研究論文

CRRA 効用消費者の長期証券投資の有限時間最適化問題に対する準解析解

バトボルド ボロルソフタ * 菊池 健太郎 † 楠田 浩二 ‡

2018 年 9 月 3 日投稿

2019 年 5 月 8 日受理

概要

Liu [9] は，潜在ファクターが自身の 2 次関数であるドリフト項および拡散項を持つ拡散過程に従い，短期金利，リスクの市場価格の平方等が潜在ファクターの 2 次関数で記述される証券市場モデルを仮定し，消費と投資の問題を考察している．彼は同問題の最適化の結果導出される非斉次偏微分方程式に対し，解析解の関数形を示し，同関数の未知係数群の連立常微分方程式を導出しているものの，同方程式の解析解は導出していない．本稿では，潜在ファクターが多次元版 Ornstein-Uhlenbeck 過程，短期金利，リスクの市場価格等が潜在ファクターのアフィン関数にそれぞれ従う証券市場モデルを仮定し，消費と投資の問題に対し，解表現に解析関数の時間積分を含む「準解析解」を導出するほか，アフィン 1 ファクター証券市場モデルの下で，同解に基づく比較静学を行う．

キーワード：確率制御，債券投資，消費と投資の問題，準解析解，長期証券投資，比較静学

1 序論

平成バブル崩壊以降の長期低成長の一因としてイノベーション創出のためのリスク・マネーの供給能力の不足が指摘される中，経済成長戦略として「貯蓄から投資へ」[*1]が提唱されて久しいが，家計の投資比率は一貫して低迷を続けている．一因として，政府が家計の資産運用において模範的アセット・アロケーションを提示できていないことが挙げられる．また，GPIF が 2014 年秋，公的年金運用における株式投資比率を引き上げる方針を決定したが，本来，公的年金運用における株式投資比率は，我が国の平均的家計の最適アセット・アロケーションを踏まえて設定されるべきものである．こうした観点から，家計の模範的アセット・アロケーションの探求は，現代日本経済の喫緊の課題と思料する．

証券投資においては，分散投資の重要性が強調されてきたが，分散投資に加えて長期投資が重要である．Campbell and Viceira [7] は，長期投資においては安全証券は短期債ではなく長期物価連動債であることを指摘し，投資対象に長期物価連動債を含めるべきことを強調している．こうした観点から，Campbell and Viceira [7] は金利変動下の消費と株式・債券投資の最適化問題を研究しているが，同問題では，一般に，

* 滋賀大学大学院博士後期課程 Email: bolorsuvdbatbold@gmail.com
† 滋賀大学経済学部 Email: kentaro-kikuchi@biwako.shiga-u.ac.jp
‡ 滋賀大学経済学部 Email: kusuda@biwako.shiga-u.ac.jp 本研究は JSPS 科研費 26380392 の助成を受けたものである．

*1 最近になって，社会保障制度の持続困難を背景に，標語は「貯蓄から資産形成へ」に変更されているが，低迷する家計の投資比率の向上を企図している点では本質的な変化は無いと認識している．

Hamilton-Jacobi-Bellman 方程式（以下，HJB 方程式）から導出される間接効用関数の偏微分方程式に金利変動リスクに起因する非斉次項が現れ，解析解の導出を困難にする．

本稿の目的は，家計の模範的アセット・アロケーションの探求の第 1 次接近として，実用に耐える一般性の高い証券市場モデルを仮定した上で，標準的な CRRA(Constant Relative Risk Aversion) 効用を有する消費者の長期物価連動債を含む長期証券投資の最適化問題に対し解析解を導出することである．

Campbell and Viceira [7] は，CRRA 効用消費者が短期債と一定満期の長期物価連動債に投資する長期投資の最適化問題をバシチェック金利モデルの下で解いている．彼らは HJB 方程式から導出される偏微分方程式の非斉次項に Campbell [5] の提案した対数線形近似法を応用し，近似解析解を導出している．

他方，Liu [9] は，潜在ファクターが自身の 2 次関数であるドリフト項と拡散項を持つ拡散過程に従い，短期金利とリスクの市場価格の平方等が同ファクターの 2 次関数で表される証券市場モデルを仮定し，CRRA 効用を有する消費者の消費と投資（短期債と複数のリスク証券）の有限時間最適化問題を考察している．彼は，HJB 方程式から導出された間接効用関数の非斉次偏微分方程式の解が，非斉次項を捨象した斉次偏微分方程式の解を被積分関数とする積分形式で解析的に表現されることに着目した，同被積分関数を構成する未知係数群の連立常微分方程式を導出している．従って，Liu [9] の提示している解を具体的に計算するためには，同連立常微分方程式を Runge-Kutta 法等の数値解法により解いて未知係数群を求めてから，上記積分を数値計算するという手順を踏む必要がある．

本稿では，実用に耐える一般性の高い証券市場モデルとして，潜在ファクターが多次元版 Ornstein-Uhlenbeck 過程に従い，短期金利とリスクの市場価格が同ファクターのアフィン関数で表されるアフィン潜在ファクター証券市場モデルを仮定し，消費と投資（短期債，全満期の物価連動国債，主要指数）の有限時間最適化問題を考察する．本アフィン潜在ファクター証券市場モデルは，異なる証券の収益率間の関係性を複数の潜在ファクターを通して柔軟に捉えられるほか，消費者が特定の満期に限定されない全ての満期の物価連動債群をポートフォリオに組み入れられるという利点を有している．

