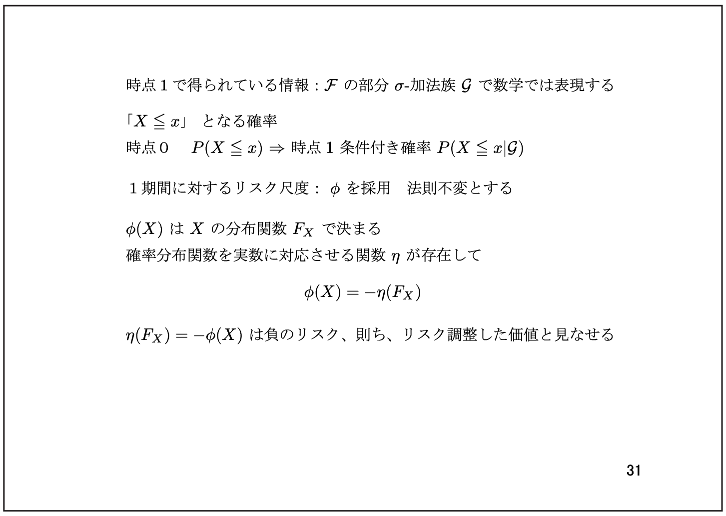
一方、二つめの例を考えますと、このときは、時点１の上側は２億円でやはり積むべき資本は－２億円、資産価値２億円です。時点１の下側の場合は CTE90％ということなので、もろにこれは－１億円になるので、積むべき資本は１億円になります。ですから資産の価値としては－１億円ということ。ですが上のシナリオでは資産価値２億円、下では－１億円ということになって、そうすると時点０で積むべきは、１億円となります。ですから、資産価値は－１億円ということです。

ですからもし、この時点で CTE を使うならば、下に来ると、ここでは１億円積めということになります。

上は－２億円。２億円取り崩してもいいという。そうなることが、あらかじめここで分かっている。そうすると 20%の確率で１億円積めという話が来てしまうので、ここでも１億円、ＣＴＥで考えるからには、１億円積まなければいけないでしょう。これが、iteration によってリスクを計算するという考え方です。そうしますと、実は最終的な確率は等しいけれども、この二つは違っているということになります。



今のを少し考えますと、今もしリスク尺度として、法則不変なものを取ることにいたします。２年目で収益は確定しますが、１年目で、X に対して積むべき資本というのが表れる。積むべき資本、リスクのマイナスをもって資産と考えることにすると、そうするとこの X 、１年後には先ほど述べたようにある金額を積めというような話が出てきますので、そうなることは分かっているならば、０年めにもそれを考慮して積まなければいけない。すなわち今、X に対して一つ前に Z と、時点１で積むべき、あるいは、リスク込みの最終収益、ここではこのような言い方をしていますが、リスクを考慮した最終収益の評価、そのようなものを Z とすると、これに対してまたリスクを考慮する、そのような考え方は割と自然かなと思います。



これをちょっと、だんだん嫌になるかもしれませんが、数学的にやりますとこのようなことになる。すなわち今確率変数が x より以下である確率というのは、時点０ではこの確率（スライド３１）なのですね。ここで、時点１で得る情報はどのようなものであるかというのは、数学的には部分σ - 加法族というもので表現いたし

ます。そうすると時点１ではこの確率が、このような条件付き確率に変化いたします。そうすると今１期間に関するリスク尺度として ϕ を採用する。ただしこの ϕ は法則不変だとします。そうすると、$\phi(X)$ というのは、実は X の分布関数 F_X で決まるわけですから、何か分布関数を実数に対応させる関数 η が存在して、$\phi(X)$ というのは、$-\eta(F_X)$ と、こう表現できるわけです。

そうすると、$\eta(F_X)$ とは何かというと $-\phi(X)$ なので、結局 X という収益に対してリスクを調整した価値というように見なす。これはあくまでリスク調整した価値ということで進みますが、そうしますと、今考え方としてこのようなことになる。

条件付き確率分布関数 $P(X \leqq x|\mathcal{G}), -\infty < x < \infty$ は
「分布関数を値として持つ確率変数」

時点１での契約の価値： $Z = \eta(P(X \leqq \cdot|\mathcal{G}))$ と評価すべき
これは確率変数であることに注意！

現在におけるこの契約のリスクは $\phi(Z)$

$\phi(Z)$ は確率変数 X の汎関数と見なせる： $\tilde{\phi}(X)$ と表す

ϕ が Coherent $\Rightarrow$ $\tilde{\phi}$ も Coherent なリスク尺度 (法則不変ではない！)

