[JARIP セミナー]

リスク鋭感的価値尺度

名古屋市立大学大学院経済学研究科

宮原　孝夫*

2011 年 12 月 9 日

概 要

資産の評価やリスクの管理に関する問題の多くは、不確実性を持ったキャッシュフローの価値評価の問題に帰着される。もしもキャッシュフローが効率的な市場における資産に付随して生じているものであれば、数理ファイナンスにおける標準的な理論である [裁定理論]（無裁定市場を前提にした理論）を適用することができる。金融派生商品の価格理論のほとんどは（完備市場の理論であれ非完備市場の理論であれ）この [裁定理論] の範疇に入っている。

*E-mail: y-miya@econ.nagoya-cu.ac.jp

しかしながら、市場が存在していない場合や存在していても無裁定条件を仮定できない市場（非無裁定市場）の場合も多くある。不動産、保険、リアルオプション、知財、研究開発、新規プロジェクト、天候デリバティブ、などはこの場合に当たる。このような対象に対して、リスクと価値をバランスよく評価できる評価法を構築したい。

この問に対する一つの回答として、「リスク鋭感的価値尺度」(RSVM = risk sensitive value measure）による評価法が非常に有効であるという結論に到達した。これは、［期待効用理論］および［効用無差別価格］の理論をもとにしてリスク尺度や価値尺度の検討を行った結果である。

本講演では、リスク鋭感的価値尺度の概要とその特性を説明し、さらにこの価値尺度の（保険分野を含む）上記種々の分野への応用について検討する。

キーワード： project evaluation, concave monetary value measure, risk-sensitive value measure, real option approach, dynamic value measure, time consistency

目 次

1　はじめに

1.1　問題設定

[**問題意識**]

● 数理ファイナンス理論を適用しようとする場合には、その前提条件を十分に注意しなくてはいけない。効率的な市場の存在を前提として議論してよい問題ならば、標準的な理論（Black-Scholes の理論、および裁定理論（arbitrage theory））が適用可能である。

● しかしながら、この前提条件が満たされていないと考えられる場合が多く存在している。

● プロジェクトの評価の問題はこの典型である。

● 保険商品の場合にも、裁定理論を適用するための前提条件は満たされていない。(原資産過程を events の発生過程とする派生商品、制

約条件付き債券、とみなせる。)

● 金融オプションを主たる対象として発展してきた数理ファイナンスの標準的な理論（裁定理論）の適用が必ずしも妥当ではない対象に対しては、別の視点に基づいた新しい理論が必要である。

● プロジェクト評価の問題をはじめとして、ERM の問題など多くの研究課題が不確実性のあるキャッシュフローの評価の問題に帰着される。

[**目標**]

● 不確実性のあるキャッシュフローの、効率的な市場の存在を前提とできない場合に適用可能な価値評価法を確立したい。

● その価値評価法について、適用可能な対象、適用法、などを検討し有効性を検証したい。

[数理ファイナンスの基本概念]

・市場の存在、非存在

・無裁定条件の成立と非成立（no-arbitrage, not no-arbitrage）

・完備性と非完備性（complete, incomplete）

・リスク中立測度（マルチンゲール測度）

[数理ファイナンスの基本定理]

- [数理ファイナンスの第一基本定理]：

  無裁定市場である $\iff$ リスク中立測度の存在

- [数理ファイナンスの第二基本定理]：

  無裁定で完備 $\iff$ 唯一つのリスク中立測度の存在

原資産過程の市場

	無裁定市場 （証券などの金融資産）	非無裁定（保険、不動産、 実物資産、天候）
完備	市場I（無裁定・完備）	市場III（非無裁定・完備）
非完備	市場II（無裁定・非完備）	市場IV（非無裁定・非完備）

市場I（リスク中立測度の一意的な存在）：Black-Scholes モデル、2項過程モデル

市場II（無数のリスク中立測度の存在）：ジャンプ過程モデル、3項モデル（文献 [8] 等を参照せよ。）

市場III（特異な場合）：上昇のみの2項過程、

市場IV（相対での取引など、多く現れる）：他に入らないものすべて。

[**注意事項**]

- 「無裁定条件」を前提とする（(I)、(II)）の世界と「無裁定条件」を前提とすることができない（(III)、(IV)）の世界とは、全く別の世界とみるべきである。
- ［裁定理論］を適用できるのは、(I）と（II）の世界である。
- 「非完備市場」には（II) と（IV) とがあるが、両者は区別して議論されるべきである。（しかし、しばしば混同されているのが現状。）
- 金融オプションは（I）または（II）の世界に属している。一方、リアルオプションは（IV）の世界の属している。
- （I）または（II）の世界に基づいて得られた金融オプションに関する理論を、（IV）の世界にあるリアルオプションに機械的に適用しようとすることは不適切である。（別の視点・理論が必要。）

● 上の考察より、我々の「目標」は（IV）の世界で発生する不確実性のあるキャッシュフローの評価法の確立ということになる。

● その場合、「リスクと価値のバランスを考慮に入れた適切な評価尺度」として「リスク鋭感的価値尺度」 (RSVM = risk sensitive value measure）が有力な価値尺度である。

● 特に、経営戦略を内包するプロジェクト価値の評価のためには、動学的リスク鋭感的価値尺度とリアルオプション・アプローチを組み合わせた価値評価法「リスク鋭感的価値尺度法(Risk-Sensitive Value Measure Method)」がもっとも適切な価値評価法であるとみなせる。

● 「リスク鋭感的価値尺度法」は、保険も含め種々のタイプの評価の問題に対して有効な評価法である。

2　価値尺度

2.1　課題設定：キャッシュフローの価値評価

プロジェクト評価の問題を念頭に置いて議論を進める。

[**プロジェクト評価の基本問題**]

● プロジェクト評価の現在の標準的な方法は正味現在価値（NPV) 法である。

● この方法は分かりやすく使いやすいが、プロジェクトの持つ不確実性やプロジェクトの推進過程での柔軟性を十分に反映できていない。

● 強い不確実性を持ったキャッシュフロー（確率過程）に対する適切な評価法が必要である。

● その評価法は、価値とリスクとをバランスよく評価できること、プロジェクトの推進過程での柔軟性を反映しうることが必要である。

[**解決法の提案**]