本稿の主要な結果は次の通りである．我々は本問題に Liu [9] の方法を適用し，非斉次項を捨象した斉次偏微分方程式の解を被積分関数とする積分形式で間接効用関数を表現し，同被積分関数の未知係数群の連立常微分方程式を導出した．そして，Riccati 型行列微分方程式を含む同微分方程式を解き，解表現に解析関数の時間積分を含む「準解析解」を導出した．従って，我々の提示した解を具体的に計算する際は，Liu [9] の提示している解では必要となる連立常微分方程式の数値計算過程を省略でき，実務上利用し易い結果を与えられている．

次に，短期金利をファクターとするアフィン 1 ファクター証券市場モデルの簡便推定を行い，最適投資比率と最適消費・富比率が相対的リスク許容度，状態変数である短期金利，投資残存期間の変化に伴い，いかなる変化を示すのか，比較静学を試みた．その結果，最適投資比率の保険需要項が相対的リスク許容度の水準や短期金利の水準に応じて異なる符号をとるなどの複雑な振舞が観察された．本問題で得られた解は，潜在ファクターの 1 次の項のみならず 2 次の項にも依存するが，これは実質金利のみならずリスクの市場価格を潜在ファクターのアフィン関数と仮定したことに起因している．比較静学において，危険資産の最適投資比率や最適消費・富比率が相対的リスク許容度や短期金利の変化に対し複雑な振舞を示した原因として，こうしたリスクの市場価格の変化や多くの研究で示されてきた対数線形近似解に基づく比較静学では捉えられていなかった効果が現れていると考えられる．

バトボルド・菊池・楠田 [2] は本研究の枠組みを無限時間問題に拡張し，対数線形近似法により近似解析解を与えている．本研究で導出した厳密解に基づく最適投資とバトボルド他 [2] で導出された近似解に基づく最適投資を比較すると，将来の潜在ファクターの変化に保険を掛ける保険需要項に違いがあることが判明した．すなわち，本研究で導出した保険需要項は潜在ファクターの複雑な関数となる一方，バトボルド他 [2] で対数線近似法に基づき導出しされた保険需要項はアフィン関数で表されており，近似手法の適用に伴う単純化が浮き彫りとなった．

世界金融危機後，消費者の主観的確率を特定する，CRRA 効用を含む期待効用に対する批判が高まっている．

バトボルド・菊池・楠田 [3] は，家計の模範的アセット・アロケーションの探求の第 2 次接近として，消費者の主観的確率を特定できない「ナイトの不確実性」下，曖昧性回避的な「相似拡大的頑健効用」(Maenhout [10]) を有する消費者の長期証券投資問題をアフィン潜在ファクター証券市場モデルを仮定して考察している．同問題では，HJB 方程式から導出される非斉次偏微分方程式に非斉次項のみならず非線形項が現れるため，Liu [9] の解析解構成法は適用できない．そこで，彼らは対数線形近似法を適用して近似解析解を導出している．しかし，同近似解析解の近似精度の検証は今後の課題として残されている．CRRA 効用は相似拡大的頑健効用の特殊な場合とみなせることから，本稿で示された準解析解は，同近似解析解の近似精度の検証に利用できる．

本稿の構成は次の通りである．第 2 節では，アフィン潜在ファクター証券市場モデルと消費者の最適化問題を説明する．第 3 節で，HJB 方程式から導出される値関数の偏微分方程式より準解析解を導出し，物価連動債の典型的投資戦略に対する最適投資比率を示す．第 4 節で，簡便数値実験による比較静学を行う．第 5 節で，今後の課題を述べる．

2　アフィン潜在ファクター証券市場モデルと消費者の最適化問題

本節では，まず，アフィン潜在ファクター証券市場モデルを紹介し，証券価格過程の従う確率微分方程式を示す．次に，消費者の最適化問題を示す．

2.1　市場環境

無限連続時間の摩擦の無い証券市場経済を考察する．消費者共通の確率測度と情報構造は完備フィルター付き確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathrm{P})$ によりモデル化されている．ここで，$\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,\infty)}$ は N 次元標準ブラウン運動 B によって生成される自然なフィルター付けである．期待値作用素を E，$\mathcal{F}_t$ の下での期待値作用素を E_t と表記する．

市場では，1 種類の消費財，短期債（以下，適宜「短期安全証券」と呼ぶ)，「中長期安全証券」としての満期までの期間が最長 τ，額面が 1 単位の消費財，任意の満期の信用リスクの無い割引物価連動債（以下，「物価連動債」と呼ぶ)，J 種類の非債券の主要指数（株式指数，REIT 指数等）が任意の時点で取引されている．

以下では，消費財を価値基準財とし，諸証券の価格を実質価格で表示する．短期債の実質価格を P_t，満期 T の物価連動債の実質価格を P_t^T，非債券の主要指数の配当込みの実質価格を S_t^j と表記する．また，行列，もしくはベクトル A の転置を A' と表記する．

本稿では，一般性の高い，アフィン潜在ファクター証券市場モデルを仮定する．

仮定 1　N 次元潜在ファクター X_t は次の確率過程に従う．

$$dX_t = K(\theta - X_t)\,dt + \Sigma\,dB_t, \tag{2.1}$$

ここで，θ は $N \times 1$ 定数ベクトル，K, Σ は $N \times N$ 定数行列である．

物価連動債の実質価格 (実質金利の期間構造）については，潜在ファクター X_t のアフィン・モデル（Duffie and Kan [8] ）を仮定し，非債券の主要指数については，Mamaysky [11] の提案したアフィン型モデルにおいて非定常項を捨象したモデルを仮定する．