１期間モデルの理論は適用可能！

32

時点１で X という最終収益の確率というのは条件付き確率というものになります。ですからこれは、分布に値をとる確率、そのようなことになりますので、今 η というものに条件付き確率を放り込んだ Z というものが時点１における価値だというように見なす。そこでその Z をこの時刻０ではどう見るべきかというと、この Z に対して $\phi(Z)$ を計算したというように考えるべきだ。ちょうどこれは Iterated CTE とかそのようなものの基本的な考え方です。ここで、ポイントは何かと言うと、多期間の場合は随分いやらしいことになってますねということなのですが、実はですね、$\phi(Z)$ というのは、$\mathcal{G}$ はもう固定しているとしますと、X から決まるわけですね、結局。そのような手続きです。ですからあくまで、これは X の関数でもあるわけです。それを $\tilde{\phi}$ とすると、実は $\tilde{\phi}$ というのは、１期間のリスク尺度だと見なすことができる。１期間うんぬんは忘れて、確率変数に対する実数を対応させるものをリスク尺度と呼ぶという数学ですからこれは。定義に入っているわけです。ではこの $\tilde{\phi}$ というものはどのようなものですかというと、実は ϕ が Coherent であれば、$\tilde{\phi}$ も Coherent。ただし、ここが重要なポイントです。この $\tilde{\phi}$ はもはや法則不変ではありません。すなわち X と Y が同じ法則持っていても $\tilde{\phi}(X)$ と $\tilde{\phi}(Y)$ が同じかどうか、というと先ほども述べた例がまさにそうですが、最終的な分布が等しくても出てくる答えは違っているかもしれない。

ここでポイントになるのは、Delbaen はめちゃくちゃややこしい一般論を作ったわけですが、実はこれは一般論の枠組みに入っている。よろしいでしょうか。ポイントなのは何かというと、ただ法則不変性が崩れる。そこへ行く前にちょっと、あとはだんだんややこしくなってあまり見るのもうんざりしてきますのであれなのですが、CTE というのは実は法則不変ということを忘れておきますが、CTE というのが coherent なリスク尺

度の中で最も Value at Risk に近いものであるということが証明できる。その意味は、ちゃんとした定義は述べませんが。 実は Delbaen はですね、そのために Value at Risk よりは CTE のほうがいいと、CTE、CTE と、世界中にどうも宣伝して回ったのですね。そのために、coherent イコール CTE という、少し間違った先入観を刷り込んでしまった。

実はそれで Delbaen 自身は多期間の話に移っていって、ここで突然、CTE はあまりよくないと言い始め、なぜ CTE がよくないかというかというと、要するに coherent 性は崩れないのですけれども、法則不変性は崩れるわけです。多期間なので、むしろ法則不変性が崩れてないとちょっとおかしい。だから多期間のリスク尺度に関して言えば、むしろ１期間のリスク尺度と見なしたときは、法則不変性はむしろ害がある、今のようにですね。そうすると、CTE は絶対だめだという話になってしまいます。要するに CTE というのは法則不変性を持つわけですから、逆に。そのことはよくない。実は先ほど申し上げましたように、出発点は法則不変性を持っているのが自然なのですが、終着点は法則不変性を持たない。そのような一応理論構成ですということですね。突然 CTE はよくないと言い始めたのでちょっと大混乱をきたして、彼はちょっとおっちょこちょいだと思うのですけれども、その点は。

n 期間モデルへの一般化

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$

$\{\mathcal{F}_k\}_{k=0}^n$ はフィルトレーション、$\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$

則ち、$\mathcal{F}_k$, $k = 0, \ldots, n$ は部分 σ-加法族、$\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{F}_n$

$\mathcal{F}_n$-可測な確率変数 X に対して帰納的に

$$Z_n = X,$$

$$Z_{k-1} = \eta(P(Z_k \leqq \cdot | \mathcal{F}_{k-1})), \quad k = n, n-1, \ldots, 1$$

$$\tilde{\phi}(X) = -\eta(X | \{\mathcal{F}_k\}_{k=0}^n) = -Z_0$$

とおく

最初にとったリスク尺度 ϕ が CTE_α である時、

$\tilde{\phi}$ を ICTE と呼ぶ（Hardy and Wirch）

33

あまり余計なことを言うのもあれなので、一応 n 期間の場合にどうなるかということだけをご説明します。これは説明だけ。すなわち n 期間モデルというのは時間が今度は０から n までありますが、各時点で情報を得られます。ただ情報というのは、基本的に忘れることはないということなので、だんだん増えていく。このようなように増大する部分σ - 加法族のことを、俗にフィルトレーションと呼びます。それから $\mathcal{F}_0$ いうのは、無情報ということで、全体と空集合だけ。このようなものに対して $\mathcal{F}_n$ 可測というのはどのようなことかというと、時点 n で価値が完全に分かるという意味で $\mathcal{F}_n$ 可測と言っているのですが、それに対して帰納的に $Z_n = X$ 、それから Z_{k-1} は、今言った η の、何かややこしい式ですが、これを iteration で次々と、次の時点の資産価値を CTE なら CTE に戻すという作業がとれる。そうやって資産を、バックワードに次々に評価させていく。

最後に出てきたものに対してこのマイナス、それが実は φ、あれなのですが、こうやって作っていって、最後に出てくるもの、Z_0 のマイナスに値をとるものを多期間のリスクとして定義する。このようなやつが割合

と自然に出てくる多期間のリスク尺度で、特に最初にとったリスク尺度が CTE_α であるときには、このようなもの、ICTE と呼ぶということを、Hardy and Wirch さんが述べている。現在、法則不変性という概念をどのように多期間リスク尺度に組み入れればよいかと言うことについて多くの研究があります。

それからもう一つ申し上げると、これは今日はくわしく述べませんが、例えば保険契約の場合は途中でキャッシュ・フローが発生するので、今のとちょっと違うわけですね。途中でキャッシュ・フローが発生しないとして考えていたので、最終的に１期間モデルの話に落ちたわけですが、もし途中でキャッシュ・フローがあると、これはややこしいことに、今度は確率過程に対するリスク尺度という概念を持ち出す必要が出てきます。しかし非常に似たような議論ができあがるということだけ申し上げておきます。