- 不確実性を持ったキャッシュフローに対する適切な「<u>価値尺度</u>」(<u>value measure</u>）を与えることを考える。
- <u>凹マネタリ価値尺度</u>（concave monetary value measure）が有力な候補である。
- この評価法とリアルオプション・アプローチとを組み合わせることにより、有効なプロジェクト評価法が得られる。
- 現在までに得られている研究結果から見て、<u>リスク鋭感的価値尺度法</u>（Risk Sensitive Value Measure Method）と呼ぶべき評価法がもっとも適切であると判断できる。

⟨**この方法により、現在の標準的なNPV法の弱点を克服しうる。**⟩

[問題の定式化] 現在価値（present value (PV)） を考えるが、キャッシュフローの不確実性を扱えるようにするために次のようにランダム現在価値（RPV = the random present value of a random cash flow）を導入する。

- random cash flow $\mathbf{F} = \{F_0, F_1, \ldots, F_T\}$.
- ランダム現在価値(random present value): $RPV(\mathbf{F}) = \sum_0^T \frac{F_t}{(1+r)^t}$.

この $RPV(\mathbf{F})$ の価値を数値で表す関数 $v(RPV(\mathbf{F}))$ を適切に定義して、その値をキャッシュフローの価値と定義したい。

この関数 $v(\cdot)$ は確率変数に対して実数値を対応させる関数として定義されるべきものである。（価値尺度(value measure) と呼ぶ。）

- $v(RPV(\mathbf{F})) \in (-\infty, \infty)$

2.2 価値尺度の持つべき性質

L を確率変数からなるある線形空間とし、この空間 **L** の要素 X はリターンであると想定する。**L** 上で定義された実数値関数 $v(X)$ が価値の尺度(value measure)として持って欲しい最低限の性質として、次のものがある。

Definition 1 (凹マネタリ価値尺度)

(i) (Normalization) : $v(0) = 0$.

(ii) (Monetary property) : $v(X + m) = v(X) + m$.

(iii) (Monotonicity) : If $X \geq Y$, then $v(X) \geq v(Y)$.

(iv) (Concavity) : $v(\lambda X + (1 - \lambda)Y) \geq \lambda v(X) + (1 - \lambda)v(Y)$ for $0 \leq \lambda \leq 1$.

(v) (Law invariance) : $v(X) = v(Y)$ whenever $\mathrm{law}(X) = \mathrm{law}(Y)$.

Remark 1 性質 (i) と (ii) より、次の性質が従う：

$v(m) = m$, if m is deterministic (non-random).

Remark 2 次の性質は要求しない。

(vi) (Positive Homogeneity): $\quad \forall \lambda \in R^+, \quad v(\lambda X) = \lambda v(X)$.

（risk measure の場合には、この性質（coherence）を持つことが重要視されている。）

・この性質を要求しない理由は、§2.3 で説明する。

[価値尺度の候補]

1) Expectation: $E[X]$ or $E[u(X)]$, or discounted expectation: $\frac{E[X]}{d(X)}$.

2) 確実性等価（certainty equivalence）： $c(X)$

Definition 2 (cetainty equivalence)

$$u(c(X)) = E[u(X)]$$

3) Utility indifference price: $p(X)$

Definition 3 (効用無差別価格（utility indifference price）)

$$E[u(X - p(X))] = u(0) = 0. \tag{1}$$

4) 重みづけ期待値（Weighted expectation）：$E^{(w)}[X] = E[Xw(X)]$

ここで、$w(x) \geq 0$、 $E[w(X)] = 1$ である。

Definition 4 (marginal utility weighted expectation) $w(x)$ が次の形の場合、限界効用による重みづけ期待値になる。

$$w(x) = \frac{u'(x)}{E[u'(X)]}. \tag{2}$$

Example 1 $u(x) = \frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha x})$ の場合には次のようになる。

$$E^{(w)}[X] = E[Xw(X)] = \frac{E[Xu'(X)]}{E[u'(X)]} = \frac{E[Xe^{-\alpha X}]}{E[e^{-\alpha X}]}. \tag{3}$$

これはエッシャー変換値（*Esscher transformed value*）である。

Remark 3 エッシャー変換測度（*Esscher transformed measure*）は次の形である：

$$E_R[X] = \frac{E[Xe^{-\alpha R}]}{E[e^{-\alpha R}]}. \tag{4}$$

ここで R は市場リスク（*market risk*）である。

＜これらの中で、上の [凹マネタリ価値尺度 (concave monetary value measure)] の性質を持っているものはどれか？＞

Proposition 1 効用無差別価格 $p(X)$ は凹マネタリ価値尺度である。.

Remark 4 効用無差別価格は必ずしも次の *positive homogeneity condition* を満たさない。

$$\text{(Positive Homogeneity):} \quad \forall\lambda \in R^+, \quad \rho(\lambda X) = \lambda\rho(X).$$

Example 2 反例を示す。指数型効用関数の場合の効用無差別価格は

$$p(X) = -\frac{1}{\alpha}\log E[e^{-\alpha X}],$$

であり、$p(\lambda X) = \lambda p(X)$ が成立するためには次の関係が必要。

$$E[e^{-\lambda\alpha X}] = E[e^{-\alpha X}]^{\lambda}, \quad \forall\lambda > 0.$$

この条件は、X が *non-ranndom* な場合以外は成立しない。

Proposition 2 エッシャー変換値 $\frac{E[Xe^{-\alpha X}]}{E[e^{-\alpha X}]}$ は性質 (iv) を持たない。
(反例は、[6] $p.193, Prop.3$ を見よ。)

Remark 5 確実性等価が *monetary property* を持たないような効用関数の例は容易に作れる。

以上の結果から、**＜望ましい性質（凹マネタリ価値尺度の性質）を持っているのは、効用無差別価格(utility indifference price) として定まる価値尺度のみである＞**と結論される。

Proposition 3 (大域的凹性(global concavity)) 凹マネタリ価値尺度 $v(\cdot)$ は、次の性質を持つ。

(iv) ' (global concavity) :

$$v(\lambda X + (1-\lambda)Y) \le \lambda v(X) + (1-\lambda)v(Y) \quad \text{for } \lambda \le 0 \text{ or } \lambda \ge 1$$