仮定 2　1. リスクの市場価格 Λ_t，瞬間的スポット・レート r_t は，潜在ファクター X_t のアフィン関数である．

$$\Lambda_t = \lambda + \Lambda X_t, \tag{2.2}$$
$$r_t = r_0 + r' X_t, \tag{2.3}$$

ここで，r_0 は定数，λ, r は $N \times 1$ 定数ベクトル，Λ は $N \times N$ 定数行列であり，$K + \Sigma\Lambda$ は正則である．

2. 非債券の主要指数の配当過程 D_t^j は潜在ファクター X_t の次式で表される関数である．

$$D_t^j = (d_{0j} + d_j' X_t)\exp(b_{0j}t + b_j' X_t). \tag{2.4}$$

ここで，d_{0j}, b_{0j} は定数，d_j, b_j は $N \times 1$ 定数ベクトルである．

2.2 証券価格過程

以下では，物価連動債の満期までの期間を $\tau = T - t$，$N \times N$ 単位行列を I_N と表記する．

補題 1 仮定 1・2 の下，諸証券の無裁定実質価格過程は次を満たしている．

$$\frac{dP_t}{P_t} = r_t\, dt, \qquad P_0 = 1. \tag{2.5}$$

$$\frac{dP_t^T}{P_t^T} = (r_t + b(\tau)'\Sigma\Lambda_t)\ dt + b(\tau)'\Sigma\, dB_t, \qquad P_T^T = 1, \tag{2.6}$$

ここで，$b(\tau)$ は次式で与えられている．

$$b(\tau) = (K + \Sigma\Lambda)'^{-1}\big(e^{-\tau(K+\Sigma\Lambda)'} - I_N\big)r. \tag{2.7}$$

$$\frac{dS_t^j}{S_t^j} = \big(r_t + b_j'\Sigma\Lambda_t\big)\ dt + b_j'\Sigma\, dB_t, \tag{2.8}$$

ここで，b_j は次式で与えられている．

$$b_j = (K + \Sigma\Lambda)'^{-1}(d_j - r). \tag{2.9}$$

証明は付録 A.1 参照.

2.3 消費者の最適化問題

非債券の主要指数に対する投資比率を Φ_t^j と表記する．また，物価連動債については，任意の満期の物価連動債を投資対象としているため，富に対する投資比率密度過程が最適化の対象となる．そこで，物価連動債の富に対する投資比率密度過程を $\varphi_t(\tau)$ と表記する[*2]．以下では，次の記法を用いる．

$$\Psi_t = \Sigma'\left(\int_0^{\bar{\tau}} \varphi_t(\tau) b(\tau)\, d\tau + \sum_{j=1}^{J} \Phi_t^j b_j\right). \tag{2.10}$$

以下，Ψ_t を「投資過程」ないしは「投資」と略称する．

このとき，予算制約式が次の補題で示される．

補題 2 投資過程 Ψ_t と消費率過程 c_t を所与とする．このとき，仮定 1・2 の下，富過程 W_t は次の予算制約式を満たす．

$$dW_t = \{W_t\,(r_t + \Psi_t'\Lambda_t) - c_t\}\ dt + W_t\Psi_t'\, dB_t. \tag{2.11}$$

証明は付録 A.2 参照.

[*2] なお，このとき，ある特定の満期の物価連動債の投資比率自体を非零とする投資を認めるため，許容される関数 φ の空間は超関数を含む関数空間とする．

留意点 1　予算制約式 (2.11) は，投資 Ψ_t が大きくなるにつれて，富の実質収益率のリスクを高める一方，リスクの市場価格に比例して富の実質期待超過収益率を高めることを示している．すなわち，リスクの市場価格は全消費者共通の投資リスクの対価であることを示している．

予算制約式 (2.11) は，富過程が $u = (c, \Psi)$ で決定されることを示しており，消費者の効用最大化問題における制御変数は $u = (c, \Psi)$ であることが分かる．

仮定 3　消費者は次の相対的リスク回避度一定効用を予算制約式 (2.11) の下で最大化する．

$$U(c) = \mathrm{E}\left[\int_0^T \alpha\, e^{-\beta t} \frac{c_t^{1-\gamma}}{1-\gamma} dt + (1-\alpha)\, e^{-\beta T} \frac{W_T^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right]. \tag{2.12}$$

状態過程を $\mathbb{X}_t' = (W_t, X_t')$ と表記する．$W_0 > 0$ とする．予算制約式 (2.11) を満たす制御過程 $u_t = (c_t, \Psi_t)$ を初期状態 $\mathbb{X}_0' = (W_0, X_0')$ に対する許容的制御と呼び，許容的制御の集合を $\mathcal{B}(\mathbb{X}_0)$ と表記する．このとき，「富を含む状態変数に対する広義の間接効用関数」J（以下，「間接効用関数」と呼ぶ）が次式で定義される．

$$J(t, \mathbb{X}_t^u) = \mathrm{E}_t\left[\int_t^T \alpha\, e^{-\beta s} \frac{c_s^{1-\gamma}}{1-\gamma} ds + (1-\alpha)\, e^{-\beta T} \frac{W_T^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right], \qquad \forall t \in [0, T]. \tag{2.13}$$