それで ICTE の計算というのを考えるわけですが、問題なのは、実は今日ですね、CTE は金融機関であまり使われていないという実態があって、Value at Risk がほとんどです。その最大の理由は、例によって計算するのが難しいということにありまして、要するに Value at Risk を計算するのも大変なのに、CTE はとてもではないけれども、計算が間に合わないというような話になっていまして、みんな、もううちは CTE をやめましたというようなところも出てきている始末なのです。それはリーマン・ブラザーズで痛い目を見たわけですけれども、簡単であることを選ぶと後でひどい目に遭うかもしれないのですが。実務の問題というのは、理論はこうしろというのが簡単でありますが、現実に働いている人たちはそう簡単にはいかない。そこで、そうすると ICTE というのは、CTE がそもそも計算が難しいのですが、さらに複雑になります。というのは CTE でしたらちょっとモンテカルロでやるという手があるのですが、条件付き確率というのが途中で現れるので、とてつもない複雑な計算をしなければいけなくて、単純なモンテカルロではうまくいきません。ですから、突然ですね、計算量がめちゃくちゃに増えていく。n がもう 30 などといいましたら、死ぬほど大変です。

ICTE の計算は n が大となる時は複雑となるが、
時間間隔をゼロにとばす時、簡単になることがある
分布関数 F に対して

$$\eta_\alpha(F) = \frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha F^{-1}(z)dz \qquad 0 < \alpha \leqq 1$$

とおく

$$CTE_{1-\alpha}(X) = -\eta_\alpha(F_X)$$

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ $\{B(t); t \in [0,\infty)\}$ 1 次元ブラウン運動
$\mathcal{F}_t = \sigma\{B(s);\ 0 \leqq s \leqq t\},\ t \geqq 0.$
$\alpha(h),\ h > 0, \quad b > 0$
(A) $\Phi^{-1}(\alpha(h))^2 - \log(1/h) + \log(2\pi) \to -2\log b, \qquad h \downarrow 0.$

ただし、 $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^x \exp(-\frac{y^2}{2})dy \qquad -\infty < x < \infty$

34

ところが実際、ICTE というのは n を大きくすると非常に複雑になるのですが、実は時間間隔を短く、これは１年というのは決算、それが３か月に、どう考えても１秒にはならないだろうということなのですが、数学的には当然いくらでも短くすることは可能なわけで、もしどんどん決算期の時間間隔を０にした場合、そのようなことを考えたらどうなるかということです。これはちょっと ICTE との関係で述べてみますが、今 η_α という関数を分布関数に対してこのように定義しますと、CTE というのはちょうど $-\eta_\alpha(F_X)$ と書けて、ちょう

ど先ほど出てきたηがこれに対応するものです。

今、非常に特別な状況を考えます。１次元ブラウン運動があって、フィルトレーションを、ブラウニアン・フィルトレーションとします。そして今、問題は、時間をどんどん短くしていくと、最終的にリスクが発散する可能性が出てきます。Xが有界があればそれはないのですが、ただそれは上限に行ってしまうとかいうような感じになります。Xがアンバウンディッドだと発散する可能性が出てくる。そのようなことがありますので、このαという、これは一種の水準ですね。CTE100パーセントというのは最大ロスで、CTEの０パーセントというのは、実は期待値そのものになります。そうすると CTE の水準をどんどんどんどん緩めていくと、期待値に近づく。hというのは時間間隔なのですが、それを０に飛ばすときに、$\alpha(h)$をどんどん１に、ですから$1-\alpha(h)$を０に近づける。

$$dS(t) = S(t)(\sigma dB(t) + \mu dt), \quad t > 0, \qquad S(0) = S_0 > 0,$$

$$S(t) = S_0 \exp(\sigma B(t) + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t)$$

$K > 0$ に対して

$$\lim_{h \downarrow 0} -\eta_{\alpha(h)}(-((K - S(T)) \vee 0) | \{\mathcal{F}_{hk}\}_{k=0}^{[T/h]+1})$$

$$= E[(K - \exp(\sigma B(T) + (\mu - b - \frac{\sigma^2}{2})T)) \vee 0]$$

変額保険におけるプットオプション部分に対する責任準備金

（左辺） ICTE の極限

（右辺）　単純な積分計算：リスク調整済み期待値

35

どのようなスピードでやるかといった細かいことはもしご興味があれば、これは私の今書いている論文[5]なのですが、そこでは、例えばこのようなブラック・ショールズの価格モデルを考えてみます。プットオプションを引き受けている側のリスクというのを考えたときに、先ほどの手順で多期間におけるリスク尺度というのが出てきますが、そこでhというのを０に飛ばし、ですから決算期を、１秒とか、そのような単位に持ってきて、そうするとこれに対するリミットは実は割と簡単に書けてしまって、途中段階はものすごく複雑なのですが、リミットを取るとこのようになっている。そうすると、これちょっと面白いと言えば面白いのですが、実はこれ、プットオプションに対してもし責任準備金というのを、例えば変額年金において考えるとすると、こちらがICTEで測った責任準備金のようなものになるわけです。それをリミットにとばすとこちらになって、元々のμはリスクプレミアムというものなのですが[6]、それに対して少しそれを引き下げたものの期待値ということになって、それはリスク調節済み期待値と呼ぶことにいたしますが、そのようなものになって計算可能になるというように、割合と簡単になる場合がある。

