

## 研究論文

## VAR モデルを用いた死亡率予測手法の提案と予測精度の比較

系 行健\* 白石 博†

2018 年 4 月 4 日投稿

2018 年 9 月 25 日受理

## 概要

近年、死亡率の暦年変化を記述する動的モデルとして、Lee-Carter (LC) モデルが広く採用されている。しかしながら、我が国の平成 14 年将来人口推計において、実績値の死亡率が LC モデルを用いた推計と比べ大きくずれて進んできたことが観察され、我が国の近年の死亡動向の特徴により適合した将来死亡率予測モデルを開発する必要性が生じている。

本論文では、LC モデルの枠組みに VAR (多変量自己回帰) モデルを導入し、地域間 (各都道府県間) の従属構造を考慮したモデルを考える。LC モデルでは、暦年効果を単変量の ARIMA (自己回帰和分移動平均) モデルに当てはめるなどして将来予測を行うが、本論文では VAR モデルを当てはめ、Granger Causality が存在するか否かの検定を行い、採択されたものを本論文における考察モデルとして構成する。さらに、実際の各都道府県ごとの死亡率データに従来の LC モデルおよび考察モデルを当てはめ、将来死亡率の予測精度の比較を行う。

キーワード：Lee-Carter モデル、将来死亡率予測、VAR (多変量自己回帰) モデル、LC-VAR モデル、Granger Causality

## 1 はじめに

将来死亡率予測は、年金財政問題などを考える際の重要な課題の一つである。例えば、小暮・長谷川 (2011) では、将来死亡率の不確定性が年金計算におけるいわゆる「長生きリスク」(longevity risk) を引き起こすことを背景に、死亡率の変動が支払うべき年金保険料に与える影響の評価を行っている。また、内閣府 (2016) によれば、我が国の総人口は今後、長期の人口減少過程に入り、2026 年に人口 1 億 2000 万人を下回った後も減少を続け、2048 年には 1 億人を割って 9913 万人となり、2060 年には 8674 万人になると推計されており、これを受けて様々な社会制度政策が検討されている。このような背景から、死亡率の暦年変化を記述する動的なモデル化を試みることは社会的に十分意義があると考えられる。近年、暦年変化を含めた死亡率曲線を記述する動的なモデルとして、Lee and Carter (1992) の提案した Lee-Carter (LC) モデルが広く採用されている。本論文では、従来の (単変量) LC モデルを多変量モデルへ拡張し、各変量間の従属性を考慮することで予測精度の向上を計る。解析例として、データを活用しやすく精度分析に適した都道府県別死亡率を利用し、地域間の従属性を考慮することで既存の LC モデルとの予測精度を比較する。近年、Cairns et.al. (2006) によって提案された CBD モデルをはじめとして、多くの拡張 LC モデルが提案されているが、これら既存の拡張 LC モデルの多くは、過去の自身の死亡率データのみをモデルに当てはめるといった点では同様の手法と考えられる。一方で本研究のように、変量間の従属性を考慮した拡張の場合、他の変量の情報を利用すること

\* 慶應義塾大学大学院理工学研究科基礎理工学専攻

† 慶應義塾大学理工学部数理科学科; E-mail: shiraishi@math.keio.ac.jp

が可能となり、違った視点での予測精度の向上が期待できる。このような多母集団を同時に考察する死亡率モデルは、multi-population mortality models とよばれ、Li and Lee (2005), Kleinow and Cairns (2013), Kleinow (2015) などで考えられており、母集団間の共通年齢効果を考慮した CAE (common age effect) モデルなどが提案されている。また、Hainaut (2012) は連続時間における多変量 LC モデルを提案し、千木良・山本 (2013) や井川 (2013) は離散時間における多変量 LC モデルを提案している。本論文は井川 (2013) によって提案された LC-VAR (Lee-Carter Vector Autoregressive) モデルを利用して地域間の従属性を捕捉することを試みる。

LC-VAR モデルでは、各都道府県別の対数死亡率を成分とした確率ベクトルが、暦年変化を表す確率ベクトル  $\kappa_t$  の線形結合で説明されているとし、 $\kappa_t$  の階差 ( $\kappa_t - \kappa_{t-1}$ ) が VAR (Vector Autoregressive) モデルにしたがうと考える多変量死亡率モデルである。この考え方は、従来の LC モデルの多変量モデルへの自然な拡張と思われる。階差  $\kappa_t - \kappa_{t-1}$  が VAR モデルのような定常モデルにしたがうという考え方は、原系列  $\kappa_t$  が単位根過程 (非定常モデル) にしたがうことを背景に想定しており、このような多変量モデルを扱う際には単変量モデルには無い注意が必要となる。山本 (2014) は、多変量の非定常モデルを扱う場合には、それぞれのデータの階差を取ってから分析するだけでは非定常性は処理できないことを指摘しており、このような特性を記述する共和分 (cointegration) という概念に対する分析の必要性を議論している。本論文においても、共和分分析の代表的な手法である Granger の因果性の検定を利用して、他都道府県の死亡率の情報をモデルに組み込むことの可否を統計的に検定し、多変量死亡率 (LC-VAR) モデルを構築する。その上で、LC モデルと LC-VAR モデルの 2 つのモデルに対して、死亡率予測の予測精度の比較を行う。

本論文の構成は、以下の通りである。第 2 章では、LC モデルの定義とパラメータ推定、および ARIMA (自己回帰和分移動平均) モデルを適用することによる将来死亡率予測についての説明を行う。第 3 章では、第 2 章で推定されたパラメータに VAR (多変量自己回帰) モデルを適用することによって、地域間の従属性を考慮した LC-VAR モデルを提案する。第 4 章では実際の各都道府県ごとの死亡率データを LC モデルおよび LC-VAR モデルに当てはめる。LC-VAR モデルへの当てはめを行う際、どの都道府県の情報を用いるかを、Granger Causality 検定により決定する。さらに、選択したモデルの妥当性の評価として、MSE (最小 2 乗誤差) などの指標を用いて予測精度の比較を行う。最後に第 5 章で本研究のまとめおよび今後の展望を述べる。

## 2 LC モデルによる残差構造解析の概要

本章では、古典的な将来死亡率予測モデルである LC モデルについて述べる。

### 2.1 LC モデルに関する先行研究

近年、暦年変化を含めた死亡率曲線を記述する動的なモデルとして、LC モデルが広く採用されている。LC モデルは国際的にも標準的な方法とされており、Tuljapurkar et.al. (2000) はこのモデルを G7 諸国の死亡率推計に適用し、その有効性を示している。LC モデルは年齢ごとに異なる死亡率の対数を暦年変化を表す説明変数で線形回帰するモデルである。LC モデルのパラメータ推定方法としては、Lee and Carter (1992) が提案した特異値分解による方法があるが、Renshaw and Haberman (2003) や千木良・山本 (2013) は、特異値分解における第 2 特異ベクトルまで考慮したモデルを提案している。また、Brouhns et.al. (2002) はポアソン回帰モデルを用いた最尤推定法を提案している。

LC モデルは単純であるため分かりやすい一方で、実際の死亡率を十分説明できていないという指摘があり、近年、LC モデルを拡張したさまざまなモデルが提案されている。Renshaw and Haberman (2006) は LC モデルに生年別のコホート効果も組み入れた RH モデルを提案した。Age-Period-Cohort (APC) モデルは、LC モデルより前に開発されたモデルであるが、APC モデルは RH モデルを制限したモデルと見ることもできる。

Cairns et.al. (2006) はロジット変換した死亡率を線形回帰する CBD モデルを提案した。また, Plat (2009) は, CBD モデルと LC モデルの特徴を組み合わせて, 年齢層別の効果を考慮したモデルを提案した。その他にも, 死亡率の改善率を年齢別と生年コホート別のパラメータで説明する CMI モデル (CMIB (2009a), CMIB (2009b)), 対数死亡率を AR-GARCH モデルに当てはめたモデル (Lin, Wang and Tsai (2015)) など, LC モデルを拡張したモデルが多数提案されている。また最近では, CBD モデルの拡張モデルが幾つか提案されている。Ekheden and Hossjer (2015) は一般化線形混合モデル (generalized linear mixed model; GLMM) を拡張したモデルを提案した。Li et.al. (2015) や Li and O'Hare (2017) は, CBD モデルのセミパラメトリックモデルである時変係数 (time-varying coefficient; TVC) モデルを提案した。さらに, Börger and Schupp (2018) は, CBD モデルのトレンドがランダムに変化するモデルを提案している。Villegas et.al. (2017) は, 上記のような確率論的死亡率モデルの多くを含む GAPC (generalized Age-Period-Cohort) モデルを提案し, さらに R パッケージ StMoMo を開発・導入している。

上記の LC モデルおよび拡張 LC モデルを我が国の死亡率予測に適用した先行研究は多数存在する。小松 (2002) は超長期の推計を考慮して改良した LC モデルを我が国の死亡データへ適用し将来生命表を作成している。その他, 小暮・長谷川 (2005, 2011), 及川 (2006), 石井 (2008, 2013), 法元 (2009), 赤松 (2010), および Currie (2016) など様々なモデルに我が国の死亡率を当てはめた結果が報告されている。