Proposition 4 $v(\cdot)$ を 凹マネタリ価値尺度 とし (X, Y) を２つの確率変数とするとき、

$$\psi_{X,Y}(\lambda) = v(\lambda X + (1-\lambda)Y), \quad -\infty < \lambda < \infty,$$

は λ の 凹関数である。

特別な場合として $Y = 0$ とおいて、次の結果を得る。

Corollary 1 凹マネタリ価値尺度 $v(\cdot)$ に対して

$$\psi_X(\lambda) = v(\lambda X)$$

は λ の凹関数であり $\psi_X(0) = 0$ である。

[**最適規模（Optimal scale）**]

ある X_0 に対して $v(X_0) > 0$ とする。この時、もしも $v(\lambda X_0)$ が λ の関数として上に有界であるならば、最大値が存在する可能性がある。

Example 3 $v(X) = -\frac{1}{\alpha}\log E[e^{-\alpha X}]$ の場合を見る。このとき、

$$\frac{dv(\lambda X)}{d\lambda} = \frac{E[Xe^{-\alpha\lambda X}]}{E[e^{-\alpha\lambda X}]}$$

が成立していることに注意しておく。

確率変数 X_0 が次のように与えられているとする。

$$P(X_0 = a) = P(X_0 = b) = \frac{1}{2},$$

ここで $a < 0 < b$ とする。この時 、 $e^{-\alpha a} + e^{-\alpha b} < 2$ とすると

$$v(X_0) = -\frac{1}{\alpha}\log\left(\frac{e^{-\alpha a} + e^{-\alpha b}}{2}\right) > 0,$$

となり、

$$\frac{dv(\lambda X_0)}{d\lambda} = \frac{ae^{-\alpha\lambda a} + be^{-\alpha\lambda b}}{e^{-\alpha\lambda a} + e^{-\alpha\lambda b}}$$

より最適規模は

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{\alpha(b-a)}\log\left(-\frac{b}{a}\right)$$

である。

（注。後に一般的な公式を述べる。Proposition 8.）

§2.2 の結論より、望ましい性質を持つ価値尺度は効用無差別価格として得られものに限られる。その中で特に、指数型効用関数 $u_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha x})$ の場合に注目し、次の価値尺度を導入する。

Definition 5 (リスク鋭感的価値尺度（RSVM）) 次式で定まる凹マネタリ価値尺度

$$U^{(\alpha)}(X) = -\frac{1}{\alpha}\log E[e^{-\alpha X}], \quad \alpha > 0,$$

を<u>（リスク回避度 α の）リスク鋭感的価値尺度</u>（*risk-sensitive value measure*）と呼ぶ。

Remark 6　指数型効用関数

$$u_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha}\left(1 - e^{-\alpha x}\right)$$

から定まる効用無差別価格が上のものであることは、計算により容易に分かる。

Remark 7　このように呼ぶことにした理由は、価値評価の問題を動学化した時この価値尺度による評価法は「リスク鋭感的確率制御」の問題に帰着されることによる。（４章を参照）

Remark 8　次の近似式が成り立つ。

$$-\frac{1}{\alpha}\log E[e^{-\alpha X}] = E[X] - \frac{1}{2}\alpha V[X] + \cdots$$

特に、X がガウス型であるときには

$$-\frac{1}{\alpha}\log E[e^{-\alpha X}] = E[X] - \frac{1}{2}\alpha V[X]$$

が成立する。

Definition 6 (独立加法性 (Independence-Additivity)) 価値尺度 $v(X)$ が次の性質

e) (independence-additivity): $X \perp\!\!\!\perp Y$ （独立）$\Rightarrow v(X+Y) = v(X)+v(Y)$

を持つ時、$v(X)$ は独立加法性を持つと言う。

次のことは容易に確かめられる。

Proposition 5 指数型効用関数から定まる効用無差別価格は独立加法性を持つ。

上の逆に当たる次の結果が知られている。

Proposition 6 効用関数 $u(x)$ が $C^{(2)}$-級で $u(0) = 0$ *and* $u'(0) = 1$, *and* $u''(0) = \alpha$であるとする。この時この効用関数から定まる効用無

差別価格が独立加法性を持つならば、$u(x)$ は次の形をしている。

$$u(x) = u_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha}\left(1 - e^{-\alpha x}\right).$$

(Proof) See [12, p.92, Theorem 3.2.8].

Remark 9 エッシャー変換による価値尺度

$$\frac{E[Xe^{-\alpha X}]}{E[e^{-\alpha X}]}$$

も独立加法性を持つことを示すことができる。さらに次も言える。

Proposition 7 効用関数 $u(x)$ が $C^{(2)}$-級で $u(0) = 0$ *and* $u'(0) = 1$, *and* $u''(0) = \alpha$であるとする。この時この効用関数から定まる限界効用による重みづけ期待値が独立加法性を持つならば、$u(x)$ は指数型効用関数 $u_\alpha(x)$ である。

2.6 リスク鋭感的価値尺度 (RSVM) の優れた点

1．凹マネタリ価値尺度 の性質を持っている。

2．指数型効用関数の効用無差別価格である。

（同時に、確実性等価でもある。）

3．規模に対する最適性を議論できる。(次ページの命題参照。）

4．独立加法性を持っている。（効用無差別価格の中でこの性質を持つものは、Risk Sensitive Value Measure のみである。）

5．分布全体を考慮した上での、risk sensitive な価値尺度である。（リスクへの態度は、パラメーターに入っている。）

Proposition 8 確率変数 X が積率母関数を持ち、次の条件を満たしているものとする。

$$E[X] > 0, \quad P(X < 0) > 0. \tag{5}$$

この時このプロジェクトの最適な規模 λ_{opt} が定まり、λ_{opt} はリスク回避度 α の関数として次のように表現される。

$$\lambda_{opt} = \frac{C_X}{\alpha}, \quad \alpha > 0. \tag{6}$$

ここで C_X は X に依存して定まる正の定数で、次の方程式の解である。

$$E\left[Xe^{-C_X X}\right] = 0. \tag{7}$$

2.7　リスク鋭感的価値尺度適用の際の検討課題

リスク鋭感的価値尺度を具体的な問題に適用しようとする際には、次のような事項を確定する必要がある。

（1）モデル設定：評価すべきキャッシュフローの設定

（2）割引率の算定

（3）リスク回避度 α の算定

これらについては、後に検討する。

3　RSVM の応用例

3.1　キャッシュフローの評価への応用

ランダムなキャッシュフロー $\mathbf{F} = \{F_0, F_1, \ldots, F_T\}$ のランダム現在価値 $RPV(\mathbf{F}) = \sum_0^T \frac{F_t}{(1+r)^t}$ が与えられているものする。これの RSVM による評価は

$$U^{(\alpha)}(RPV(\mathbf{F})) = -\frac{1}{\alpha}\log E[e^{-\alpha RPV(\mathbf{F})}], \quad \alpha > 0,$$