本稿における消費と投資の最適化問題と価値関数 $V(\mathbb{X}_0)$ が次式で定義される．

$$V(\mathbb{X}_0) = \sup_{u \in \mathcal{B}(\mathbb{X}_0)} J(0, \mathbb{X}_0). \tag{2.14}$$

3　最適消費・投資の準解析解

本節では，HJB 方程式から推測された価値関数を構成する未知関数 $G(t, X_t)$ の偏微分方程式を導出した後，同方程式に Liu [9] の解析解構成法を適用して，解の関数形を特定し，同関数の未知係数群の常微分方程式を導出する．さらに，同方程式を解いて，最適消費・投資の準解析解を導出する．

3.1　価値関数の偏微分方程式の導出

HJB 方程式は次式のように表される．

$$\begin{aligned}\sup_{u \in \mathcal{B}(\mathbb{X}_0)} \Bigg\{ & J_t(t, \mathbb{X}^u) + \begin{pmatrix} W_t\,(r_t + \Psi_t' \Lambda_t) - c_t \\ K(\theta - X_t) \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} J_W(t, \mathbb{X}^u) \\ J_X(t, \mathbb{X}^u) \end{pmatrix} \\ & + \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left[\begin{pmatrix} W_t \Psi_t' \\ \Sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_t \Psi_t' \\ \Sigma \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} J_{WW}(t, \mathbb{X}^u) & J_{WX}(t, \mathbb{X}^u) \\ J_{XW}(t, \mathbb{X}^u) & J_{XX}(t, \mathbb{X}^u) \end{pmatrix} \right] + \alpha\, e^{-\beta t} \frac{c_t^{1-\gamma}}{1-\gamma} \Bigg\} = 0, \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\text{s.t.} \quad J(T, \mathbb{X}_T^u) = (1-\alpha)\, e^{-\beta T} \frac{W_T^{1-\gamma}}{1-\gamma}.$$

HJB 方程式における最大化の必要条件から制御変数の最適解 $u^* = (c^*, \Psi^*)$ は次式を満たしている．

$$c_t^* = \alpha^{\frac{1}{\gamma}} e^{-\frac{\beta}{\gamma} t} J_W^{-\frac{1}{\gamma}}, \tag{3.2}$$

$$\Psi_t^* = \frac{\pi_t}{W_t^{*2} J_{WW}}, \tag{3.3}$$

ここで，W_t^* は予算制約式 (2.11) に最適制御 $u^* = (c^*, \Psi^*)$ を代入して得られる最適富過程で，

$$\pi_t = -W_t^* \left\{ J_W \Lambda_t + \Sigma' J_{XW} \right\}. \tag{3.4}$$

留意点 2　最適制御は，次式のように，2 項の和に分解される．

$$\Psi_t^* = -\frac{J_W}{W_t^* J_{WW}}\Lambda_t - \Sigma' \frac{J_{XW}}{W_t^* J_{WW}}. \tag{3.5}$$

第 1 項は，状態過程 X_t の変動に起因する限界間接効用 J_W の変動リスクを考慮せず，リスク資産投資の報酬であるリスクの市場価格を近視眼的に追求する項であり，「近視眼的需要項（myopic demand）」と呼ばれている．第 2 項は，状態過程 X_t の変動に起因する限界間接効用の変動リスクに保険を掛ける項であり，「保険需要項（hedging demand）」と呼ばれている．

最適消費 (3.2) 式と最適投資 (3.3) 式を HJB 方程式 (3.1) に代入し，

$$W_t^* J_W \Lambda_t' \Psi_t^* + \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left[\begin{pmatrix} W_t^*(\Psi_t^*)' \\ \Sigma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} W_t^*(\Psi_t^*)' \\ \Sigma \end{pmatrix}'\begin{pmatrix} J_{WW} & J_{WX} \\ J_{XW} & J_{XX} \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left[\Sigma\Sigma' J_{XX}\right] - \frac{\pi_t'\pi_t}{2W_t^{*2} J_{WW}}, \tag{3.6}$$

に注意して整理すると，次の間接効用関数 J に関する偏微分方程式が得られる．

$$J_t + \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left[\Sigma\Sigma' J_{XX}\right] - \frac{\pi_t'\pi_t}{2W_t^{*2} J_{WW}} + W_t^* r_t J_W + \{K(\theta - X_t)\}' J_X + \frac{\gamma}{1-\gamma} c_t^* J_W = 0. \tag{3.7}$$

上記偏微分方程式から間接効用関数 J は未知関数 $G(t, X_t)$ を用いて次の関数形で表されると推測される．

$$J(t, \mathbb{X}_t) = e^{-\beta t}\frac{W_t^{1-\gamma}}{1-\gamma}\big(G(t, X_t)\big)^{\gamma}. \tag{3.8}$$

従って，HJB 方程式左辺の最大化の十分条件が満たされることは，次式で表される Hessian $\mathbf{H}$ が任意の制御変数 $(c, \Psi) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N$ に対し負定符号であることで確認できる．

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} -\alpha\gamma e^{-\beta t} c^{-\gamma-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\gamma e^{-\beta t}(W_t^*)^{1-\gamma}\big(G(X_t)\big)^{\gamma} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\gamma e^{-\beta t}(W_t^*)^{1-\gamma}\big(G(X_t)\big)^{\gamma} \end{pmatrix}. \tag{3.9}$$