5 （編注）Kusuoka,S., A certain Limit of Iterated CTE, 東京大学大学院数理科学研究科プレプリントシリーズ UTMS2008-31

6 （編注）ここでは金利を０としている

一般には

$$\lim_{h\downarrow 0} -\eta_{\alpha(h)}(f(B(T)))|\{\mathcal{F}_{hk}\}_{k=0}^{[T/h]+1})$$

$$= \sup\{-E[f(B(T))\exp(\int_0^T \xi(s)dB(s) - \frac{1}{2}\int_0^T \xi(t)^2 dt)];$$

ξ は適合過程で $|\xi(t)| \leqq b\}$

が証明できる
（プットオプションの時、$\xi(t) = b$ が最大となる）

36

一般にはどのようなことになるかというと、ちょっとだけ申し上げますと、一般には、実は（スライド３６にあるとおり）期待値の sup となり、何だかもうすごくややこしい形です。ただ、今（＝スライド３５の例）の場合、たまたま関数 f が美しい形をして、単調性を持っていたために単純になってしまったということなのです。ここでこのような形をしていますが、ちょっとここで先ほど、思い出していただきたいのですが、（スライド３６の右辺の）$\exp(\ )$ の部分というのは、何というのですか、期待値が１の確率変数なのですね。非負の確率変数で、この右辺全体はちょうど Delbaen の定理に出てきた形をしているのです。ここはちょっと Delbaen の定理というのがどのようなものであるかというのをもう一度言わなければいけないわけですが、Delbaen の定理というのは、結局、最終的に１期間モデルの話に、もっとも途中が入っても無視して考えれば そうなりますが、それに対しての $\phi(X)$ というのは（スライド２２の（２）に書かれている）この sup の $E^Q[X]$ というように書けます。Q としてある範囲の確率を取りなさいということですが、そして取るべき確率として何が出てくるかというと、ここ（スライド３６の $\exp(\ )$ 部分）ですね。ここに出てくるのは、ちょうどいわゆるカメロン・マルティン・丸山・ギルサノフフォーミュラーに出てくる、フォーミュラーなのですね。それによってちょっと確率を変えた。それに対してのマイナスの期待値の sup の形。ですからやはりこれは Delbaen の形をしているので、coherent なリスクメジャーになる。プットオプションの場合は実は $\xi(t)$ としての sup を、簡単に解くことができて、$\xi(t) = b$ を選べばいいということが分かって今の式が出る。

おおざっぱに言って

$$1-\alpha(h)\sim b\sqrt{h}$$

となる

より正確には

$$1-\alpha(h)\sim b\frac{\sqrt{h}}{\log(1/(2\pi b^2 h)^{1/2}}$$

37

それからもう一つ、$\alpha(h)$が１に近づくのだけれども、どれぐらいのスピードで１に近づいているのか、それはちょっとかなり難しいのですが、非常にラフに行くと、$\sqrt{h}$ ぐらいのオーダーになる。

それで、今の話は多期間モデルについての話で、これについて相当難しい論文があちこちに出ていまして、ただなかなか研究者というのは. . .。実は先ほどの結果は、森本さんの論文でも少し似たような結果を述べられていたのですが、割合と具体的なリスク尺度を作ろうという立場に対して、現在出ている研究はほとんどがものすごく壮大な一般理論です。実際、あまりにも一般的な多種多様なリスク尺度を含むように考えているために、実際には何を使うべきなのかよく分からないという感じなのです。