LC モデルは我が国の将来人口推計 (国立社会保障・人口問題研究所) においても平成 14(2002) 年以降の推計において用いられている。一方で平成 14 年推計以降, 実績値の死亡率が推計を上回って進んできたことが観察され, 我が国の死亡状況に適合するよう必要な修正を行った修正 LC モデルが用いられている。具体的には, 平成 18(2006) 年の推計では LC モデルを基にして, 死亡率曲線の「年齢シフト」を取り込んだモデルを採用している。また, 平成 24(2012) 年および平成 28(2016) 年の推計では, 若年層では LC モデルを用いつつ, 高齢層では死亡率改善を組み込む LD (線形差分) モデルを採用している。このように, LC モデルから LD モデルへと連続的につながるようなベクトル場を定義した死亡率モデルを, 石井 (2013) は TVF (Tangent Vector Field) モデルと呼んでいる。

## 2.2 LC モデルのパラメータ推定

年齢  $x = 0, \dots, \omega$ , 暦年  $t = 1, \dots, T$  に対し,  $x$  歳の  $t$  年における粗死亡率を  $m_{xt}$  とする。ここで,  $\omega, T$  はそれぞれ生命表における最終年齢, 最終時点である。このとき, LC モデルは以下で表現される。

$$\log m_{xt} = \alpha_x + \beta_x \kappa_t + \varepsilon_{xt} \quad (2.1)$$

ここで,  $\alpha_x$  は年齢のみに依存する効果,  $\kappa_t$  は暦年のみに依存するトレンド効果,  $\beta_x$  は  $\kappa_t$  に対応する年齢効果であり,  $\varepsilon_{xt}$  は正規分布  $N(0, \sigma^2)$  にしたがうホワイトノイズである。また,  $\beta_x$  と  $\kappa_t$  の識別条件として, LC モデルでは以下の制約を置いている。

$$\sum_{x=0}^{\omega} \beta_x = 1 \quad \sum_{t=1}^T \kappa_t = 0$$

行列ベクトル表記を行うと, 式 (2.1) は次のように表現される。

$$M = \alpha \mathbf{1}_T^\top + \beta \boldsymbol{\kappa}^\top + E \quad (2.2)$$

ここで,

$$M = \begin{pmatrix} \log m_{01} & \cdots & \log m_{0T} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \log m_{\omega 1} & \cdots & \log m_{\omega T} \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} \varepsilon_{01} & \cdots & \varepsilon_{0T} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon_{\omega 1} & \cdots & \varepsilon_{\omega T} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_0, \dots, \alpha_\omega)^\top \quad \boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \dots, \beta_\omega)^\top \quad \boldsymbol{\kappa} = (\kappa_1, \dots, \kappa_T)^\top$$

であり、識別条件は、

$$\boldsymbol{\beta}^\top \mathbf{1}_{\omega+1} = 1 \quad \boldsymbol{\kappa}^\top \mathbf{1}_T = 0 \quad (2.3)$$

となる。ここで、 $p = 1, 2, \dots$  に対して  $\mathbf{1}_p$  は各要素がすべて 1 の  $p$  次元ベクトルである。

いま、年齢  $0, \dots, \omega$  歳の暦年  $1, \dots, T$  年における死亡率  $\{m_{xt} | x = 0, \dots, \omega, t = 1, \dots, T\}$  が観測されたとする。  $Z = M - \frac{1}{T} M \mathbf{1}_T \mathbf{1}_T^\top$  ( $\text{rank}(Z) := r$ ) とし、 $s_1, \dots, s_r$  を  $Z$  の特異値 ( $s_1 \geq \dots \geq s_r > 0$ )、 $\mathbf{v}_i, \mathbf{u}_i$  ( $i = 1, \dots, r$ ) を  $s_i$  に対応する左、右特異ベクトルとすると、 $Z$  の特異値分解は  $Z = \sum_{i=1}^r s_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^\top$  と表現される。

このとき、次の最小 2 乗問題を考える。

$$\begin{cases} \min_{\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\kappa}} \text{tr}\{(M - \boldsymbol{\alpha} \mathbf{1}_T^\top - \boldsymbol{\beta} \boldsymbol{\kappa}^\top)^\top (M - \boldsymbol{\alpha} \mathbf{1}_T^\top - \boldsymbol{\beta} \boldsymbol{\kappa}^\top)\} \\ \text{subject to } \boldsymbol{\beta}^\top \mathbf{1}_{\omega+1} = 0 \quad \boldsymbol{\kappa}^\top \mathbf{1}_T = 1 \end{cases} \quad (2.4)$$

(2.4) の最適解として、推定量  $\hat{\boldsymbol{\alpha}}, \hat{\boldsymbol{\beta}}, \hat{\boldsymbol{\kappa}}$  は次の通り導出される。

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}} = \frac{1}{T} (M \mathbf{1}_T - s_1 \mathbf{v}_1^\top \mathbf{1}_T \mathbf{u}_1) \quad (2.5)$$

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \frac{1}{\mathbf{u}_1^\top \mathbf{1}_{\omega+1}} \mathbf{u}_1 \quad (2.6)$$

$$\hat{\boldsymbol{\kappa}} = s_1 \mathbf{u}_1^\top \mathbf{1}_{\omega+1} \mathbf{v}_1 + s_1 T \mathbf{u}_1^\top \mathbf{1}_{\omega+1} \mathbf{v}_1^\top \mathbf{1}_T \mathbf{1}_T \quad (2.7)$$

上記で導出した  $\hat{\alpha}_x, \hat{\beta}_x, \hat{\kappa}_t$  を用いて、 $m_{xt}$  の推定量

$$\hat{m}_{xt} := \exp\left(\hat{\alpha}_x + \hat{\beta}_x \hat{\kappa}_t\right) \quad (2.8)$$

を構成することができる。さらに、時点  $T$  から  $h$  期先の  $\boldsymbol{\kappa}$  の予測量  $\boldsymbol{\kappa}_{T+h}$  を推定することにより、 $h$  期先の将来死亡率予測量  $\hat{m}_{x,T+h}$  を構成することができる。本論文では、小暮・長谷川 (2005) と同様に  $\hat{\boldsymbol{\kappa}} = (\hat{\kappa}_1, \dots, \hat{\kappa}_T)^\top$  が ARIMA( $p, 1, q$ ) モデルにしたがっていると仮定することによって、 $m_{x,T+h}$  の予測を行う。

なお、LC 法は主成分分析における第 1 因子を抽出する手法と考えられる (小暮・長谷川 (2005))。最初の  $l$  個 ( $l < r$ ) の因子を用いれば、LC モデル (2.2) は  $l$  因子モデル

$$M = \boldsymbol{\alpha} \mathbf{1}_T^\top + \boldsymbol{\beta}_1 \boldsymbol{\kappa}_1^\top + \boldsymbol{\beta}_2 \boldsymbol{\kappa}_2^\top + \dots + \boldsymbol{\beta}_l \boldsymbol{\kappa}_l^\top + E$$

に拡張することができる。ここで、 $\boldsymbol{\beta}_i, \boldsymbol{\kappa}_i$  ( $i = 1, \dots, l$ ) の選択は  $Z$  の特異値の大きい順  $s_1, s_2, \dots, s_l$  に対応するように選択すればよい。後述するデータ解析の章で、主成分分析における寄与率についても見ていくことにする。

### 2.3 LC モデルによる将来死亡率の予測

LC モデルでは、系列  $\{\hat{\kappa}_t; t \in \mathbb{Z}\}$  が ARIMA( $p, 1, q$ ) モデルにしたがうと仮定し、 $\{\hat{\kappa}_t; t = 1, \dots, T\}$  を使って最尤法により  $\{\hat{\kappa}_t; t = T+1, \dots\}$  を予測する。ARIMA( $p, 1, q$ ) モデルとは、1 階差分をとったものが ARMA( $p, q$ ) モデルにしたがう時系列モデルである。

**定義 2.1** (ARIMA( $p, 1, q$ ) モデル: 自己回帰和分移動平均モデル) 確率過程  $\{Y_t\}$  に対し、 $X_t = Y_t - Y_{t-1}$  とする。  $\{X_t\}$  が

$$X_t - \sum_{i=1}^p \phi_i X_{t-i} = \varepsilon_t + \sum_{j=1}^q \theta_j \varepsilon_{t-j}$$

と書けるとき、 $\{Y_t\}$  は ARIMA( $p, 1, q$ ) モデルにしたがうと言う。ここで、 $p, q$  はラグ次数であり、 $\{\varepsilon_t\}$  は平均 0、分散  $\sigma^2$  を持つホワイトノイズ（以下、 $\varepsilon_t \sim \text{W.N}(0, \sigma^2)$  と書く。）である。

ARIMA( $p, 1, q$ ) モデルのパラメータ  $\boldsymbol{\theta} = (\phi_1, \dots, \phi_p, \theta_1, \dots, \theta_q, \sigma^2)^\top$  の推定について、Box and Jenkins (1970) では、 $\varepsilon_t \sim \text{N}(0, \sigma^2)$  の下で、初期値を  $x_1, \dots, x_p, \varepsilon_1 = 0, \dots, \varepsilon_{p-q+1} = 0$  としたときの対数尤度関数：

$$\begin{aligned} \ell(\boldsymbol{\theta}) &= \log f(x_T, \dots, x_{p+1} | x_p, \dots, x_1, \varepsilon_p = 0, \dots, \varepsilon_{p-q+1} = 0) \\ &= -\frac{T-p}{2} \log(2\pi) - \frac{T-p}{2} \log(\sigma^2) - \sum_{t=p+1}^T \frac{\varepsilon_t^2}{2\sigma^2} \end{aligned}$$