間接効用関数 J に偏微分を施し，(3.2)(3.3) 式に代入し，偏微分結果とともに偏微分方程式 (3.7) に代入すると，次の命題を得る．

命題 1　仮定 1-3 の下，本問題 (2.14) の価値関数，最適消費，最適投資は，それぞれ (3.8) 式，(3.10) 式，(3.12) 式で表される．ここで，$G(t, X_t)$ は偏微分方程式 (3.13) の解である．

$$c_t^* = \alpha^{\frac{1}{\gamma}}\frac{W_t^*}{G}, \tag{3.10}$$

ここで，

$$W_t^* = W_0 \exp\left(\int_0^t \left(r_s + (\Psi_s^*)'\Lambda_s - \frac{\alpha^{\frac{1}{\gamma}}}{G(X_s)} - \frac{1}{2}(\Psi_s^*)'\Psi_s^*\right) ds + (\Psi_s^*)'\, dB_s\right), \tag{3.11}$$

$$\Psi_t^* = \frac{1}{\gamma}\Lambda_t + \Sigma'\frac{G_X}{G}, \tag{3.12}$$

$$G_t + \mathcal{L}G + \alpha^{\frac{1}{\gamma}} = 0, \qquad G(T, X_T) = (1-\alpha)^{\frac{1}{\gamma}}, \tag{3.13}$$

ここで，$\mathcal{L}$ は次式で定義される線形微分作用素である．

$$\begin{aligned}\mathcal{L}G = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left[\Sigma\Sigma' G_{XX}\right] &+ \left(K(\theta - X) - \frac{\gamma-1}{\gamma}\Sigma(\lambda + \Lambda X)\right)' G_X \\ &- \left(\frac{\gamma-1}{2\gamma^2}(\lambda + \Lambda X)'(\lambda + \Lambda X) + \frac{\gamma-1}{\gamma} r_t + \frac{\beta}{\gamma}\right) G. \end{aligned} \tag{3.14}$$

証明は付録 A.3 参照.

留意点 3　(3.11) 式より，最適富過程は常に正であることが確認できる．また，$G(X_t)$ も常に正であることが後に示されることから，(3.10) 式より，最適消費過程も常に正であることが確認される．

3.2　準解析解の導出

偏微分方程式 (3.13) は非斉次項 $\alpha^{\frac{1}{\gamma}}$ を含んでおり，解析解の導出を困難にしている．Liu [9] は，同方程式の非斉次項を捨象した斉次偏微分方程式 (3.15) の初期値問題の解析解を利用した解析解構成法を提示しているので，我々も同構成法により準解析解を導出する．

$$\frac{\partial}{\partial \tau} g(\tau, X) = \mathcal{L} g(\tau, X), \qquad g(0, X) = 1, \tag{3.15}$$

ここで，$\tau = T - t$ である．

偏微分方程式 (3.15) の解は次式で表される．

$$g(\tau, X) = \exp\left(a_0(\tau) + a(\tau)' X + \frac{1}{2} X' A(\tau) X \right), \tag{3.16}$$

ここで，$A(\tau)$ は対称行列であり，係数体系 $(a_0(\tau), a(\tau), A(\tau))$ は (3.16) 式を (3.15) 式に代入した後に現れる X に関する恒等式 (3.18) から導かれる常微分方程式 (3.19)-(3.21) の解となる．

このとき，微分作用素 $\mathcal{L}$ の線形性により，偏微分方程式 (3.13) の解析解を次式で表現できる．

$$G(t, X) = \alpha^{\frac{1}{\gamma}} \int_0^{T-t} g(s, X)\, ds + (1-\alpha)^{\frac{1}{\gamma}} g(T-t, X). \tag{3.17}$$

(3.16) 式の関数 g に偏微分を施し，偏微分方程式 (3.15) に代入すると，次式を得る．

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\tau} a_0(\tau) + X' \frac{d}{d\tau} a(\tau) + \frac{1}{2} X' \frac{d}{d\tau} A(\tau) X &= \frac{1}{2} \operatorname{tr}\left[\Sigma\Sigma'(aa' + A + aX'A + AXa' + AXX'A)\right] \\ &\quad + \left\{ K\theta - \frac{\gamma-1}{\gamma}\Sigma\lambda - \left(K + \frac{\gamma-1}{\gamma}\Sigma\Lambda\right) X \right\}' (a + AX) \\ &\quad - \left(\frac{\gamma-1}{2\gamma^2}(\lambda'\lambda + 2\lambda'\Lambda X + X'\Lambda'\Lambda X) + \frac{\gamma-1}{\gamma}(r_0 + r'X) + \frac{\beta}{\gamma} \right).\end{aligned} \tag{3.18}$$