で与えられる。

以下では、

$$X = RPV(\mathbf{F}) = \sum_0^T \frac{F_t}{(1+r)^t} \quad \text{（損益を示す確率変数）}$$

が与えられているものとして、それを議論の出発点とする。

Example 4 （数値例）。

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\},$$

$$P(\{\omega_1\}) = 0.1,\ P(\{\omega_2\}) = 0.6,\ P(\{\omega_3\}) = 0.3$$

$$X(\omega_1) = -5,\quad X(\omega_2) = 3,\quad X(\omega_3) = 5$$

とする。この時、次のようになる。

$$E[X] = 2.8$$

$$U^{(1)}(X) = -\log\left(\left(0.1e^{5} + 0.6e^{-3} + 0.3e^{-5}\right)\right)$$

$$\fallingdotseq -2.700$$

すなわち、平均で見るより $RSVM$ で見る方が厳しい評価になっている。（これは、常に成立する性質である。）

ここでは、ある事業を計画する際に、それに伴って生じるリスクを軽減するために金融派生証券等を購入する場合の価値判断を考察する。

$v(X)$ を凹マネタリ価値尺度とする。

X： 基礎となるキャッシュフローのランダムな現在価値。

Y： 考察対象の金融派生証券（制約条件付き債権とする）。

Definition 7　次式で定義される $v(Y|X)$

$$v(Y|X) = v(X+Y) - v(X)$$

を、 $\underline{Y \text{ の } X \text{ への付加価値}}$ と呼ぶ。

Remark 10 効用無差別価格の考え方による Y の X への付加価

値は

$$E[u((Y-p)+X)]=E[u(X)]$$

を満たす p である。$u(x)=u_\alpha(x)=\frac{1}{\alpha}(1-e^{-\alpha x})$ の場合（すなわち、$RSVM$ の場合）には、上の $v(Y|X)$ はこの p と一致する。

Proposition 9 $v(Y|X)$ は X を固定したとき Y の関数として凹マネタリ価値尺度になっている。

- 仮に $v(X)$ が負の場合でも、適当な Y を購入することにより

$$v(X+Y)-\pi(Y)>0, \quad （\pi(Y)\,\text{は}\,Y\,\text{の価格}）$$

と出来るならば、Y の購入を前提にしてプロジェクト X を実行する価値があると判断できる。

Example 5 （数値例）。X は前の同じものとする。

$$P(\{\omega_1\}) = 0.1,\ P(\{\omega_2\}) = 0.6,\ P(\{\omega_3\}) = 0.3$$

$$X(\omega_1) = -5,\quad X(\omega_2) = 3,\quad X(\omega_3) = 5$$

$$U^{(1)}(X) \fallingdotseq -2.700$$

$U^{(1)}(X) < 0$ であるから、X は単独では実行されない。

このとき次のような制約条件付き債権 Y があったとする。

$$Y(\omega_1) = 4,\quad Y(\omega_2) = 0,\quad Y(\omega_3) = 0.$$

その場合には

$$U^{(1)}(X+Y) = -\log\left(\left(0.1e^{1} + 0.6e^{-3} + 0.3e^{-5}\right)\right) \fallingdotseq 1.192$$

となる。ここで、もし Y の価格 $\pi(Y)$ が 1.192 より安ければ

$$U^{(1)}(X+Y) - \pi(Y) \fallingdotseq 1.192 - \pi(Y) > 0$$

となり、X は Y の利用を前提に実行可能と判断されよう。

一方売り手の立場から見ると、 $E[Y] = 0.4$ となるので Y の価格 $\pi(Y)$ が 0.4 より高ければ Y を売る価値があると判断できる。

以上の考察から、Y の価格 $\pi(Y)$ が

$$0.4 < \pi(Y) < 1,192$$

ならば Y の売買が成立し、事業 X も実行されるであろう。

- 参考までに、$U^{(1)}(Y)$ と $U^{(1)}(Y|X)$ は次のようになる。

$$\begin{aligned} U^{(1)}(Y) &\fallingdotseq 0.103 \\ U^{(1)}(Y|X) &\fallingdotseq 1.192 - (-2.700) = 3.892 \end{aligned}$$

これより、Y は単独での価値は低いが X に対して高い付加価値を付けていることが分かる。（再保険の価値評価は、この例。）

上で金融派生商品としたところを、保険で置き換えて考えることも可能である。これを、より保険らしい数値例で見ておこう。

Example 6（数値例）。

$$P(\{\omega_1\}) = 0.01, P(\{\omega_2\}) = 0.60, P(\{\omega_3\}) = 0.39$$

（事業）
$$X(\omega_1) = -20, \quad X(\omega_2) = 3, \quad X(\omega_3) = 5$$

（保険）
$$Y(\omega_1) = 20, \quad Y(\omega_2) = 0, \quad Y(\omega_3) = 0$$

$$U^{(1)}(X) = -\log\left(\left(0.01e^{20} + 0.6e^{-3} + 0.39e^{-5}\right)\right) \fallingdotseq -15.395$$

$$U^{(1)}(X+Y) = -\log\left(\left(0.01e^{0} + 0.6e^{-3} + 0.39e^{-5}\right)\right) \fallingdotseq 3.158$$

Y の価格 $\pi(Y)$ が 3.158 より安ければ、X は Y を購入することを前提に実行可能と判断されよう。

一方 Y の売り手（保険会社）は、Y に対する支払いの平均は 0.2 となるので、Y の価格 $\pi(Y)$ を 0.2 より高く設定出来れば販売する価値があると判断できる。（大数の法則を前提できる場合。）