を最大にするように推定している。最尤法に基づく LC モデルの将来死亡率予測では、 $\{\hat{\kappa}_t; t = 1, \dots, T\}$  の 1 階差分の系列  $\{X_t := \hat{\kappa}_{t+1} - \hat{\kappa}_t; t = 1, \dots, T-1\}$  が ARMA( $p, q$ ) モデルにしたがうと仮定し、パラメータ  $\boldsymbol{\theta}$  の最尤推定量  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  を上記の  $\ell(\boldsymbol{\theta})$  を最大にするように推定する。この  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  を用いて、1 階差分の系列に対する予測値の平均 2 乗誤差を最小にするように、 $h$  期先の  $\hat{\kappa}_{t+h}$  を予測し、 $\{\hat{\kappa}_t; t = T+1, \dots, T+h\}$  を (2.8) に代入することで、将来死亡率予測量  $\hat{m}_{x, T+h}$  を構成することができる。ところで、ラグ次数  $p, q$  は何期前までの自己回帰項、移動平均項をモデルに組み込むかを表しており、本論文では Box and Jenkins (1970) と同様に AIC（赤池情報量規準）による選択を行う。

### 3 LC-VAR モデルによる残差構造解析

#### 3.1 LC-VAR モデル

LC-VAR モデルでは、都道府県間の従属性を考慮するために、LC モデルの枠組みに VAR（多変量自己回帰）モデルを導入する。例えば東京の将来死亡率を予測する場合に、第 2 章の LC モデルによる予測法を用いると、予測に使用する死亡率データは東京のデータのみである。これに対し、LC モデルにおけるトレンド効果の予測  $\hat{\kappa}_{T+h}$  を第 2 章で用いた ARIMA モデルではなく本章で述べる VAR モデルを用いることで、予測に使用する死亡率データを東京のみでなく埼玉や宮城などの他の都道府県まで拡張する。

まず、 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}, \hat{\boldsymbol{\beta}}, \hat{\boldsymbol{\kappa}}$  の推定については LC モデルと同様の推定を行い、 $\hat{\kappa}_{T+h}$  を予測する際に ARIMA モデルではなく  $\{\hat{\kappa}_t; t = 1, \dots, T\}$  の 1 階差分  $\{\hat{\kappa}_t - \hat{\kappa}_{t-1}; t = 2, \dots, T\}$  に対して VAR モデルを適用する。

定義 3.1 ( $n$  変数 VAR( $p$ ) モデル)

$$\mathbf{Y}_t = \mathbf{c} + \Phi_1 \mathbf{Y}_{t-1} + \dots + \Phi_p \mathbf{Y}_{t-p} + \boldsymbol{\varepsilon}_t$$

ここで、 $\{\mathbf{Y}_t\}$  はベクトル確率過程、 $\mathbf{c}$  は  $n$  次元定数ベクトル、 $\Phi_i$  は  $n \times n$  係数行列、 $\boldsymbol{\varepsilon}_t \sim \text{W.N}(\mathbf{0}, \Sigma)$ 、 $p$  はラグ次数である。

本論文ではパラメータ数が増えることによるモデルの複雑化を防ぐため、特に以下の 2 変数 VAR( $p$ ) モデルを扱う。

定義 3.2 (2 変数 VAR( $p$ ) モデル)

$$X_t = a_{10} + \sum_{j=1}^p a_{1j} X_{t-j} + \sum_{j=1}^p b_{1j} Y_{t-j} + \varepsilon_{1t}, \quad Y_t = c_{10} + \sum_{j=1}^p c_{1j} X_{t-j} + \sum_{j=1}^p d_{1j} Y_{t-j} + \eta_{1t}$$

ここで、 $\mathbf{a} = (a_{10}, a_{11}, \dots, a_{1p})$ 、 $\mathbf{b} = (b_{11}, \dots, b_{1p})$ 、 $\mathbf{c} = (c_{10}, c_{11}, \dots, c_{1p})$ 、 $\mathbf{d} = (d_{11}, \dots, d_{1p})$  は係数パラメータ、 $\varepsilon_{1t} \sim \text{W.N}(0, \sigma_\varepsilon^2)$ 、 $\eta_{1t} \sim \text{W.N}(0, \sigma_\eta^2)$  である。

係数パラメータの推定について、補題 3.1 が知られている（沖本 (2010)）。

### 補題 3.1 VAR モデルの性質

- (1) 各方程式を個別に最小 2 乗法で推定した係数推定量は、最良線形不偏推定量になる。
- (2)  $\varepsilon_t \sim N(\mathbf{0}, \Sigma)$  のとき、上の LSE (最小 2 乗推定量) は MLE (最尤推定量) と一致する。

以後、 $\varepsilon_t \sim N(0, \Sigma)$  を仮定する。このとき、補題 3.1 から、VAR モデルのパラメータ推定を最尤法ではなく最小 2 乗法により簡潔に行えるようになる。つまり、

$$S_X(\mathbf{a}, \mathbf{b}) := \sum_{t=1}^T \varepsilon_{1t}^2 = \sum_{t=1}^T \left( X_t - a_{10} - \sum_{j=1}^p a_{1j} X_{t-j} - \sum_{j=1}^p b_{1j} Y_{t-j} \right)^2,$$

$$S_Y(\mathbf{c}, \mathbf{d}) := \sum_{t=1}^T \eta_{1t}^2 = \sum_{t=1}^T \left( Y_t - c_{10} - \sum_{j=1}^p c_{1j} X_{t-j} - \sum_{j=1}^p d_{1j} Y_{t-j} \right)^2$$

をそれぞれ最小化するように係数パラメータの最小 2 乗推定量を導出する。

例えば、東京の死亡率データを LC モデルに当てはめたときのトレンド効果を  $\{\kappa_{1\text{Tokyo}}, \dots, \kappa_{T\text{Tokyo}}\}$ 、埼玉の場合を  $\{\kappa_{1\text{Saitama}}, \dots, \kappa_{T\text{Saitama}}\}$  とし、定義 3.2 における確率過程  $\{X_t\}, \{Y_t\}$  をそれらの 1 階差分として、仮に「東京トレンド」、「埼玉トレンド」と呼ぶことにする。東京の将来死亡率予測を行う際に VAR モデルを用いることによって、「東京トレンド」と共に「埼玉トレンド」も予測に組み込むことができるが、それにより予測精度が向上するかはその時点では不明であり、逆に予測精度が下がってしまう可能性もある。そこで、自分以外の自己回帰項をモデルに入れるべきか (例えば東京の将来死亡率予測に「埼玉トレンド」を入れるべきか) の評価として、本論文では次の Granger Causality を用いる。

### 3.2 Granger Causality

**定義 3.3** (Granger (1969))  $\{A_t\}, \{B_t\}$  を弱定常確率過程,  $\bar{B}_t = \{B_{t-j}, j = 1, 2, \dots, \infty\}$ ,  $P_t(A|\bar{B})$  を  $\bar{B}_t$  を用いた  $A_t$  の最良線形不偏予測量,  $\varepsilon_t(A|\bar{B}) = A_t - P_t(A|\bar{B})$ ,  $\sigma^2(A|\bar{B}) = \text{Var}(\varepsilon_t(A|\bar{B}))$  とする。このとき、弱定常確率過程  $\{X_t\}, \{Y_t\}$  に対し

$$\sigma^2(X|\bar{X}, \bar{Y}) < \sigma^2(X|\bar{X})$$

であれば、 $\{Y_t\}$  から  $\{X_t\}$  への Grenger Causality が存在すると言う。ここで最良線形不偏予測量とは、線形予測量の中で不偏かつ平均 2 乗誤差 (MSE) が最小のものである。

VAR の枠組みでは、次のように Granger Causality が存在するかの検定 (Granger Causality Test) を行うことができる。本論文では、特に 2 変量 VAR( $p$ ) モデルの Granger Causality Test を用いる。まず、弱定常確率過程  $\{X_t\}$  について、次のモデルを考える。

$$X_t = a_{10} + \sum_{i=1}^p a_{1p} X_{t-p} + \sum_{i=1}^p b_{1p} Y_{t-p} + \varepsilon_{1t} \quad (3.1)$$

$$X_t = a_{20} + \sum_{i=1}^p a_{2p} X_{t-p} + \varepsilon_{2t} \quad (3.2)$$

このとき、帰無仮説  $H_0$  と対立仮説  $H_1$  をそれぞれ

$$H_0 : b_{11} = b_{12} = \dots = b_{1p} = 0$$

$$H_1 : b_{11} \neq 0 \text{ または } b_{12} \neq 0 \text{ または } \dots b_{1p} \neq 0$$