上式は X に関する恒等式なので，次の (a_0, a, A) に関する常微分方程式が導出される．

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\tau} a_0(\tau) = \frac{1}{2} a(\tau)'\Sigma\Sigma' a(\tau) + \frac{1}{2}\operatorname{tr}[\Sigma\Sigma' A(\tau)] + \left(K\theta - \frac{\gamma-1}{\gamma}\Sigma\lambda\right)' a(\tau) - \left(\frac{\gamma-1}{2\gamma^2}\lambda'\lambda + \frac{\gamma-1}{\gamma} r_0 + \frac{\beta}{\gamma}\right), \\ a_0(0) = 0.\end{aligned} \tag{3.19}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\tau} a(\tau) = \left\{ A(\tau)\Sigma\Sigma' - \left(K + \frac{\gamma-1}{\gamma}\Sigma\Lambda\right)' \right\} a(\tau) + A(\tau)\left(K\theta - \frac{\gamma-1}{\gamma}\Sigma\lambda\right) - \left(\frac{\gamma-1}{\gamma^2}\Lambda'\lambda + \frac{\gamma-1}{\gamma} r\right), \\ a(0) = 0,\end{aligned} \tag{3.20}$$

$$\frac{d}{d\tau} A(\tau) = A(\tau)\Sigma\Sigma' A(\tau) - 2\left(K + \frac{\gamma-1}{\gamma}\Sigma\Lambda\right)' A(\tau) - \frac{\gamma-1}{\gamma^2}\Lambda'\Lambda, \qquad A(0) = 0. \tag{3.21}$$

留意点 4　本問題の解は，一般に潜在ファクターの 2 次の項に依存しているが，(3.21) 式から明らかな通り，2 次の項の係数 $A(\tau)$ は，リスクの市場価格が一定の場合（$\Lambda = 0$），$A(\tau) = 0$ となり，消滅する．すなわち，本問題の解が潜在ファクターの 2 次の項に依存するのは，リスクの市場価格を潜在ファクターのアフィン関数と仮定したことに起因している．

次の記法を用いる．

$$a_t^*(X_t) = \frac{\int_0^{T-t} \alpha^{\frac{1}{\gamma}} g(s, X_t) a(s)\, ds + (1-\alpha)^{\frac{1}{\gamma}} g(T-t, X_t) a(T-t)}{\alpha^{\frac{1}{\gamma}} \int_0^{T-t} g(s, X_t)\, ds + (1-\alpha)^{\frac{1}{\gamma}} g(T-t, X_t)}, \tag{3.22}$$

$$A_t^*(X_t) = \frac{\int_0^{T-t} \alpha^{\frac{1}{\gamma}} g(s, X_t) A(s)\, ds + (1-\alpha)^{\frac{1}{\gamma}} g(T-t, X_t) A(T-t)}{\alpha^{\frac{1}{\gamma}} \int_0^{T-t} g(s, X_t)\, ds + (1-\alpha)^{\frac{1}{\gamma}} g(T-t, X_t)}. \tag{3.23}$$

このとき，次の命題を得る．

命題 2　仮定 1-3 の下，本問題 (2.14) の最適消費および最適投資は次を満たしている．

$$c_t^* = \frac{\alpha^{\frac{1}{\gamma}} W_t^*}{\alpha^{\frac{1}{\gamma}} \int_0^{T-t} g(s, X)\, ds + (1-\alpha)^{\frac{1}{\gamma}} g(T-t, X)}, \tag{3.24}$$

ここで，W_t^* は (3.11) 式で表されている．

$$\varPsi_t^* = \frac{1}{\gamma}(\lambda + \Lambda X_t) + \Sigma' \big(a_t^*(X_t) + A_t^*(X_t) X_t\big), \tag{3.25}$$

ここで，(a_0, a, A) は (3.26)-(3.28) 式で表され，A は対称行列である．

$$\begin{aligned} a_0(\tau) = \int_0^\tau \Bigg\{ & \frac{1}{2} a(s)' \Sigma\Sigma' a(s) + \frac{1}{2} \mathrm{tr}[\Sigma\Sigma' A(s)] + \left(K\theta - \frac{\gamma-1}{\gamma}\Sigma\lambda\right)' a(s) \\ & - \left(\frac{\gamma-1}{2\gamma^2}\lambda'\lambda + \frac{\gamma-1}{\gamma} r_0 + \frac{\beta}{\gamma}\right)\Bigg\} ds, \end{aligned} \tag{3.26}$$

$$\begin{aligned} a(\tau) = & \exp\left(\int_0^\tau \left\{A(s)\Sigma\Sigma' - \left(K + \frac{\gamma-1}{\gamma}\Sigma\Lambda\right)\right\} ds\right) \\ & \times \int_0^\tau \left\{A(s)\left(K\theta - \frac{\gamma-1}{\gamma}\Sigma\lambda\right) - \left(\frac{\gamma-1}{\gamma^2}\Lambda'\lambda + \frac{\gamma-1}{\gamma} r\right)\right\} e^{\int_0^s \left(-A(t)\Sigma\Sigma' + K + \frac{\gamma-1}{\gamma}\Sigma\Lambda\right) dt} ds, \end{aligned} \tag{3.27}$$

$$A(\tau) = C_2(\tau) C_1^{-1}(\tau), \tag{3.28}$$

ここで，

$$\begin{pmatrix} C_1(\tau) \\ C_2(\tau) \end{pmatrix} = \exp\left(\tau \begin{pmatrix} K + \frac{\gamma-1}{\gamma}\Sigma\Lambda & -\Sigma\Sigma' \\ -\frac{\gamma-1}{\gamma^2}\Lambda'\Lambda & -\left(K + \frac{\gamma-1}{\gamma}\Sigma\Lambda\right)' \end{pmatrix}\right) \begin{pmatrix} I_N \\ 0_N \end{pmatrix}, \tag{3.29}$$