リスク尺度とヘッジ

$(\Omega,\mathcal{F},P)$ 確率空間

ファイナンスモデルを考える（証券 etc.）

満期時刻 T

コストゼロで複製できるポートフォリオの時刻 T における価値

（これは確率変数）

その全体： $\mathcal{Y}$ で表す

ファイナンス理論では $\mathcal{Y}$ は確率変数のなすベクトル空間と考える

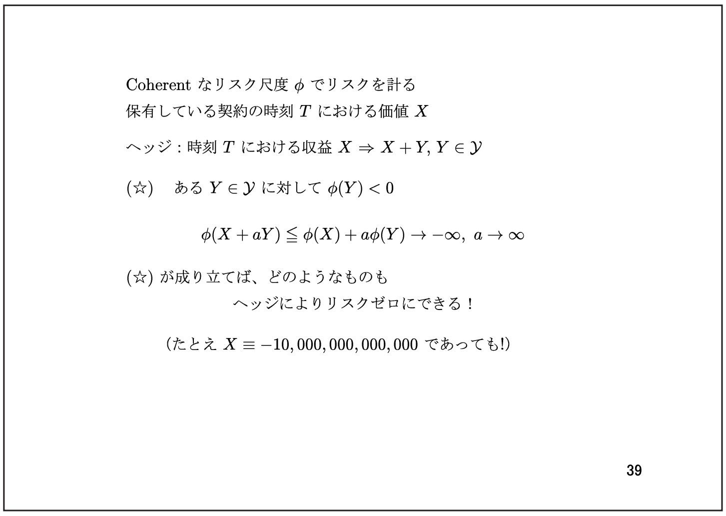
38

多期間リスク尺度の話はちょっとこれくらいにして、最後にちょっとリスク尺度とヘッジという問題について、お話しさせていただく。今、１期間モデルで考えることにします。１期間なのですが、その間にポートフォリオとかそのようなものを、変更することはいくらでも可能になるのですね。要するに１期間ぼーっと過ごしたらどうなるかというのはリスク尺度なわけですが、そこで何かいろいろちょっと株価が上がったからこうしろとか何とかいろいろなヘッジをかける、ヘッジなのかばくちなのか分からないのですが。とにかくポートフォリオの変更というのは可能になります。そうすると、ファイナンス論的にはそのようなことによって最終的なキャッシュ・フローを変えることは可能になる。ファイナンスの理論、細かい話はさておき、結局コスト

ゼロで複製できる、時刻Ｔで複製できるポートフォリオの価値、そのようなものを考えると、それはいろいろさまざまなポートフォリオを構成することができる。それがファイナンスの理論なのです。その全体を $\mathcal{Y}$ で表す。実はこれもコストゼロでできるポートフォリオの価値なのですか、これはもちろん不確定性を持ちますから、これもまた確率変数になりますので、$\mathcal{Y}$ というのは確率変数の部分集合になります。

ファイナンス理論ではですね、空売りとか何とか全部可能だということになっておりますので、Ｙというのがコストゼロで実現できるのであれば、－Ｙも実現できます。要するに反対の戦略をとれば、マイナス。それから二つあればそれを足すこともできる。コンスタント倍することもできる。結局この $\mathcal{Y}$ というものは、確率変数のなすあるベクトル空間である。$\mathcal{Y}$ はどのようなものであるかを調べるのがファイナンスの研究分野の一つなのですが、今ここでは、そこは忘れます。

今、Coherent なリスク尺度 ϕ でリスクを計量するということを考えます。これはですから、必ずしも CTE でなくても何でもいいわけですが、そのとき、今保有している契約の時刻Ｔにおける価値が X であるとするとこの X に対していくら資本を積むのかというのが $\phi(X)$ ということだったわけですが、今ヘッジをかけることで、収益の形を X から $X+Y$ に変更することができる。ただし、Y は今言ったヘッジ可能なものに限ります。そうすると、X に対して $X+Y$ のほうがより有利になるならば、そうしようという気持ちが当然起こるわけですね。



ところがここにおいて、実は一つ重要なポイントがあります。ある Y が存在して、$\phi(Y) < 0$ を仮定します。ここで(スライド３９の)（☆）を仮定するとどのようなことになるかというと、$\phi(X+aY)$ というのは、今、coherent だと劣加法性があり、さらに正同次性がありますから、a を外に出すと $\phi(X+aY) \le \phi(X) + a\phi(Y)$ ですから、a がもし正であれば、それはこれで抑え込み、そうすると a を∞に持っていくと、$\phi(Y) < 0$ なので、結局左辺は－∞になる。これはどのようなことを言っているかというとですね、もしこのような（☆）という状況が起こると、そしてヘッジを許せば、必ず何が起こっても、どのようなものに対しても、積むべき資本は必要ないという状態が起きる。例えば X としては、０をいっぱい並べました、例えば必ず１兆円を損するという契約を結んでも、ヘッジすれば資本は積まなくていいという、常識から見るとありえないことが起こってきて。皆さんむしろアクチュアリーの立場として経験あるかもしれませんが、人間がちゃんと見ていれば起こら

ないようなことをコンピューターがしばしば起して、あとになってこのようなことになっていたというような話を実は何回も聞いたことがある。要するに常識で考えるとこのようなものはヘッジできるとは思えないわけですね。

ところがたまたま変なリスク尺度でリスクを測ることにしてしまうと、リスクが消せるような話になってきて、ですからヘッジとリスク、先ほど最初に述べましたが、リスク尺度でリスクを測るという話とファイナンスの話は元々出どころは別なので、整合性は本当にあるかどうか分からないわけです。もし（☆）のようなことがあると、とんでもない話になる。

いつ (☆) が成り立つか

ϕ ：Coherent なリスク尺度

$\mathcal{P}_\phi = \{Q;\ Q$ は P に対して絶対連続で $-E^Q[Z] \leqq \phi(Z)\ \forall$ 確率変数 $Z\}$

(☆) が不成立 $\Longleftrightarrow$

$Q \in \mathcal{P}_\phi$ で $E^Q[Y] = 0\ \forall Y \in \mathcal{Y}$ となるもの (EMM) が存在する

$\phi = CTE_\alpha$ とすると

$$\mathcal{P}_\phi = \{Q;\ Q \text{ は } P \text{ に対して絶対連続で } \frac{dQ}{dP} \leqq \frac{1}{1-\alpha}\}$$

ほとんどの場合、EMM の密度関数は有界ではない！　（☆）が成立！

リスク調整済み期待値においても

割引金利が Risk Free rate より高くなる限り（☆）は成立する

40

ところで、ではこのようなφが Coherent なリスク尺度の場合、いつ（☆）が成立するかというわけなのですが、実はこれに対してまず先ほど述べましたように、Delbaen の定理によって、Coherent なリスク尺度については、何かある絶対連続な部分集合が存在する。その中で最大のものとして今P_ϕと書くこととしますと、それはどのようなものかというと、Ｑというのは、Ｐに対して絶対連続で、どのような確率変数に対しても、Ｑの下での期待値のマイナスがφ（Ｚ）以下である、そのようなＱの全体をP_ϕと書きます。実はこのP_ϕこそが、φを特徴づける Delbaen のいう Q に相当します。