とし、 $SSR_1$  を (3.1) の最小 2 乗法による残差平方和、 $SSR_2$  を (3.2) の最小 2 乗法による残差平方和、 $T$  をサンプルサイズとしたとき、検定統計量  $F$  を

$$F := \frac{(SSR_2 - SSR_1)/p}{SSR_1 - 2p - 1}$$

によって定義する。検定統計量  $F$  を用いることで、(3.2) の MSE に比べて (3.1) の MSE が有意に小さいかの検定を行う。  $H_0$  の下で、  $F \xrightarrow{d} \chi^2(p)$  (沖本 (2010)) となるので、  $F$  を  $\chi^2(p)$  のパーセント点と比較することにより、検定を行うことができる。検定により帰無仮説  $H_0$  が棄却できた場合、モデル (3.1) を採用し、このモデルを各地域ごとのトレンド効果の 1 階差分 (例えば、  $\{X_t\}$  を  $\{\kappa_{2\text{Tokyo}} - \kappa_{1\text{Tokyo}}, \dots, \kappa_{T\text{Tokyo}} - \kappa_{T-1,\text{Tokyo}}\}$ ,  $\{Y_t\}$  を  $\{\kappa_{1\text{Saitama}} - \kappa_{2\text{Saitama}}, \dots, \kappa_{T\text{Saitama}} - \kappa_{T-1,\text{Saitama}}\}$  とする) に適用したものを以後、LC-VAR モデルと呼ぶ。

## 4 実データ解析

本章では、我が国の各都道府県ごとの死亡率データに対して、LC モデルおよび LC-VAR モデルを当てはめ、将来死亡率の予測精度を比較する。

### 4.1 データ

推定に用いたデータは、国立社会保障・人口問題研究所 (2016) に掲載されている、0 歳から 89 歳までの各都道府県ごとの死亡率である (厚生労働省 (2016))。観測期間は、1975 年から 2015 年までの 41 年間とし、1975 年から 2000 年までの 26 年間のデータを用いてモデルの構築を行い、2001 年から 2015 年までの 15 年間のデータを用いて精度の検証を行う。表 1 は、東京都の死亡率データである。主要な計算は R で行った。図 1 は表 1 の東京の死亡率データの対数値を 1975 年 (赤) から 2000 年 (青) までプロットしたものである。まず年齢 ( $x$  軸) に着目すると、0 歳で比較的高い死亡率をとっており、そこから 15 歳くらいまでは単調に減少していることがわかる。また 15 歳くらい以降は年齢とともに単調に増加しており、特に 20 歳くらい以降はほぼ線形に増加していることがわかる。また、暦年ごとの対数死亡率推移 (色別) に着目すると、現在に近づくにつれて死亡率は下がっていることがわかる。

表 1 東京の死亡率データ ( $m_{xt}$ )

年齢 \ 暦年	1975	1976	1977	...	1998	1999	2000
0	0.884%	0.821%	0.752%	...	0.368%	0.335%	0.366%
1	0.098%	0.094%	0.089%	...	0.054%	0.051%	0.052%
2	0.063%	0.052%	0.051%	...	0.027%	0.030%	0.031%
⋮	⋮	⋮	⋮	...	⋮	⋮	⋮
87	19.505%	18.097%	17.296%	...	10.960%	11.346%	10.195%
88	21.691%	20.008%	18.911%	...	11.765%	12.033%	11.722%
89	22.273%	21.650%	20.440%	...	13.185%	13.518%	11.858%

### 4.2 LC モデルの場合

粗死亡率データ  $m_{xt}$  ( $x = 1, \dots, 89$ ,  $t = 1, \dots, 26$ ) に対して第 2 章の (2.5), (2.6), (2.7) にしたがってパラメータの推定を行った。まず、東京の死亡率データ (表 1) を用いたパラメータ推定のプロットについて述べる。

## Tokyo: total death rates (1975–2000)

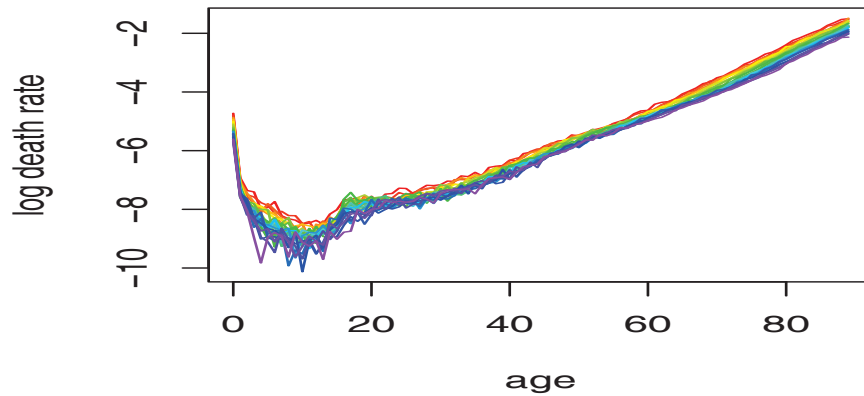


図1 東京死亡率推移

図2（左）は年齢効果の推定量である  $\hat{\alpha}_x$  をプロットしたものであり，暦年効果とは独立に年齢要因が対数死亡率に与える効果を表す． $\hat{\alpha}_x$  のプロットは対数死亡率のプロット（図1）とほぼ同様の形であることが見て

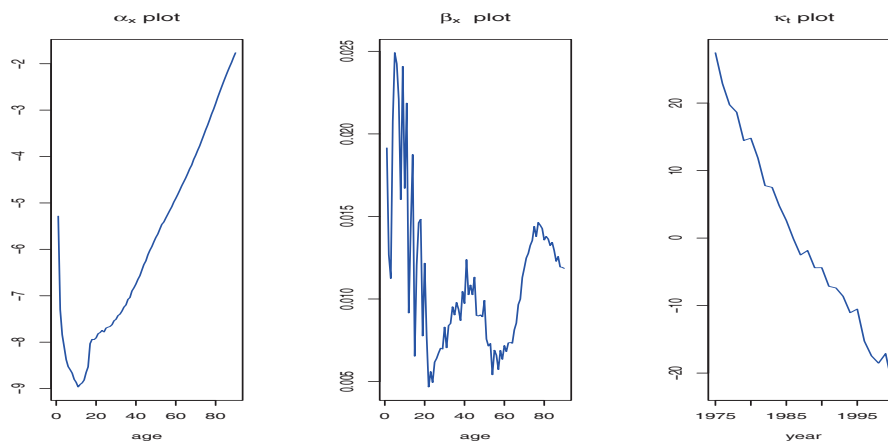


図2 東京死亡率に対する  $\hat{\alpha}_x$ ,  $\hat{\beta}_x$ ,  $\hat{\kappa}_t$  のプロット

とれる．まず，暦年によらず（毎年同様に）出生時（0歳）における死亡率は比較的高く，これは何かしらの出生直後特有の死亡要因（先天奇形など）が起因していると思われる．また，出生時から15歳頃にかけて著しく死亡率は低下しており，成長期における体力・免疫力や危険察知能力の向上によるものと思われる．一方，そこからは  $\hat{\alpha}_x$  がほぼ線形に増加しており，加齢による体力・免疫力の衰えなどが関係していると思われる．特に20歳付近で対数死亡率が急上昇しており，自殺や不慮の事故が大きく関わっていると思われる（平成28年人口動態統計など）．図2（中央）は暦年効果  $\hat{\kappa}_t$  に対応する年齢効果（感応度） $\hat{\beta}_x$  のプロットであり，図2（右）は暦年効果  $\hat{\kappa}_t$  のプロットである．図2（右）から，対数死亡率は現在に近づくにつれて全体的にほぼ線形に減少しており，図1において観察された暦年の経過に伴う全体的な死亡率の改善の度合を示す指標となっている．堀内（2010）によると，20世紀後半の経済先進諸国における死亡率低下の主要要因として，(a) 医学の発展と医療技術の進歩，(b) 医療サービス提供の向上，(c) 食事と栄養の改善，(d) 生活水準の向上や労働条件の改善などによる身体衰弱の緩慢化，(e) 感染症罹患率の低下，(f) 教育水準の上昇などが論じられている．



暦年効果の減少傾向は、これらの要因によるものと考えられる。また、図2(中央)を見ると、若年層の感応度のプロットはかなりばらついている。これは、若年層の死亡率が相対的に低い(つまり0に近い)ことにより、対数死亡率で表すと毎年の変動が大きく表れるためであると思われる。図3は、代表年齢(0歳, 10歳, 20歳, 40歳, 60歳, 80歳)における $(\hat{\alpha}_x, \hat{\beta}_x)$ を全都道府県についてプロットした散布図である。ただし、赤点は全国の死亡率から計算した推定結果を表す。代表年齢間で比較すると、60歳および80歳は都道府県内

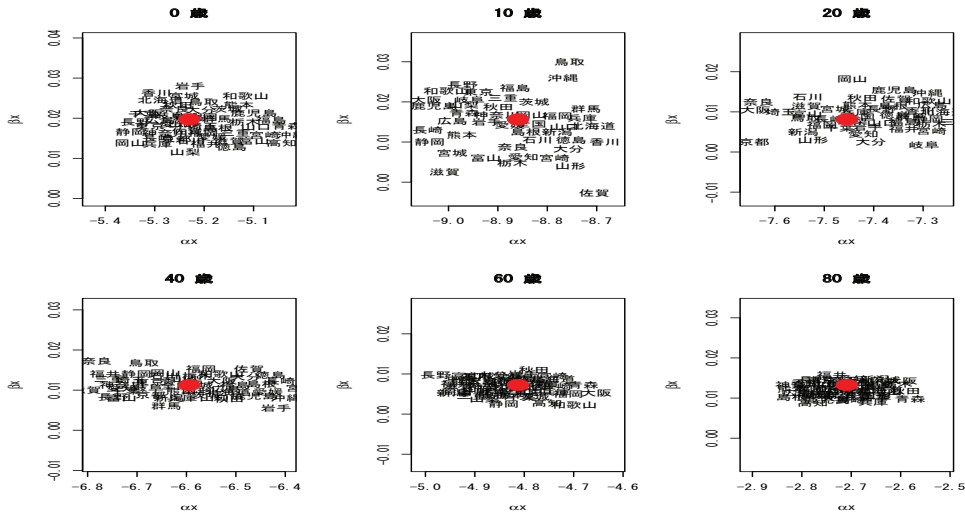


図3 全都道府県に対する $(\hat{\alpha}_x, \hat{\beta}_x)$ のプロット( $x = 0, 10, 20, 40, 60, 80$ )