ここで，0_N は $N \times N$ 零行列である．

証明は付録 A.4 参照．

留意点 5　相対的リスク許容度が 1 の場合，常微分方程式 (3.20)(3.21) より，$(a, A) = (0, 0)$ となるので，これを (3.22)(3.23) 両式に代入すると，$(a^*, A^*) = (0, 0)$ となる．従って，(3.25) 式で表される最適投資の第 2 項である保険需要項は消滅する．

留意点 6　バトボルド他 [2] は CRRA 効用を有する消費者がアフィン潜在ファクター証券市場モデルの下，全満期の国債，株式指数等の主要指数に投資する長期証券投資の無限時間最適化問題に Campbell and Viceira [7] の対数線形近似法を適用して近似解析解を導出している．当該近似最適投資 $\tilde{\varPsi}_t^*$ は次式で示されている．

$$\tilde{\varPsi}_t^* = \frac{1}{\gamma}(\lambda + \Lambda X_t) + \Sigma' \big(a + A X_t\big). \tag{3.30}$$

ここで，(a, A) はある代数方程式の解として定められる定数である．

上式を (3.25) 式の最適投資 $\tilde{\Psi}_t^*$ と比較すると，将来の潜在ファクターの変化を考慮しない第 1 項の近視眼的需要項は同一であるが，将来の潜在ファクターの変化に保険を掛ける第 2 項の保険需要項は，本来，状態変数 X_t に依存する $(a^*(X_t), A(X_t^*))$ を定数とみなしていることが分かる．この近似における単純化による代償の大きさについては，実証分析に委ねられる．

留意点 7　準解析解が導出されたので，最適消費・富比率とリスク資産の最適投資比率が，非終端効用に対する加重 α，相対的リスク許容度 $1/\gamma$，状態変数 X_t，投資残存期間 τ の変化に伴い，いかなる変化を示すのか，比較静学が望まれる．

これらのうち，最適消費・富比率が非終端効用に対する加重 α の増加関数であることは，$\alpha \in (0,1)$ で，

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{c_t^*}{W_t^*} = \frac{\partial}{\partial\alpha}\left\{\int_0^{T-t} g(s,X)\,ds + \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\gamma}} g(T-t,X)\right\}^{-1}$$
$$= \frac{1}{\alpha^2\gamma}\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\gamma}-1} g(T-t,X)\left\{\int_0^{T-t} g(s,X)\,ds + \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\gamma}} g(T-t,X)\right\}^{-2} > 0, \quad (3.31)$$

から直ちに判明する．しかし，状態変数と最適消費・富比率の関係については，

$$\frac{\partial}{\partial X_t}\frac{c_t^*}{W_t^*} = -\alpha^{\frac{1}{\gamma}}\frac{G_X(X_t)}{G^2(X_t)}, \tag{3.32}$$

と偏導関数は導かれ，保険需要項の符号と関係付けられることは示されているものの，符号は判明しない．そして，相対的リスク許容度と最適消費・富比率の関係については，最適消費・富比率が (a_0, a, A) の関数であり，(a_0, a, A) が相対的リスク許容度の複雑な関数となっているため，解析的な比較静学は容易ではない．最適投資比率についても，同比率が (a_t^*, A_t^*) の関数であり，(a_t^*, A_t^*) が投資期間，非終端効用に対する加重，相対的リスク許容度，状態変数の複雑な関数となっており，解析的な比較静学は困難である．そこで，第 4 節では，最も単純化されたアフィン 1 ファクター証券市場モデルの下での簡便数値実験による比較静学を試みる．

3.3　最適投資比率の典型例

標準ブラウン運動が N 次元で，非債券の主要指数が J 種類なので，物価連動債については，$I(=N-J)$ 群の投資対象を設定することにより，最適投資比率を決定できる．ここでは，典型的な物価連動債投資戦略として，物価連動債投資比率密度，物価連動債投資比率をそれぞれ対象とする投資戦略を取り上げ，各戦略における最適投資比率を示す．

3.3.1　物価連動債投資比率密度を対象とする投資戦略

物価連動債の満期までの期間を I 群に区分し，各時点において各区分への投資比率密度を一定とする投資戦略を消費者が採用する場合を考察する．説明の便宜上，$\tau_0 = 0$，$\tau_I = \bar{\tau}$ と表記し，物価連動債の満期までの期間を $(\tau_0, \tau_1], (\tau_1, \tau_2], \cdots, (\tau_{I-1}, \tau_I]$ に区分する．また，投資比率密度過程を $(\varphi_t^1, \varphi_t^2, \cdots, \varphi_t^I)$ とするほか，次のように記法を定める．

$$\Phi_{1t} = \begin{pmatrix}\Phi_{1t}^P \\ \Phi_{1t}^S\end{pmatrix}, \qquad B_1 = \begin{pmatrix}B_1^P \\ B_1^S\end{pmatrix}, \tag{3.33}$$

ここで，

$$\Phi_{1t}^P = \begin{pmatrix}\varphi_t^1(\tau_1-\tau_0) \\ \varphi_t^2(\tau_2-\tau_1) \\ \vdots \\ \varphi_t^I(\tau_I-\tau_{I-1})\end{pmatrix}, \qquad \Phi_{1t}^S = \begin{pmatrix}\Phi_t^1 \\ \Phi_t^2 \\ \vdots \\ \Phi_t^J\end{pmatrix}, \qquad B_1^P = \begin{pmatrix}(\tau_1-\tau_0)^{-1}\int_{\tau_0}^{\tau_1} b(\tau)'d\tau \\ (\tau_2-\tau_1)^{-1}\int_{\tau_1}^{\tau_2} b(\tau)'d\tau \\ \vdots \\ (\tau_I-\tau_{I-1})^{-1}\int_{\tau_{I-1}}^{\tau_I} b(\tau)'d\tau\end{pmatrix}, \qquad B_1^S = \begin{pmatrix}b_1' \\ b_2' \\ \vdots \\ b_J'\end{pmatrix}.$$