不成立の方が書きやすかったので、(☆) が不成立であるということとどのようなことが同値かというと、Ｑの中で、どのようなＹに対しても期待値が０となるようなものが存在する。そのＹに対して全部期待値０というようなものを通常 Equivalent Martingale Measure といいますが、すなわちそのような Equivalent Martingale Measure がこの中に入っていなければ、(☆) は必ず成立するということが、いろいろな場合に証明されています。これは数学ですので、100%すべての場合を尽くす定理はありませんが、いろいろな方が、いろいろな設定のもとで、この定理は証明されています。

例えばもしφをCTEとするとどうなるかというと、それは、P_ϕというのは、先ほど見たように、実は確率密度（デンシティ）が$1/(1-\alpha)$以下のものに限るわけです。ところが、ほとんどの場合モデルによるのですが、ブラック・ショールズなどの場合にもしμというのが、要するにリスクプレミアムがRisk Free rateと違うというような場合には、必ずそのときにはEquivalent Martingale Measureの密度関数は有界ではありません。多くの場合ですね、実はEquivalent Martingale Measureの密度関数は有界ではないので、このP_ϕに入っていることは、まず普通

考えられません。ですから、CTEを取る場合には、（☆）が成立するということを念頭に置いて、ヘッジということに関しては極めて慎重にしないといけない。要するに限られたヘッジを許すということはありえます。ただ、今のように青天井のような、いくらでもヘッジをかけることができるということをすると、とんでもないことが起こりかねないよということをこの定理が言っております。

先ほど言ったリスク調整済み確率でも同じで、これはカメロン・マルティン・丸山・ギルサノフによく似ているから、この中にはEquivalent Martingale Measureが入っているのではないかと思われるかもしれませんが、実は結局、どのようなことをやっているかというと、フェアバリューよりも低くない、ちょっと正確には述べられませんが、とにかくここで書いてあるように、割引金利ですね、がリスクフリーより高くなる場合、すなわち$\mu - b$がリスクフリーより高ければやはりだめなのですね。（☆）は成立する。ですからこちらでやっても、（☆）は成立する可能性がある。（☆）が成立しないようにしましょうというと、結局ですね、一体どのようなことが起こるかというと、積むべき資本はフェアバリュー、もしモデルがファイナンスでいうコンプリートモデルであれば、フェアバリューを積めということに、結局なってしまう。ですからフェアバリューでは責任準備金が高すぎるので、ちょっと下げるような制度にしてしまうと、必ず（☆）は成り立っているということになります。

ですからこのような事実がございますので、ちょっと今のところ、ヘッジとリスク尺度との関係をどう考えればいいかということについては議論があります。特にファイナンスにおいては、いわゆるコンプリートマーケットというところでは、完全ヘッジができるので、そうするとそれほど問題はファイナンスには起こらないわけですが、コンプリートマーケットと呼ばれるものは非常に不自然だという感じを、強く皆さん持ち始めております。ファイナンスの実務では無理矢理コンプリートなモデルにして計算を実行するということがしばしば行われているのですが、もしコンプリートでないならば、結局どこかでリスクを計量化するという問題が生じてきます。そうするとリスク尺度のような話に入っていくのですが、リスク尺度とヘッジをどう折り合いをつけるかという話は実は今、いろいろな人がいろいろな提案をしております。ただわたし自身もちょっと考えたことがあるのですが、いろいろな論文が出ていますが、あまりわたしが納得できるような論文はない。アイデアとしてはいろいろある。

参考文献

[1] Artzner, P., F. Delbaen, J. M. Eber and D. Heath, Multiperiod Risk and Coherent Multiperiod Risk Measurement, Preprint 2003.

[2] Artzner, P., F. Delbaen, J. M. Eber, D. Heath and H. Ku, Coherent Muliperiod Risk Measurement, Preprint 2003.

[3] Artzner, P., F. Delbaen, J. M. Eber, D. Heath, and H. Ku, Coherent Multiperiod Risk Adjusted Values and Bellman's Priciple, Preprint 2003.

[4] Cheridito,P., F. Delbaen, and M. Kupper, Coherent and Convex Risk Measure for Bounded Cádlág processes, Stoch. Proc. its Appl. 112(2004), 1-22.

41

[5] Hardy, M. R., and Wirch, J. L., The iterated CTE: a dynamic risk measure, N. Am. Actuar. J. 8 (2004), 62–75.
[6] Kusuoka, S., and Morimoto, Y., Homogeneous Law Invariant Multiperiod Value Measures and their Limits, J. Math. Sci. Univ. Tokyo 14(2007), 117-156.