での散らばりは小さく、10歳の散らばりは大きいことが分かる。これは都道府県間の違いが若年層で顕著に表れていることを示している。また、散布図の形状に注目すると横長に広がっているように見える。つまり、縦軸方向( $\hat{\beta}_x$ )の違いに比べて、横軸方向( $\hat{\alpha}_x$ )の違いの方が顕著に表れている。都道府県間で全国との距離を比較したところ、高知、青森、沖縄が全国との違いが比較的大きかった。

図4は、 $\hat{\kappa}_t$ を全都道府県についてプロットした図である。ただし、赤線は全国の死亡率から計算した推定結果を表す。全国を含めて、どの都道府県も現在に近づくにつれて全体的にほぼ線形に減少しており、暦年が経

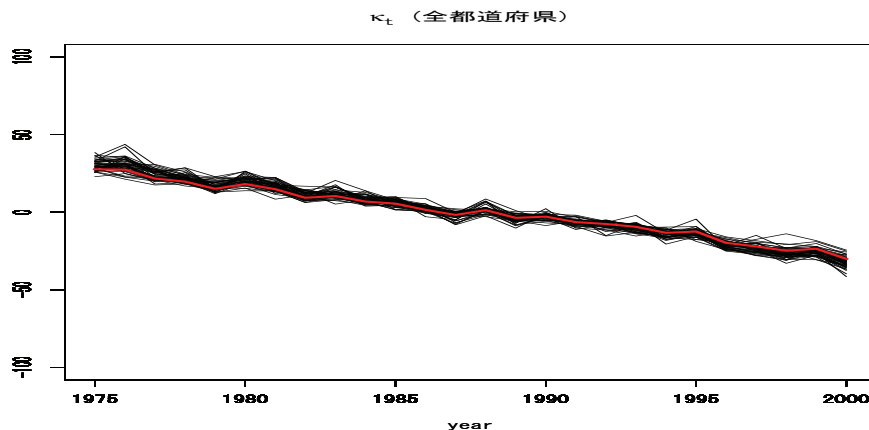


図4 全都道府県に対する $\hat{\kappa}_t$ のプロット

過するにつれて死亡率が改善していることが分かる。都道府県間で全国との距離を比較したところ、全国との違いが比較的大きかった都道府県は、徳島、高知、石川、滋賀、鹿児島、沖縄であった。

図5は、第2章で述べた全都道府県についての因子寄与率のプロットである。ただし、赤点は全国の死亡率から計算した結果を表す。Zの特異値  $s_1, \dots, s_{26}$  に対し寄与率は  $s_j^2 / \sum_{i=1}^{26} s_i^2$  で定義される。全国の場合（赤

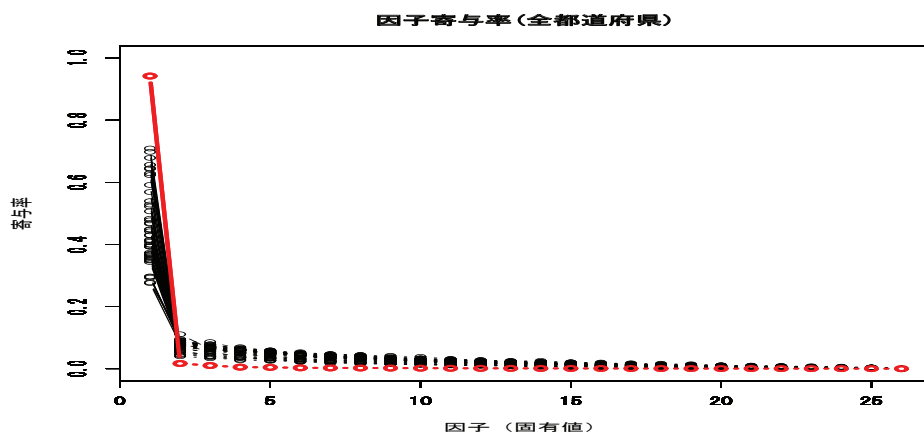


図5 全都道府県に対する因子寄与率のプロット

点),  $s_1$  の寄与率が90%以上あり, LCモデルは式(2.1)を考えれば十分であることがわかる。これに対し, 都道府県別の  $s_1$  の寄与率は30%~70%程度という水準となっており, 第1因子だけでは十分説明ができていない危険性がある。今回は行わなかったが, 特に30%未満となっている, 福井, 鳥取, 佐賀, 香川, 島根については第2因子以降も考慮したモデルを検討すべきかもしれない。

次に, 第2.3節に基づき, まずは表1を用いて推定した  $\hat{\kappa}_1, \dots, \hat{\kappa}_{26}$  に対する  $ARIMA(p, 1, q)$  モデル, つまり  $\hat{\kappa}_{26} - \hat{\kappa}_{25}, \dots, \hat{\kappa}_2 - \hat{\kappa}_1$  に対する  $ARMA(p, q)$  モデルを構築し, 予測を行う。図6(左)は, 2001年から2050年までの将来50年の東京の対数死亡率の予測結果であり, 赤線から青線になるにつれて, つまりプロットが下に行くにつれて暦年が経過していることを表している。また, 図6(右)は, 1975年から2000年までの  $\hat{\kappa}_t$  と, 2001年から2050年までの将来50年の  $\hat{\kappa}_t$  の点予測および区間予測をプロットした結果を表している。予測時点が現在と離れるほど不確実性が大きくなるため, 区間予測の幅は大きくなる。一方で, 死亡率の低下が将来に渡って継続することが予測されていることが分かる。死亡率の減少度合(改善度合)について注

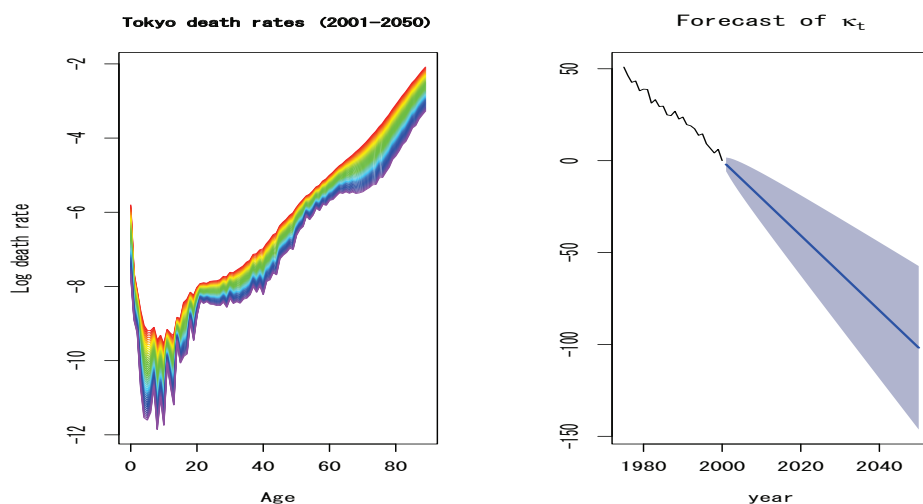


図6 東京死亡率に対する将来死亡率予測

目すると、10歳付近が最も減少しており、次に70歳以降で減少度が高くなっている。一方、20歳付近と60歳付近の死亡率の減少度合いが低いように見てとれる。

図7は、代表年齢(0歳, 10歳, 20歳, 40歳, 60歳, 80歳)における2001年から2050年までの将来50年の将来死亡率を全都道府県に対して予測した結果であり、赤線は全国の予測結果を表している。概ね全国の結果と同じ挙動を示しているが、一部の都道府県で異なる動きを示している。

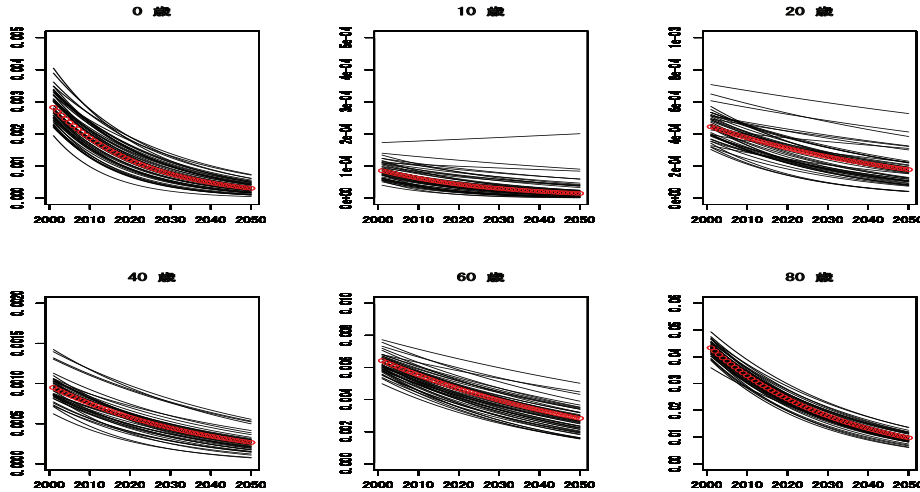


図7 全都道府県に対する将来死亡率予測 ( $x = 0, 10, 20, 40, 60, 80$ )