すなわち、

$$0.2 < \pi(Y) < 3.158$$

に設定されれば、この保険 Y は両者にとって有用なものとなる。

- 参考。$U^{(1)}(Y)$ と $U^{(1)}(Y|X)$ は次のようになる。

$$\begin{aligned} U^{(1)}(Y) &\doteqdot 0.010 \\ U^{(1)}(Y|X) &\doteqdot 3.158 - (-15.395) = 18.553 \end{aligned}$$

これより、Y は単独での価値は低いが X に対して非常に高い付加価値を付けていることが分かる。

3.4 考察

・上に見た例では $v(X+Y) > v(X)+v(Y)$ であった。しかし、いつもこうなるわけではなく $v(X+Y) < v(X)+v(Y)$ となる場合もある。($v(X)$ が RSVM のとき、独立加法性より、X と Y が独立な場合には $v(X+Y) = v(X)+v(Y)$ である。)

・複数の事業 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ を扱う場合、$v(X_1)+v(X_2)+\cdots+v(X_n)$ ではなく $v(X_1+X_2+\cdots+X_n)$ を見ること。(総合的な評価は、個々の評価の和ではなく、統合されたものの評価である。)

・$v(X_1+X_2+\cdots+X_n)$ の値を高めるような事業の組み合わせを目指すことになる。

4　動学的価値尺度（Dynamic Value Measures）

プロジェクトの推進の場合などのように、キャッシュフローの発生過程で柔軟性のある戦略を取れる場合も多くある。このような柔軟性をモデルの中に取り入れて評価できるようにするためには、価値尺度を動学化することが必要になる。

4.1　リアルオプション・アプローチ

プロジェクトの推進過程に現れるオプションは、戦略として定式化できる。それを $\Phi = \{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_T\}$ としよう。この戦略に対応したキャッシュフローを $\mathbf{F}^{(\Phi)} = \{F_0^{(\Phi)}(= F_0), F_1^{(\Phi)}, \ldots, F_T^{(\Phi)}\}$ とすると、

$$RPV(\mathbf{F}^{(\Phi)}) = \sum_{t=0}^{T} \tilde{F}_t^{(\Phi)} = \sum_{t=0}^{T} \frac{F_t^{(\Phi)}}{(1+r)^t}$$

となり、その価値は次式のようになる。

$$V^{(\Phi)} = V(\mathbf{F}^{(\Phi)}) = v(RPV(\mathbf{F}^{(\Phi)})).$$

こうして、次の問題に行き着く。

[確率的最適制御の問題]

$$\overline{V} = \sup_{\Phi} V^{(\Phi)} = \sup_{\Phi} V(\mathbf{F}^{(\Phi)}) = \sup_{\Phi} v(RPV(\mathbf{F}^{(\Phi)})).$$

[採否の判断]

$\overline{V} \geq 0 \;\Rightarrow\;$ 採用可。

$\overline{V} < 0 \;\Rightarrow\;$ 不採用。

Definition 8 (動学的価値尺度（Dynamic Value Measure）) 各 t, $t = 0, 1, 2, \ldots, T$, に対して凹マネタリ価値尺度 $v_t(\cdot) : L(\mathcal{F}_T) \to L(\mathcal{F}_t)$ が与えられているとき、これを動学的凹マネタリ価値尺度と呼ぶ。

Remark 11 分布不変性は、次のように変える。

(v) (Law invariance): $\mathrm{law}(v(X)) = \mathrm{law}(v(Y))$ if $\mathrm{law}(X) = \mathrm{law}(Y)$.

Definition 9 (時間的整合性（time-consistency）) 動学的凹マネタリ価値尺度 $\{v_t(X), t = 0, 1, 2, \ldots, T\}$ が次の条件

$$v_t(X) = v_t(v_{t+1}(X)), t = 0, 1, 2, \ldots, T - 1, \tag{8}$$

を満たしているとき、時間的整合性を持つと言う。

動学的凹マネタリ価値尺度 $\{v_t(X), t = 0, 1, 2, \ldots, T\}$ が時間的整合性を持つとき、次の公式が成立する。

$$v_0\left(RPV(\mathbf{F})\right) = v_0\left(\tilde{F}_0 + \sum_{s=1}^{T} \tilde{F}_s\right) = \tilde{F}_0 + v_0\left(\sum_{s=1}^{T} \tilde{F}_s\right)$$

$$v_0\left(\sum_{s=1}^{T} \tilde{F}_s\right) = v_0\left(v_1\left(\tilde{F}_1 + \sum_{s=2}^{T} \tilde{F}_s\right)\right) = v_0\left(\tilde{F}_1 + v_1\left(\sum_{s=2}^{T} \tilde{F}_s\right)\right)$$

同様にして次式を得る。

$$\begin{aligned} v_t\left(\sum_{s=t+1}^{T} \tilde{F}_s\right) &= v_t\left(v_{t+1}\left(\sum_{s=t+1}^{T} \tilde{F}_s\right)\right) = v_t\left(v_{t+1}\left(\tilde{F}_{t+1} + \sum_{s=t+2}^{T} \tilde{F}_s\right)\right) \\ &= v_t\left(\tilde{F}_{t+1} + v_{t+1}\left(\sum_{s=t+2}^{T} \tilde{F}_s\right)\right) \end{aligned}$$

ここで $V_t = \tilde{F}_t + v_t\left(\sum_{s=t+1}^{T} \tilde{F}_s\right)$ と置くと、上の関係式より

$$
\begin{aligned}
V_t &= \tilde{F}_t + v_t\left(\tilde{F}_{t+1} + v_{t+1}\left(\sum_{s=t+2}^{T} \tilde{F}_s\right)\right) = \tilde{F}_t + v_t\left(V_{t+1}\right), \quad t = 0, 1, \ldots, T-1, \\
V_T &= \tilde{F}_T.
\end{aligned}
$$

を得る。この関係式から再帰的に

$$
V_t; t = T-1, T-2, \ldots, 0,
$$

を求めることができ、最終的に

$$
V_0 = \tilde{F}_0 + v_0\left(\sum_{s=1}^{T} \tilde{F}_s\right) = v_0\left(\sum_{s=0}^{T} \tilde{F}_s\right) = V(\mathbf{F})
$$