42

ここで最後にちょっと述べますが、そこら辺は基本的な論文ですが、ここら辺が、何というのですか、もうややこしい話になっています。確率過程に対する尺度とかいうようなことは、またわたしは最近あまり追いかけてないので見ておりませんが、このような論文がございます。以上です。

【司会】　ありがとうございました。少し 12 時まで時間がありますので、ここでせっかくの機会ですので、ご質問があれば、会場から質問を受けたいと思いますが、どなたかおられますでしょうか。田中先生どうでしょうか、お願いします。

【田中】　リスク尺度とヘッジのところですけれども、あまり納得できるような提案がないというお話しだったのですが、その中身ですね、どのような提案があるかということをちょっと教えていただきたい。

【楠岡】　最近、わたしも編集者を辞めたのですが、『Financial and Stochastics』という雑誌がございまして、その中で割合と最近の一つのテーマとしてリスク尺度とヘッジというものがあります。とにかくコンプリートのときはもうどうしようもない。要するに今言った（☆）が満たされなければもうどうしようもないわけで、（☆）は満たされないとき、（☆）は不成立だとしましょう。そうすると変なことは起こらないでしょう。けれども、ではその状況下で今何かリスク尺度を決めたときに、どうヘッジをかけるのが最良であるかいうことなのですね。そのときに結構、みんないろいろなことを考えるわけなのですが、結局、リスクを最小に持っていくようにヘッジをかけようという話になっていくのですが、このような話を考えると、ちょっと際どいことがいっぱいあるわけです。

最近は、要するにヘッジできる部分はフィナンシャルリスクと呼んでですね、ヘッジできない部分はアクチュアリアルリスクと呼んでいる論文があります。それがたとえ保険とは何の関係もなくても、要するにヘッジできないものは、アクチュアリアルリスク。それをどうやっていくかについていろいろなさまざまな提案があるのですが、あまり、何といいますか、全体として最小化するということはなかなか難しいもので、要するに全体で最小化していったつもりが、いきなり 1 年めにぼろぼろになったとかいうようになるとまずいというよ

うなことで、逐次最小化しようとか、いろいろなことを言っている人がいるのですが、やはり本当にそれでいいのかということはわからない。あまり何というのですか、それは説得力がある仮定から説明しているというよりはむしろ数学の問題として方程式化してしまうとこうなりますねと、はい解がありますと、一つ論文が書けるというような感じが強くて、真剣にリスクというものを考えたらどうなるのかという話ではありません。

特に、そのような現実の実務的な立場から見るとどうなるのかというのはあまりはっきりしていなくて、論文はもう完全に数学の形で書かれていますので、どうしても数学者の研究世界に入ってしまっていて、それに対して現実にそのようなリスクを扱う人たちは、どう考えるのかということが、かなり翻訳作業をして対話していかないと、今の時点では、何かわたし自身が見てもあまり納得できない。納得できないのですが、そのような論文はすべてわたしにレフェリーが回ってきて、わたしは、納得できないけれども、全部出してしまえという感じでアクセプトしています。『Finance and Stochastics』に載っている論文に書いてあることが、実際的かどうかというとかなり怪しいかもしれませんけれども、考え方の一つとして参考にはなると思います。

どのようなリスク尺度をとるかとかモデルはもう与えられているとしても、その元でも、さらに議論がユニークにならない。もちろん、先ほども言いましたように、モデルが間違っていたり、とるべきリスク尺度が不適切であれば、結局そのようなものはやはりうまくいかない。ただ数学的な理論が現実とかなり乖離し始めているように思えます。答えになっていないかもしれませんが。

【司会】　ありがとうございました。よろしいでしょうか。

【田中】　ちょっと追加で質問したいのですが、いわゆる Quantile Hedging とか、Mean Variance Hedging とか、Superhedging とかいろいろありますけれども、今の話とどのような関係が。

【楠岡】　例えばですね、Superhedging という話は、要するに、確実にヘッジすると、それは可能です。可能ですけれどもそうすると、もし Superhedging を生命保険でやるとすると、例えば 100 万人のかたに 1,000 万円保障すると、100 万×1,000 万ですから、それらの方からに 1,000 万円保険料として払ってくださいと言っているようなもので、そうすれば必ずヘッジできていますね。それが Superhedging なわけです。要するに少しでもヘッジできない確率が残るともう Superhedging でないわけで、けれどもそれはさすがにちょっとそのような話はないでしょうということになるわけです。ですからどう考えても、例えば日本生命であれ何であれ、責任準備金に対してさらに十分な資本を積んでいても、もしすべての契約者が同時にお亡くなりになれば、必ずつぶれるわけです。確率 1 で必ずヘッジできているわけではない。ですから Superhedging の場合の話というのは、数学としては面白いですが、現実的には Superhedging に対するコストを最初に払ってくださいなどということは、ちょっと考えにくい。

同じく Quantile だ何だかっていう話はそこをさらに少し変えていくわけですが、結局、それらはすべて一つの提案である。Superhedging は完全に大丈夫、安全ですが、全く非現実的で話にならない。Superhedging を超えてしまうとリスクは必ず出てくるわけで、そうするとそもそもリスクというものをどう考えるべきかと

いう話が出てくるわけで、どのようなヘッジであれ、リスクを完全に回避することはできない。そうする結局どこまでリスクを許容するかと、そこにかかっているわけで、要するにリスクをなしで生きたいと思っても、人生においてリスクは付きものですから、リスクを０にはできないはずで、どのようなリスクが許容できるかとか、そのような考え方にうまく合致した数学的なモデルがあるかという問題かと。何がいいとか悪いとかいうことではなくて、結局それぞれが一つの提案であるということです。