#### 4.3 LC-VAR モデルの場合

前節で推定された各都道府県ごとの暦年パラメータ  $\hat{\kappa}_1, \dots, \hat{\kappa}_t$  の1階差分  $\hat{\kappa}_{26} - \hat{\kappa}_{25}, \dots, \hat{\kappa}_2 - \hat{\kappa}_1$  に対して第3章で述べた VAR( $p$ ) モデルを当てはめ、予測を行う。ここで、VAR( $p$ ) モデルを当てはめる際、他の都道府県の情報を用いることとなるが、どの都道府県を選択するかは、第3.2節の Granger Causality Test を利用することとする。本論文におけるモデル選択の手順は次の通りである。まず、興味のある死亡率の都道府県を  $A$  とする。

- I.  $A$  以外の都道府県 ( $B$  とする) を1つ選択し、第3.2節の Granger Causality Test を行う。ここで、因果関係なので影響を与える側と影響される側があることに注意する。 $A, B$  のトレンド効果をそれぞれ  $\{\hat{\kappa}_t^A\}, \{\hat{\kappa}_t^B\}$  とすると、第3.2節における  $X_t$  が  $\hat{\kappa}_t^A - \hat{\kappa}_{t-1}^A$  に該当し、 $Y_t$  が  $\hat{\kappa}_t^B - \hat{\kappa}_{t-1}^B$  に該当する。このようにして、検定統計量  $F$  の値を求める。
- II. 第3.2節で述べたとおり、この検定統計量  $F$  は帰無仮説  $H_0$  の下で自由度  $p$  の  $\chi^2$  分布に(漸近的に)したがうと考え、P値を計算する。次数  $p$  は AIC により選択する。
- III.  $A$  以外の全ての都道府県に対して、 $B$  を選択し直し、同様のことを行う。それが終わったら、 $A$  を新たに定めて同じ操作を繰り返す。その結果は表2の通りである。
- III. 本論文では、Granger Causality Test により検定が棄却されれば、Granger 因果性があると考え、LC-VAR モデルを採用することとする。この際、2つの都道府県を選択して検定を複数繰り返すことにより、検定の多重性の問題が生じる。これを考慮するために、有意水準を0.005(0.5%)とする(つまり、P値 < 0.005 であれば LC-VAR モデルを採用する.)。このようにして、LCモデルか LC-VAR モデルかを決定する。選択されたモデルの一覧は表3の通りである。



ID	都道府県名	選択したモデル	Granger Causality	ID	都道府県名	選択したモデル	Granger Causality
1	北海道	LC-VAR	新潟, 石川, 静岡, 京都, 奈良, 岡山, 徳島, 佐賀	25	滋賀	LC-VAR	山口
2	青森	LC-VAR	岩手, 奈良	26	京都	LC-VAR	群馬, 静岡, 滋賀, 兵庫, 鹿児島
3	岩手	LC	-	27	大阪	LC-VAR	愛媛, 佐賀
4	宮城	LC-VAR	青森, 静岡	28	兵庫	LC-VAR	秋田, 滋賀
5	秋田	LC	-	29	奈良	LC	-
6	山形	LC	-	30	和歌山	LC	-
7	福島	LC-VAR	静岡, 香川	31	鳥取	LC-VAR	北海道, 山形, 佐賀
8	茨城	LC-VAR	山形	32	島根	LC-VAR	岩手, 千葉
9	栃木	LC-VAR	熊本	33	岡山	LC-VAR	群馬
10	群馬	LC-VAR	滋賀	34	広島	LC-VAR	岩手, 沖縄
11	埼玉	LC-VAR	岡山, 愛媛, 佐賀, 熊本	35	山口	LC-VAR	群馬, 福井, 愛媛
12	千葉	LC	-	36	徳島	LC-VAR	茨城, 長野, 高知
13	東京	LC	-	37	香川	LC-VAR	東京, 愛知
14	神奈川	LC-VAR	福島, 東京, 岡山	38	愛媛	LC-VAR	滋賀
15	新潟	LC	-	39	高知	LC	-
16	富山	LC-VAR	京都, 鳥取	40	福岡	LC-VAR	群馬
17	石川	LC-VAR	愛知, 愛媛	41	佐賀	LC-VAR	千葉, 滋賀, 山口, 高知, 熊本
18	福井	LC-VAR	奈良	42	長崎	LC	-
19	山梨	LC-VAR	愛媛	43	熊本	LC-VAR	山形, 福島, 新潟, 山梨, 岐阜, 滋賀, 大阪, 岡山
20	長野	LC-VAR	徳島	44	大分	LC	-
21	岐阜	LC-VAR	静岡, 徳島	45	宮崎	LC-VAR	群馬, 滋賀, 山口
22	静岡	LC-VAR	群馬, 長野, 愛知, 滋賀, 大阪, 山口, 熊本	46	鹿児島	LC-VAR	滋賀, 愛媛
23	愛知	LC-VAR	福島, 群馬, 岡山, 愛媛, 佐賀, 宮崎, 鹿児島	47	沖縄	LC-VAR	東京
24	三重	LC-VAR	高知				

表3 Granger Causality Test によりモデル選択した結果

選択したモデルに関して、幾つかの興味深い結果が得られた一方で、解釈が得られない結果が存在する。例えば、青森 ← 岩手、宮城 ← 青森、神奈川 ← 東京、福井 ← 奈良、岐阜 ← 静岡、静岡 ← 長野・愛知、京都 ← 滋賀・兵庫、兵庫 ← 滋賀、徳島 ← 高知、佐賀 ← 山口・熊本という因果性は近県効果（近県であることにより、住民の流入・流出が頻繁に起こり、2 都道府県死亡率に相関が存在する。）と解釈できる。また、北海道 ← 新潟・石川などの因果性は、（因果性は不明だが）気候が類似していることによる関係性があるのかもしれない。一方で、北海道 ← 静岡・京都・奈良・岡山・徳島・佐賀などは関係性に説明がつかない。これらについては、何かしら隠れた関係性が存在するとも解釈できるが、前述の因子寄与率が小さいことによる説明力の低下が一因であるとも考えられるし、サンプルサイズが小さすぎることが一因であるとも考えられる。沖本(2010)によれば、Granger の因果性は定義が非常に明確であり、データを用いて容易に検定できるという長所がある一方で、Granger の因果性は通常の因果性が存在する必要条件ではあるが、十分条件ではないと指摘している。また、Granger の因果性の方向と通常の因果性の方向が同じになるとは限らないことも指摘している。実際の適用に際しては、データのみで解釈するのではなく、結果が理論的に説明できるかどうかも含めてモデルの構築を行うべきであると思われる。

図8は、宮城県 LC モデルを当てはめた予測結果（左）および LC-VAR モデルを当てはめた予測結果（右）である。LC-VAR モデルには、Granger 因果性が認められた青森県の情報が利用されている。また、表4は、(LC モデルを用いた (対数) 将来死亡率予測) / (2000 年時点での (対数) 死亡率) と、(LC-VAR モデルを用いた (対数) 将来死亡率予測) / (2000 年時点での (対数) 死亡率) を代表年齢 (0 歳, 10 歳, 20 歳, 40 歳, 60 歳, 80 歳, 89 歳) および代表年 (2010 年, 2020 年, 2030 年, 2040 年, 2050 年) で比較した結果である。この表より、暦年が経過するごとの死亡率予測値 (の絶対値) は、LC-VAR モデルの方が大きな値をとっていることが分かる (表 4)。つまり、LC-VAR モデルの方が保守的な将来予測をしている。

#### 4.4 予測精度の比較

最後に、LC モデルと LC-VAR モデルとの精度の比較を行う。1975 年から 2000 年までの 26 年間のデータを用いて構築された LC モデルまたは LC-VAR モデルによって予測した将来 15 年間 (2001 年～2015 年) の