が求まる。

上で時間的整合性を持った動学的凹マネタリ価値尺度に対して行った考察を、戦略（コントロール） $\Phi = \{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_T\}$ を導入した場合に行うことにより、次のような結果が得られる。

$$\begin{aligned}
\overline{V} &= \sup_{\Phi}\left\{ v_0\left(\tilde{F}_0 + \sum_{t=1}^{T} \tilde{F}_t^{(\Phi)}\right)\right\} = \sup_{\Phi}\left\{\tilde{F}_0 + v_0\left(\sum_{t=1}^{T} \tilde{F}_t^{(\Phi)}\right)\right\} \\
&= \sup_{\Phi}\left\{\tilde{F}_0 + v_0\left(v_1\left(\sum_{t=1}^{T} \tilde{F}_t^{(\Phi)}\right)\right)\right\} \\
&= \tilde{F}_0 + \sup_{\Phi}\left\{ v_0\left(\tilde{F}_1^{(\Phi)} + v_1\left(\sum_{t=2}^{T} \tilde{F}_t^{(\Phi)}\right)\right)\right\} \\
&= \tilde{F}_0 + \sup_{\phi_1}\left\{ v_0\left(\tilde{F}_1^{(\Phi)} + \sup_{\phi_2,\ldots,\phi_T}\left\{ v_1\left(\sum_{t=2}^{T} \tilde{F}_t^{(\Phi)}\right)\right\}\right)\right\} \\
&= \cdots
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
= \ & \tilde{F}_0 + \sup_{\phi_1} \Biggl\{ v_0 \Biggl(\tilde{F}_1^{(\Phi)} + \sup_{\phi_2} \{ v_1 (\cdots \\
& \quad \cdots \sup_{\phi_{T-1}} \Biggl\{ v_{T-2} \Biggl(\tilde{F}_{T-1}^{(\Phi)} + \sup_{\phi_T} \Bigl\{ v_{T-1} \Bigl(\tilde{F}_T^{(\Phi)} \Bigr) \Bigr\} \Biggr) \Biggr\} \cdots \Biggr) \Biggr\} \Biggr) \Biggr\}.
\end{aligned}
$$

この公式は時間的に後ろ向きの再帰的な計算式である。キャッシュフローと戦略のプロセスの確率過程としての構造が与えられないと、これより先の確率的最適制御の議論は一般論的には進められないが、たとえばマルコフ的構造になっていれば、ベルマン・プリンシプル（Bellman-principle）の方法を適用することができる。

静学的な価値尺度

[リスク鋭感的価値尺度 (RSVM)]

$$U^{(\alpha)}(X) = -\frac{1}{\alpha}\log E[e^{-\alpha X}], \quad (\alpha > 0),$$

を動学化したものとして、次のものが自然に考えられる。

[動学的リスク鋭感的価値尺度 (DRSVM)]

$$U_t^{(\alpha)}(X) = -\frac{1}{\alpha}\log E[e^{-\alpha X}|\mathcal{F}_t], \quad t = 0, 1, \ldots, T.$$

これが凹マネタリ価値尺度になっていることは、容易に確かめられる。さらに次のことも言える。

Proposition 10 上で定義された [動学的リスク鋭感的価値尺度] は時間的整合性を持つ。

（証明）次式が成立する。

$$
\begin{aligned}
U_t^{(\alpha)}\left(U_{t+1}^{(\alpha)}(X)\right) &= -\frac{1}{\alpha}\log E[e^{-\alpha\left(-\frac{1}{\alpha}\log E[e^{-\alpha X}|\mathcal{F}_{t+1}]\right)}|\mathcal{F}_t] \\
&= -\frac{1}{\alpha}\log E[E[e^{-\alpha X}|\mathcal{F}_{t+1}]|\mathcal{F}_t] \\
&= -\frac{1}{\alpha}\log E[e^{-\alpha X}|\mathcal{F}_t].
\end{aligned}
$$

(Q.E.D.)

動学的リスク鋭感的価値尺度の重要性を示す次のような結果が得られている。

Proposition 11 ([3]) 効用無差別価格として定まる動学的凹マネタリ価値尺度の中で時間的整合性を持つものは、ほぼ上の[動学的リスク鋭感的価値尺度]に限られる。

4.5　リスク鋭感的価値尺度法 (RSVM-Method) の優れた点

1．凹マネタリ価値尺度 の性質を持っている。

2．指数型効用関数の効用無差別価格である。

3．規模に対する最適性を議論できる。

4．independece-additivity を持っている。（効用無差別価格の中でこの性質を持つものは、Risk Sensitive Value Measure のみである。）

5．分布全体を考慮した上での、risk sensitive な価値尺度である。（リスクへの態度は、パラメーターに入っている。）

6．time-consistency を持っている。（効用無差別価格の中でこの性質を持つものは、Risk Sensitive Value Measure のみである。）これより、価値過程に対する再帰的な関係式が得られ、確率的最適制御理論の多くの手法が適用可能である。

4.6　再帰的計算式

時間的整合性なる性質より導かれる再帰的計算式を [リスク鋭感的価値尺度] の場合に見ておく。

$$U^{(\alpha)}(RPV(\mathbf{F})) = -\frac{1}{\alpha}\log E\left[e^{-\alpha\sum_{s=0}^{T}\tilde{F}_s}\right], \tag{9}$$

and

$$U_t^{(\alpha)}(RPV(\mathbf{F})) = -\frac{1}{\alpha}\log E\left[e^{-\alpha\sum_{s=0}^{T}\tilde{F}_s}|\mathcal{F}_t\right], \quad t = 0, 1, \ldots, T. \tag{10}$$

戦略のある場合を考えるので、

$$\overline{V}^{(\alpha)} = \sup_{\Phi}\left\{-\frac{1}{\alpha}\log E\left[e^{-\alpha\sum_{t=0}^{T}\tilde{F}_t^{(\Phi)}}\right]\right\} \tag{11}$$

