Lundberg モデルにおける存続確率について

2014/10/03

西岡國雄　　（中央大学商学部）
nishioka@tamacc.chuo-u.ac.jp
五十嵐 徹　（一橋大学商学研究科修士課程）
cm132101@g.hit-u.ac.jp

概要　損害保険数理における Lundberg モデルにおいて，存続確率はある積分微分方程式を満たすことが知られている．しかし，この積分微分方程式を解くことは一般には難しく，解析的な解が得られるのは個々のクレーム額の分布が特定のパラメータのガンマ分布（指数分布を含む）などの場合に限られる．本稿では，クレーム額の分布がデルタ分布およびその混合分布の場合について，存続確率を初期サープラスの値を固定するごとに有限和の形で求める．

1　基本事項

1.1　Lundberg モデル

Lundberg モデルにおいて，保険会社のサープラス過程は次のドリフト付き複合 Poisson 過程で与えられる：

$$U_t := u + c\,t - S_t. \tag{1.1}$$

ただし，

$$\begin{cases} u > 0, \\ S_t := \sum_{n=1}^{N_t} X_n, \qquad \sum_{n=1}^{0} \cdot \equiv 0, \\ (X_n) : \text{独立に同分布 } F_X \text{ に従う正値確率変数で，} \mu := \mathsf{E}[X_n] < \infty, \\ (N_t) : \text{強度 } \gamma > 0 \text{ の Poisson 過程}, \\ c = \gamma(1+\theta)\mu, \qquad \text{with } \theta > 0 \quad (\theta : \text{安全割増率とよぶ}) \end{cases}$$

とする．u を初期サープラス，ct を時刻 t までの保険料受け取り総額，N_t を時刻 t までのクレーム件数，X_n を n 回目のクレーム支払額，S_t を時刻 t までのクレーム支払総額と解釈する．このサープラス過程 (U_t) が 0 を下回ることを破産とよび，破産時刻を

$$\tau := \inf\{t \geq 0 \mid U_t < 0\} \tag{1.2}$$

と定義する．Lundberg モデルにおける古典的な問題の一つにサープラスが破産しない確率

$$\phi(u) := \mathsf{P}\big(U_t \geq 0,\ \forall t \geq 0\big) = \mathsf{P}\big(\tau = \infty\big) \tag{1.3}$$

の計算があるが，これを求めるために ϕ の積分微分方程式

$$\phi'(u) = \rho\,\phi(u) - \rho \int_0^u \phi(u-x)\,dF_X(x), \quad \rho \equiv \frac{\gamma}{c} = \frac{1}{(1+\theta)\,\mu}. \tag{1.4}$$

および，ϕ の境界条件

$$\phi(\infty) = 1, \qquad \phi(0) = \frac{\theta}{1+\theta} \tag{1.5}$$

を利用する．