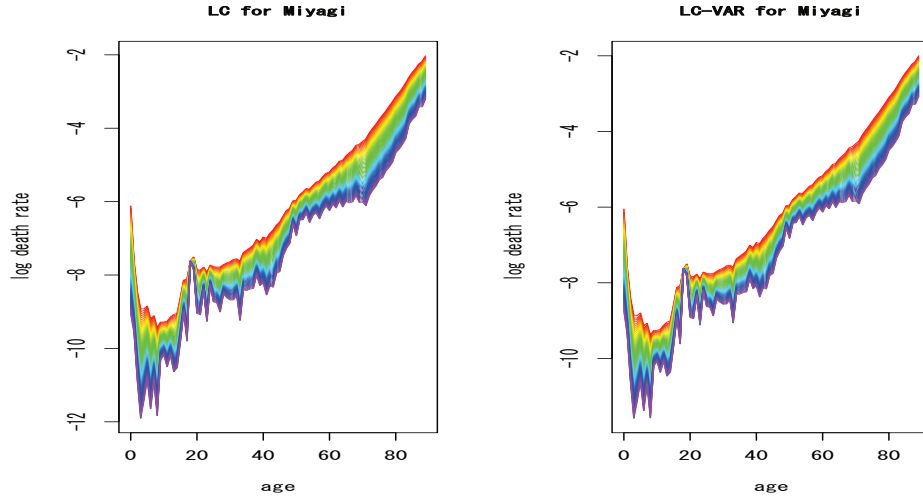


図8 宮城県の将来死亡率予測

	LC モデル					LC-VAR モデル				
	2010年	2020年	2030年	2040年	2050年	2010年	2020年	2030年	2040年	2050年
0歳	0.8897	0.8162	0.7538	0.7003	0.6538	0.9031	0.8338	0.7744	0.7228	0.6777
10歳	0.9950	0.9760	0.9578	0.9402	0.9233	0.9982	0.9808	0.9640	0.9478	0.9322
20歳	0.9043	0.8778	0.8527	0.8290	0.8066	0.9089	0.8844	0.8612	0.8392	0.8183
40歳	0.9260	0.8942	0.8644	0.8366	0.8106	0.9314	0.9021	0.8745	0.8486	0.8242
60歳	0.9642	0.9272	0.8930	0.8612	0.8316	0.9705	0.9364	0.9046	0.8749	0.8470
80歳	0.8899	0.8155	0.7526	0.6987	0.6520	0.9035	0.8338	0.7733	0.7214	0.6759
89歳	0.9103	0.8229	0.7508	0.6903	0.6389	0.9264	0.8436	0.7744	0.7156	0.6652

表4 宮城県の将来対数死亡率予測と2000年時点での対数死亡率との比 (LCモデル v.s. LC-VARモデル)

死亡率をそれぞれ

$$\left\{ \log \hat{m}_{xt}^{(LC)}, x = 0, \dots, 89, t = 1, \dots, 15 \right\}, \quad \left\{ \log \hat{m}_{xt}^{(LC-VAR)}, x = 0, \dots, 89, t = 1, \dots, 15 \right\}$$

とし、これらと実際の2001年～2015年の死亡率 (実データ)

$$\left\{ \log m_{xt}, x = 0, \dots, 89, t = 1, \dots, 15 \right\}$$

との差を比較する。図9は、宮城県の死亡率に対して、LCモデルを当てはめた予測結果 (+), LC-VARモデルを当てはめた予測結果 (●) および実データ (○) を代表年齢 (0歳, 10歳, 20歳, 40歳, 60歳, 80歳) ごとにプロットした結果である。前述の通り、LC-VARモデルの方が保守的な将来予測をしている。特に、0歳, 60歳, 80歳ではこの差が比較的大きく表れており、結果として予測精度が上がっていることが分かる。次に、LCモデルとLC-VARモデルの予測精度を数値的指標で比較する。比較する指標として、

- MSE (mean squared error; 平均2乗誤差)  $MSE := \frac{1}{90 \times 15} \sum_{x,t} (\log \hat{m}_{xt}^{(\cdot)} - \log m_{xt})^2$
- MAE (mean absolute error; 平均絶対誤差)  $MAE := \frac{1}{90 \times 15} \sum_{x,t} |\log \hat{m}_{xt}^{(\cdot)} - \log m_{xt}|$
- TPR (true positive rate : 真陽性率)  $TPR := \frac{1}{90 \times 15} \sum_{x,t} \mathbb{I}_{\{|\log \hat{m}_{xt}^{(\cdot)} - \log m_{xt}| < |\log \hat{m}_{xt}^{(\text{反対のモデル})} - \log m_{xt}|\}}$

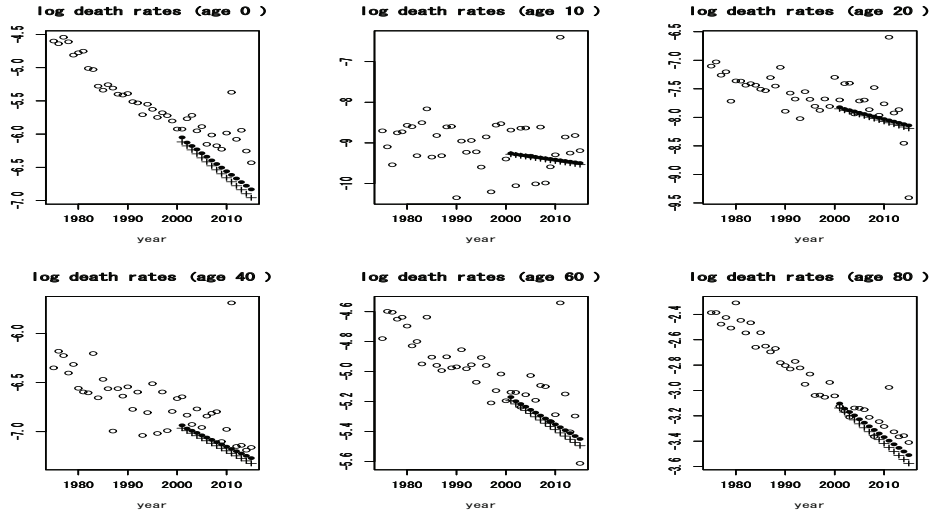


図9 宮城県の将来死亡率予測 (LC, LC-VAR) および実データのプロット

の3つを考える。結果は表5のとおりである。MSE, MAEについては、予測誤差を小さくするという意味で、より小さいモデルの方が精度の高いモデルと言える。また、TPRについては、より真値に近い値を取る割合が大きいという意味で、より大きいモデルの方が精度の高いモデルと言える。いずれの指標に関しても、

選択モデル \ 指標	MSE	MAE	TPR
LC モデル	0.300	0.343	0.203
LC-VAR モデル	0.278	0.318	0.797

表5 宮城県の将来死亡率予測の予測精度の比較 (LC モデル v.s. LC-VAR モデル)

LC-VAR モデルの方が予測精度が良いことが示された。

## 5 おわりに

本論文では、LCモデルに変量間の従属性を組み込んだLC-VARモデルに対する死亡率予測の手法を提案し、LCモデルの場合との予測精度の比較を行った。具体的には、各都道府県ごとの死亡率データにLCモデルを当てはめ、推定された暦年効果の1階差分を2変量VARモデル(LC-VARモデル)に当てはめた場合にGranger Causalityが存在するか否かの検定を行い、採択されたものを本論文の考察モデルとして提案した。今回の解析を通じて、LC-VARモデルに対する変数選択に関して、Granger Causality Testは一つの有効な手段であることが確認された。第4.4節で示したように、宮城県の死亡率予測に(Granger因果性が認められた)青森県の死亡率推移を利用することにより、LCモデルの場合よりも比較的保守的な将来予測を示すケースがあることが分かった。少なくとも、長期間死亡率の改善が見られる日本の死亡率予測に関しては、この比較的保守的な将来予測が、(過度に死亡率改善を見込む傾向にある)LCモデルよりも予測精度を高めることが確認された。

一方で、提案手法には幾つかの問題点があることが分かった。まず、因子寄与率について、一部の都道府県では第1因子の寄与率があまり大きくないことが判明した。全国のような十分大きな母集団に対する死亡率では問題が無いと思われるが、第1因子の寄与率が小さい場合には第1因子だけで説明する従来のLCモデルで

は十分な説明が行われていない危険性があり、千木良・山本(2013)のように第2因子以降もモデルに組み込む必要があると思われる。同時に、CBDモデルのようなコホート効果を組み込んだモデルについての適用可能性も吟味する必要があると思われる。

次に、Granger Causality Testの結果の解釈とLC-VARモデルへの組み込みの判断についての問題がある。今回の解析では、理論的に説明できない都道府県間でGranger因果性が認められた。Granger因果性と通常の因果性は違うこと、因果性の向きが反対になることがあることなど、Granger Causality Testの問題点を把握した上でモデルへの組み込みを考慮する必要がある。また、今回の解析では、検定の多重性を考慮して有意水準を0.5%としたが、この妥当性は吟味する必要がある。複数の都道府県でGranger因果性が認められた場合には、3変量以上のLC-VARの可能性を探る必要がある。なお、CBDモデルなどにモデルを拡張したCBD-VARモデルのようなモデルを考える場合には、Granger Causality Testを改良する必要がある。

さらには、今回の解析には、母集団の大きさの情報が考慮されていないことも問題と思われる。各都道府県の母集団の大きさには差異があり、母集団の大きい東京・大阪・神奈川などの死亡率予測と母集団の小さい福井、島根、鳥取などの死亡率予測は信頼度が異なると思われる。