を求める問題になる。これは、リスク鋭感的確率制御の問題である。

$$
\begin{aligned}
\overline{V}^{(\alpha)} &= \sup_{\Phi}\left\{-\frac{1}{\alpha}\log E\left[e^{-\alpha\left(\sum_{t=0}^{T}\tilde{F}_t^{(\Phi)}\right)}\right]\right\} \\
&= \sup_{\Phi}\left\{-\frac{1}{\alpha}\log\left(e^{-\alpha\tilde{F}_0}E\left[e^{-\alpha\left(\sum_{t=1}^{T}\tilde{F}_t^{(\Phi)}\right)}\right]\right)\right\} \\
&= \tilde{F}_0+\sup_{\Phi}\left\{-\frac{1}{\alpha}\log E\left[e^{-\alpha\left(\sum_{t=1}^{T}\tilde{F}_t^{(\Phi)}\right)}\right]\right\} \\
&= \tilde{F}_0-\frac{1}{\alpha}\log\left(\inf_{\Phi}\left\{E\left[e^{-\alpha\left(\sum_{t=1}^{T}\tilde{F}_t^{(\Phi)}\right)}\right]\right\}\right) \\
&= \tilde{F}_0-\frac{1}{\alpha}\log\left(\inf_{\Phi}\left\{E\left[E\left[e^{-\alpha\left(\sum_{t=1}^{T}\tilde{F}_t^{(\Phi)}\right)}|\mathcal{F}_1\right]\right]\right\}\right) \\
&= \tilde{F}_0-\frac{1}{\alpha}\log\left(\inf_{\Phi}\left\{E\left[e^{-\alpha\tilde{F}_1^{(\Phi)}}E\left[e^{-\alpha\left(\sum_{t=2}^{T}\tilde{F}_t^{(\Phi)}\right)}|\mathcal{F}_1\right]\right]\right\}\right) \\
&= \tilde{F}_0-\frac{1}{\alpha}\log\left(\inf_{\phi_1}\left\{E\left[e^{-\alpha\tilde{F}_1^{(\Phi)}}\inf_{\phi_2,\ldots,\phi_T}\left\{E\left[e^{-\alpha\left(\sum_{t=2}^{T}\tilde{F}_t^{(\Phi)}\right)}|\mathcal{F}_1\right]\right\}\right]\right\}\right) \\
&= \cdots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= \ & \tilde{F}_0 - \frac{1}{\alpha} \log \left(\inf_{\phi_1} \left\{ E \left[e^{-\alpha \tilde{F}_1^{(\Phi)}} \inf_{\phi_2} \{ E [\ \cdots \right.\right.\right. \\
& \left.\left.\left. \cdots \inf_{\phi_{T-1}} \left\{ E \left[e^{-\alpha \tilde{F}_{T-1}^{(\Phi)}} \inf_{\phi_T} \left\{ E \left[e^{-\alpha \tilde{F}_T^{(\Phi)}} | \mathcal{F}_{T-1} \right] \right\} | \mathcal{F}_{T-2} \right] \right\} \cdots | \mathcal{F}_1 \right] \right\} \right] \right\} \right) .
\end{aligned} \tag{12}
$$

Remark 12 エッシャー変換など他の価値尺度を採用した時、戦略 (コントロール）を導入した場合に問題を動学化して再帰的な計算法が成り立つように構成することは無理であろう。

Remark 13　動学的リスク鋭感的価値尺度を連続時間の形で設定することも可能である。

5　モデルの設定法

状態空間が有限集合である場合で述べる。

5.1　マルコフ過程モデル

・状態空間： $\mathcal{X} = \{x_1, s_2, \ldots, x_n\}$

・状態過程: $X_t,\ t = 0, \ldots, T$. $\mathcal{F}_t$-適合的な $\mathcal{X}$ 上のマルコフ過程。 .

・キャッシュフロー: $F_t = f(t, X_t);\ t = 0, \ldots, T$.

・割引キャッシュフロー： $\tilde{F}_t = \frac{F_t}{(1+r)^t};\ t = 0, \ldots, T$.

・ランダム現在価値: $RPV(\mathbf{F}) = \sum_{t=0}^{T} \tilde{F}_t = \sum_{t=0}^{T} \frac{F_t}{(1+r)^t}$

● シナリオ分析やツリー構造分析の方法はこのタイプのモデル化に当てはめることができる。このモデルに「リスク鋭感的価値尺度」を適用することにより、より適切な評価が可能となる。

・系の状態空間： $\mathcal{X} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$

・コントロールの空間: $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \ldots, a_d\}$

・戦略：$\Phi = \{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_T\}$, $\phi_t : \mathcal{X} \to \mathcal{A}$

・内的不確実性を起こす確率過程： $I_t,\ t = 1, \ldots, T$。 $\mathcal{F}_t$-適合的で I_t は $\mathcal{F}_{t-1}$ と独立としておく。I_t の状態空間：$\mathcal{I} = \{i_1, i_2, \ldots, i_m\}$

・系の状態過程：$X_t^{(\Phi)} = g(t, X_{t-1}^{(\Phi)}, \phi_t(X_{t-1}^{(\Phi)}), I_t),\ t = 1, \ldots, T,$で、

$X_0^{(\Phi)}$ は与えられた初期値。

＊ここで、次のことを注意せよ！

・ $\phi_t(X_{t-1}^{(\Phi)}),\ t = 1, \ldots, T : \mathcal{F}_t$-可予測な戦略,

・ $X_t^{(\Phi)},\ t = 0, \ldots, T : \mathcal{F}_t$-適合的なマルコフ過程。

・キャッシュフロー: $F_0^{(\Phi)} = f_0(X_0^{(\Phi)}),\ F_t^{(\Phi)} = f(t, X_t^{(\Phi)}, \phi_t(X_{t-1}^{(\Phi)})),\ t = 1, \ldots, T$、

・割引キャッシュフロー： $\tilde{F}_t^{(\Phi)} = F_t^{(\Phi)}/(1+r)^t;\ t = 0, \ldots, T.$

・ランダム現在価値: $RPV(\mathbf{F}^{(\Phi)}) = \sum_{t=0}^{T} \tilde{F}_t^{(\Phi)}$、

が定まり、その価値が $U^{(\alpha)}(RPV(\mathbf{F}^{(\Phi)}))$ で与えられる。そして、

$$\overline{V}^{(\alpha)} = \sup_{\Phi} U^{(\alpha)}(RPV(\mathbf{F}^{(\Phi)}))$$

が、戦略を考慮したプロジェクトの価値となる。

5.3 外部要因がある場合のモデル設定

経済の動向などの外部要因を考慮に入れたモデル化。

・系の状態空間： $\mathcal{X} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$

・コントロールの空間: $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \ldots, a_d\}$

・内的不確実性を起こす確率過程： $I_t,\ t=1,\dots,T$。 $\mathcal{F}_t$-適合的で I_t は $\mathcal{F}_{t-1}$ と独立としておく。I_t の状態空間：$\mathcal{I}=\{i_1,i_2,\dots,i_m\}$