【司会】　ありがとうございました。ほかにありますでしょうか。少しだけ時間ありますけれども。はい。では、すいません。

【質問者】　最後のほうで出てきたやはり（☆）の仮定なのですけれども、何かこのようなａを∞に飛ばすようなオペレーション考えるときは、何か個人的には、正同次性のようなものを、そもそも考えてはいけないのではないかという気が何となくしているのです。というのは、正同次性のようなのというのは、自分がプライステーカーであるというのを前提にしたときに成り立つのかなというようなのを何となくイメージしているので、そう思うと何か、（☆）のようなオペレーションを考えるのだったら、coherent で考えてはいけないのではないかというように、今ちょっと聞いていて思ったのですが。

【楠岡】　確かに正同次性が問題を引き起こしているのですが、企業としてはリスクが 1.01 倍になれば資本を 1.01 倍にするば良いだろうと考えるのは自然な考えです。しかし、それを認めると 1.01 の n 乗のリスクに対しては 1.01 の n 乗の資本を積めば良いことになり、正同次性を仮定することと変わりません。いたずらにリスク尺度を複雑にするよりも、どのようなヘッジが許容できるかを考えるべきのように思います。

リスク尺度というのは、あるリスクを許容するという範囲を確定させているわけですが、要するにａＹというのを付け加えることで、訳の分からないリスクを発生させているわけですね。ところがそのリスクというのは、非常識なリスクであるために、一見、ほとんど起こらない確率で、とてつもない大借金を被るというような話になったりするので、要するに例えば一つはヘッジを制約することで、このような問題を回避するということはあるのですが、そのためには、だれがヘッジを制約するのか、監督当局とか。先ほど言ったようにａが∞というのは非常識だということなのですが、では一体いくら以上はだめといえるかと。しかも下手をするとですね、制約のぎりぎりまでヘッジ比率を上げてくる可能性があるわけです。やはりそれも常識的とは本来言えない。要するにこれは何が問題かというと、例えば特に CTE などがそうです。リスク尺度として、CTE を取ったとして、最初の確率、要するに見積もっていた確率では起こらないと思っていたことが、実は結構確率は高いのだという話にあった瞬間に、ヘッジをかけることで巨大な修正を迫られて、あっという間につぶれてしまうといったことが起こる。

ですから、リスク尺度を作るときにも、例えば CTE といったときに、CTE というのは結構だけれども、本当に分布知っているのか。例えばマーケットの株価の分布はこうですと言っても、それはあなたが作ったモデルでしょう、それに対して統計的にやって、要するにある手順を全部踏んだ、儀式をしたから、それは神が、

要するにおはらいを受けたのでこのモデルは大丈夫ですと言われても、これは本当なのですかと。最後は人間が常に注意深くすべてのことに目を見張る必要がある。それは大変なことだと思います。

水曜日に（行われたカナダのアラン・ブレンダー氏の講演で）アポインテッドアクチュアリーという人間がすべて監視せよというような話が出てきたかもしれませんが、生命保険はまだいいのですが、そこにマーケットとかいうモデルが入ってくるともう本当なのかうそなのか、要するに、すべては何といいますか、世界観のようなところがあって、要するにモデルとしてどのようなものが本当に正しいのかというのは、だれにも分からないところがあるわけですね。ですから、そこら辺にあまりリスク尺度とか何とかを設定したからもう大丈夫だというのは...、いやその前に確率Ｐというのに大問題があるのです。そのＰというのはすなわち実際には何になっているかというとモデルがＰを決めている部分がかなり高いので、要するにモデルが本当にいいのか、モデルはほんのちょっと違っていましたというだけでヘッジをかけた瞬間につぶれるという。要するにセーフだと思っていたリスクをある意味で拡大させているわけですね、ヘッジによって。

ですから常識でいくと、普通の人だったらだんだん怖くなるのですが、要するに、さらにさらに博打をしていけば必ず勝つのだというような話に近いですね。しかしそのような金が本当にあると怖くなくなってくるのですけれども。わたしが非常に心配しているのは、モデルというのが作られ、それがコンピューターによって全部管理されている状態において、常識が働かなくなるだろうということ。ですから最初のモデルあるいは最初のリスク尺度を構成するときに、非常に慎重にそのようなことを考慮して、本当に作っておかないとまずいだろうというようなことを考えています。実はそれですから、今回の水曜日にカナダのかたが来られて話をした限りでは、要するに、このような技術を研究していくことも大事だけれども、人を育てること、ちゃんとそのようなことが見える人を作ることのほうが大事なのかなと。何か大学の役割はそこにあるのかなぐらいの感じに少し思いました。研究はもちろん進んでいくと思いますが、ちょうど何というのですか、決定的な研究が出るとはわたしは思わないのですね。そのような多くの研究の中で何を選ぶか、そのようなことは今度は人間が決めることですので、そのようなことがちゃんとできる人が必要なのだという気がします。

【司会】　いかがでしょう。

【質問者】　ありがとうございました。

【司会】　どうもすみません、ありがとうございます。先生もありがとうございます。先生は今日は懇親会まで残っていただけるということですので、またそのときにでもお話しを聞いていただけると思います。今日は非常に深い話を、具体例も入れてかみ砕いて分かりやすく説明いただきました。ありがとうございました。もう一度、拍手をお願いいたします。