上記の問題点がある一方で、今回提案した手法は今後の死亡率予測に貢献できると思われる。まず、Granger因果性が認められたことで、(少なくとも観測期間内の死亡率に関しては)死亡率推移の挙動に関して関連性が認められたことを表しており、隠れた因果性を検討するきっかけになると思われる。また、今回のような全都道府県別の解析を行ったことで、因果性の傾向を調べることができる。因果性の影響を与える都道府県が特定することができれば、その都道府県に対する社会政策を検討することで全国の死亡率を効率的に改善することが可能かもしれない。また、若年層や高齢層のような人口が少ない年齢層に限定して提案手法を適用することも可能であると思われる。今回の解析では行わなかったが、暦年効果( $\kappa_t$ )を層別に推定し、将来予測することで予測精度を向上することも検討できると思われる。また、今回の解析では都道府県ごとの将来死亡率予測を行ったが、これを国ごとの将来死亡率予測に適用することで、日本全体の死亡率予測に他国の死亡率の情報を組み込むことも有用であると思われる。

■謝辞 本論文の修正にあたり、査読者の方々より数々の有益なご指摘を頂きました。深く感謝致します。本研究の一部は、JSPS 科研費 16K00036 および先端研究拠点事業 (JSPS : Core-toCore Program) の助成を受けたものです。

## 参考文献

- [1] 赤松賢(2010),「死亡率に関する一考察~Prototype CMI Mortality Projections Model を使った死亡率予測について~」,日本アクチュアリー会会報, 63, 67-107.
- [2] 井川孝之(2013),「残差構造解析による Lee-Carter モデルの拡張と年金負債評価」,総合研究大学院大学複合科学研究科統計科学専攻博士論文
- [3] 石井 太(2008),「近年のわが国の死亡動向に適合した将来生命表推計モデルの研究-年齢シフトモデルの開発-」,『人口問題研究』, 64, 3, 28-44.
- [4] 石井 太(2013),「死亡率曲線の自由な方向への変化を表現する数理モデルとわが国の将来生命表への応用」,『人口問題研究』, 69, 3, 3-26.
- [5] 及川桂(2006),「将来死亡率推定に関する一考察」,日本アクチュアリー会会報, 59, 1-28.
- [6] 沖本 竜義(2010),『経済・ファイナンスデータの計量時系列分析』朝倉書店.
- [7] 厚生労働省(2016),「都道府県別にみた平均寿命の推移」  
URL: <http://www.mhlw.go.jp/toukei/saikin/hw/life/tdfk15/index.html>.
- [8] 小暮厚之 長谷川知弘(2005),「将来生命表の統計モデリング: Lee-Carter 法とその拡張」,『総合政策学



- ワーキングペーパーシリーズ』, No.71.
- [9] 小暮厚之 長谷川知弘 (2011), 「生命表の統計学 死亡率予測モデルとその年金リスク評価への応用」, 『21世紀の統計科学』, 第I巻, 日本統計学会.
- [10] 小松隆一 (2002), 「リレーショナルモデルによる日本将来生命表作成の試み」, 人口問題研究, 58, 3-14.
- [11] 国立社会保障・人口問題研究所 (2016), 「日本の将来推計人口 (平成 27 年 1 月推計)」  
URL: <http://www.ipss.go.jp/syoushika/tohkei/newest04/sh2401top.html>.
- [12] 千木良弘朗 山本拓 (2013), 「Lee-Carter 予測に関する時系列分析の理論的な長所と短所の解明と代替的予測法の提案, 経済統計・政府統計の数理的基礎と応用 II (国友直人, 山本拓 共編), 172-217, 東京大学大学院経済学研究科附属 日本経済国際共同研究センター  
URL: <http://www.cirje.e.u-tokyo.ac.jp/research/reports/R12ab.html>.
- [13] 内閣府 (2016), 「将来推計人口でみる 50 年後の日本」  
URL: [http://www8.cao.go.jp/kourei/whitepaper/w-2012/zenbun/s1\\_1\\_1\\_02.html](http://www8.cao.go.jp/kourei/whitepaper/w-2012/zenbun/s1_1_1_02.html).
- [14] 法元隆 (2009), 「コーホート効果を考慮に入れた死亡率予測のモデル」, 日本アクチュアリー会会報, 62, 183-233.
- [15] 堀内四郎 (2010), 「日本人の寿命伸長: 要因と展望」, 人口問題研究, 66-3, 40-49.
- [16] 山本拓 (2014), 「共和分分析に基づく予測とその応用」, 日本統計学会誌, 43, 315-334.
- [17] Börger, M. and Schupp, J.(2018) “Modeling trend processes in parametric mortality models.” *Insurance: Mathematics and Economics*, 78, 369-380.
- [18] Box, G.E.P., and Jenkins.G.M.(1970) “Time Series Analysis, Forecasting, and Control” Oakland,CA:Holden-Day.
- [19] Brouhns, N., M. Denuit, and J.K. Vermunt(2002) “A Poisson Log-Bilinear Regression Approach to the Construction of Projected Lifetables.” *Insurance: Mathematics and Economics*, 31, 373-393.
- [20] Cairns, A.J.G., Blake, D., and Dowd, K. (2006) “A Two-Factor Model for Stochastic Mortality with Parameter Uncertainty: Theory and Calibration”, *Journal of Risk and Insurance*, 73, 687-718.
- [21] Continuous Mortality Investigation Bureau (CMIB) (2009a) “A Prototype Mortality Projection Model: Part 1 - An Outline of the Proposed Approach”, Working Paper 38.
- [22] Continuous Mortality Investigation Bureau (CMIB) (2009b) “A Prototype Mortality Projection Model: Part 2 - A Detailed Analysis”, Working Paper 39.
- [23] Currie, I.D.(2016) “On fitting generalized linear and non-linear models of mortality” *Scandinavian Actuarial Journal*, 4, 356-383.
- [24] Ekhedden, E., and Hössjer, O. (2015) “Multivariate time series modeling, estimation and prediction of mortalities” *Insurance: Mathematics and Economics*, 65, 156-171.
- [25] Granger, C.W.J. (1969) “Investigating causal relations by econometric models and cross-spectral methods”, *Econometrica*, 37, 424-438.
- [26] Hainaut, D.(2012) “Multidimensional Lee-Carter model with switching mortality processes” *Insurance: Mathematics and Economics*, 50, 236-246.
- [27] Kleinow, T.(2015) “A common age effect model for the mortality of multiple populations” *Insurance: Mathematics and Economics*, 63, 147-152.
- [28] Kleinow, T. and Cairns, A.J.G.(2013) “Mortality and smoking prevalence: An empirical investigation in ten developed countries” *British Actuarial Journal*, 18, 452-466.
- [29] Lee, R.D. and Carter, L.R. (1992) “Modeling and forecasting U.S. mortality”, *Journal of the American Statistical Association*, 87, 659-675.
- [30] Li, N. and Lee, R.(2005) “Coherent mortality forecasts for a group of populations: An extension of

- the Lee-Carter method” *Demography*, 42, 575–594.
- [31] Li, H. and O’Hare, C.(2017) “Semi-parametric extensions of the Cairns-Blake-Dowd model: A one-dimensional kernel smoothing approach” *Insurance: Mathematics and Economics*, 77, 166–176.
- [32] Li, H., O’Hare, C., and Zhang, X.(2015) “A semiparametric panel approach to mortality modeling” *Insurance: Mathematics and Economics*, 61, 264–270.
- [33] Lin, T., Wang, C.W., and Tsai, C.C.L.(2015) “Age-specific copula-AR-GARCH mortality models” *Insurance: Mathematics and Economics*, 61, 110–124.
- [34] Plat, R. (2009) “On stochastic mortality modeling” *Insurance: Mathematics and Economics*, 45, 393–404.
- [35] Renshaw, A.E. and Haberman, S. (2003) “Lee-Carter Mortality Forecasting with Age-Specific Enhancement”, *Insurance: Mathematics and Economics*, 33, 255-272.
- [36] Renshaw, A.E. and Haberman, S. (2006) “A Cohort-Based Extension to the Lee-Carter Model for Mortality Reduction Factors”, *Insurance: Mathematics and Economics*, 38, 556-570.
- [37] Tuljapurkar, S., N.Li, and C. Boe. (2000) “A Universal Parttern of Mortality Decline in the G7 Countries”, *Nature*, 405, 789–792.
- [38] Villegas, A.M., Haberman, S., and Kaishev, V.(2017) “StMoMo: An R Package for Stochastic Mortality Modelling”, R package version &0.4.0, URL: <http://CRAN.R-project.org/package=StMoMo>.

# Mortality forecasting based on VAR model and comparison of the forecasting accuracy

Yukitake Ito\* Hiroshi Shiraishi†

## Abstract

Recently, the Lee-Carter (LC) model is widely adopted as a model to describe the dynamic mortality change. However, it is observed that the actual mortality rate in the Japan's 2002 Population Projections significantly differs from the forecasted mortality rate based on the LC model. Therefore, there is a necessity to develop a new mortality forecasting model following the Japanese feature. In this paper, we introduce VAR (vector-valued autoregressive) model into the framework of the LC model. This model is motivated to consider dependent structure for mortalities among each region or prefecture. In case of the traditional LC model, the yearly effect is forecasted by using the univariate model such as ARIMA (autoregressive integrated moving average) model. In this paper, the first-order difference is fitted to VAR model. After the test of the existence of the Granger Causality, we introduce a model based on the adopted causality. Furthermore, by using an actual mortality data for each prefecture, two types of forecasted mortality rates, namely, the mortality rate by the traditional LC model and that by our proposed model, are compared.

---

\*Graduate School of Fundamental Science and Technology, Keio University

†Department of Mathematics, Keio University; E-mail: shiraishi@math.keio.ac.jp