・外的要因過程：$Y_t,\ t=0,1,\dots,T$. $\mathcal{Y}=\{y_1,y_2,\dots,y_l\}$ 上の $\mathcal{F}_t$-適合的なマルコフ過程

・戦略： $\Phi=\{\phi_1,\phi_2,\dots,\phi_T\},\ \phi_t:\mathcal{X}\times\mathcal{Y}\to\mathcal{A}$

・系の状態過程：$X_t^{(\Phi)}=g(t,X_{t-1}^{(\Phi)},\phi_t(X_{t-1}^{(\Phi)},Y_{t-1}),I_t,Y_t),\ t=1,\dots,T$、

$X_0^{(\Phi)}$ は与えられた初期値。

次のことを注意せよ。

・ $\phi_t(X_{t-1}^{(\Phi)},Y_{t-1}),\ t=1,\dots,T:\mathcal{F}_t$-可予測な戦略,

・$(X_t^{(\Phi)},Y_t),\ t=0,\dots,T:\mathcal{F}_t$-適合的なマルコフ過程。

・キャッシュフロー: $F_0^{(\Phi)} = f_0(X_0^{(\Phi)}, Y_0)$,

$$F_t^{(\Phi)} = f(t, X_t^{(\Phi)}, Y_t, \phi_t(X_{t-1}^{(\Phi)}, Y_{t-1})),\ t = 1, \ldots, T.$$

・割引キャッシュフロー： $\tilde{F}_t^{(\Phi)} = F_t^{(\Phi)}/(1+r)^t;\ t = 0, \ldots, T.$

・ランダム現在価値: $RPV(\mathbf{F}^{(\Phi)}) = \sum_{t=0}^{T} \tilde{F}_t^{(\Phi)}$、

が定まり、その価値が $U^{(\alpha)}(RPV(\mathbf{F}^{(\Phi)}))$ で与えられる。そして、

$$\overline{V}^{(\alpha)} = \sup_{\Phi} U^{(\alpha)}(RPV(\mathbf{F}^{(\Phi)}))$$

が、外部要因と戦略を考慮したプロジェクトの価値となる。

例。このタイプのモデル化の応用例としては、[10] で扱われた設備の維持管理の評価の問題がある。

6　割引率とリスク回避度の算定

6.1　割引率の算定法

$RPV(\mathbf{F}) = \sum_{t=0}^{T} F_t d_t = \sum_{t=0}^{T} \frac{F_t}{(1+r_t)^t}$ の r_t として、

- 期間 t の国債の利子率 r_{0t} を採用することが考えられる。
- また、r_t をランダムなものとしてモデル化することも可能。

6.2　リスク回避度 α の算定法

リスク回避度 α は価値判断する主体(個人、企業、など)により異なる。アンケートまたは過去の実績のデータから推定することになるが、$RSVM$ の性質を利用した次のような推定法が考えられる。

- 平均分散分析との関係を利用して推定する。
- VaR との関係を考察して、推定する。
- 最適な規模についての判断から推定する。

7　まとめ

● [リスク鋭感的価値尺度法(RSVM-Method)] がプロジェクトの評価法として適切なものであることを示した。

● この方法の適用対象（ランダムな要素のあるものの価値評価のほぼあらゆる問題に対応可能）：

・研究開発や地財の価値評価、

・ベンチャー企業の将来性の評価、

・エネルギー開発などの巨大プロジェクトの評価、

・ポートフォリオの価値評価、

・投資信託の選択の基準設定、

・設備や工場の最適なメンテナンス法、

など。

- この方法の適用に当たっては、「評価対象のモデル設定」、「割引ファクターの算定」、「リスク回避度の算定」、の３つが必須の要件である。（これらは、今後検討を深めるべき課題である。）
- この方法の有効性を実証的に検証するためには、評価すべき対象事例を具体的に抱えている実務者と共同研究を進めることが必要になる。

参考文献

[1] P. Cheridito, F. Delbaen and M. Kupper (2006), 'Dynamic Monetary Risk Measures for Bounded Discrete-Time Processes,' *Electronic J. Probab.* 11, 57-106.

[2] T. Hirose, H. Miyauchi, and T. Misawa (2011), 'Project Value Assesment of Thermal Power Plant Based on RNPV Probit Model Considdering Real Option,' (submitted).

[3] M. Kupper and W. Schachermayer (2009), 'Representation Results for Law Invariant Time Consistent Functions, *Mathematics and Financial Economics*, Vol.2, No.3, 189-210.

[4] T. Misawa (2010), 'Simplification of Utility Indifference Net Present Value Method', *OIKONOMIKA, Nagoya City University*, Vol.46, No.3, 123-135.

[5] 宮原　孝夫 (2006), 「期待効用理論に基づくプロジェクトの価値評価法」、*Discussion Papers in Economics, Nagoya City University,* No.446. 1-21.

[6] Y. Miyahara (2010), 'Risk-Sensitive Value Measure Method for Projects Evaluation,'*Journal of Real Options and Strategy*, Vol.3, No.2, 185-204.

[7] 宮原　孝夫 (2011)、「リスク鋭感的価値尺度によるプロジェクトの評価」、*Discussion Papers in Economics, Nagoya City University*, No.531, 1-29.

[8] Y. Miyahara (2011), *Option pricing in Incomplete Markets: Modeling Based on Geometric Levy Processes and Minimal Entropy Martingale Measures*, ICP.

[9] H. Miyauchi, N. Hirata, and T. Misawa (2011), 'Risk Assesment for Generation Investment by Probit Model Simplified UNPV Method,' (preprint).

[10] 三輪昌隆、宮原孝夫 (2010)、「設備維持管理計画の価値評価に対する制御マルコフ過程によるリアルオプションアプローチ」、リアルオプション研究、Vol.3, No.1, 1-23.

[11] Y. Miyahara and Y. Tsujii(2011),' Applications of Risk-Sensitive Value Measure Method to Portfolio Evaluation Problems,' *Discussion Papers in Economics, Nagoya City University*, No.542, 1-12. (in preparation).

[12] T. Rolski, H. Schmidli, V. Schmidt and J. Teugels (1999), *Stochastic Processes for Insurance and Finance,* Wiley.