このとき，(2.10) 式および (3.25) 式より，最適投資比率 $\varPhi^*_{1t}$ は次式で表される．

$$\varPhi^*_{1t} = \frac{1}{\gamma}(\Sigma' B'_1)^{-1}(\lambda + \Lambda X_t) + (B'_1)^{-1}\bigl(a^*_t(X_t) + A^*_t(X_t)X_t\bigr). \tag{3.34}$$

なお，短期安全証券への最適投資比率は $1 - \sum_{i=1}^{I} \varphi^{*i}_t(\tau_i - \tau_{i-1}) - \sum_{j=1}^{J} \varPhi^{*j}_t$ である．

3.3.2　物価連動債投資比率を対象とする投資戦略

消費者が I 種類の一定満期の物価連動債を投資対象とする戦略を採用する場合を考察する．投資対象物価連動債の満期を $0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_I \leq \bar{\tau}$ とし，各満期の物価連動債への投資比率を $\varPhi^1_P, \varPhi^2_P, \cdots, \varPhi^I_P$ とする．次のように記法を定める．

$$\varPhi_{2t} = \begin{pmatrix} \varPhi^P_{2t} \\ \varPhi^S_{2t} \end{pmatrix}, \qquad B_2 = \begin{pmatrix} B^P_2 \\ B^S_2 \end{pmatrix}, \tag{3.35}$$

ここで，

$$\varPhi^P_{2t} = \begin{pmatrix} \varPhi^1_{Pt} \\ \varPhi^2_{Pt} \\ \vdots \\ \varPhi^I_{Pt} \end{pmatrix}, \qquad \varPhi^S_{2t} = \begin{pmatrix} \varPhi^1_t \\ \varPhi^2_t \\ \vdots \\ \varPhi^J_t \end{pmatrix}, \qquad B^P_2 = \begin{pmatrix} b(\tau_1)' \\ b(\tau_2)' \\ \vdots \\ b(\tau_I)' \end{pmatrix}, \qquad B^S_2 = \begin{pmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ \vdots \\ b'_J \end{pmatrix}. \tag{3.36}$$

このとき，(2.10) 式および (3.25) 式より，最適投資比率 $\varPhi^*_{2t}$ は次式で表される．

$$\varPhi^*_{2t} = \frac{1}{\gamma}(\Sigma' B'_2)^{-1}(\lambda + \Lambda X_t) + (B'_2)^{-1}\bigl(a^*_t(X_t) + A^*_t(X_t)X_t\bigr). \tag{3.37}$$

なお，短期安全証券への最適投資比率は $1 - \sum_{i=1}^{I} \varPhi^{*i}_{Pt} - \sum_{j=1}^{J} \varPhi^{*j}_t$ である．

4　簡便数値実験による比較静学

本節では，簡便な数値実験により，最適消費・富比率と最適投資比率の比較静学を行う．

4.1　証券市場モデルの特定と簡便推定結果

最も単純なアフィン・ファクター証券市場モデルとして，$N = 1$，$r_t = X_t$ と仮定し，簡便推定を行う[*3]．また，消費者は短期債と時価総額加重型株式指数のみに投資すると仮定する．すなわち，次の証券市場モデルを仮定する．

$$dr_t = K(\theta - r_t)\,dt + \Sigma\,dB_t, \tag{4.1}$$

$$\frac{dS_t}{S_t} = (r_t + b\,\Sigma\Lambda_t)\;dt + b\,\Sigma\,dB_t, \tag{4.2}$$

ここで，

$$\Lambda_t = \lambda + \Lambda\,r_t. \tag{4.3}$$

留意点 8　Wachter [12] は，短期金利一定で，ファクターであるリスクの市場価格が Ornstein-Uhlenbeck 過程に従う，本稿よりも簡素な 1 ファクター証券市場モデルを仮定し，CRRA 効用を有する消費者の消費と投資（短期債と株式）の有限時間最適化問題を考察している．同論文では，martingale 法により解析解を導出し，本稿と同様の比較静学を行っている．

[*3] バトボルド他 [4] は，Epstein-Zin 効用を有する消費者の最適消費・投資問題の近似解析解表現を与えた上で，本節と同一の証券市場モデル，係数推定値を用いて，近似精度の検証や比較静学を行っている．

米国の 1990 年 10 月末〜2018 年 10 月末までの 28 年・7,056 日分の日次終値を対象に推定を行った．短期金利は財務省短期証券 3 カ月物，時価総額加重型株式指数は S&P500 指数を用い，これらの実質化は 1991 年〜2018 年の消費者物価指数のインフレ率で行った．

そして，次の手順で簡便推定を行った．

1. (4.1) 式，(4.2) 式を次のように Euler 離散化する．

$$r_{(n+1)\Delta} - r_{n\Delta} = K\theta\Delta - K\Delta\, r_{n\Delta} + \Sigma\,(B_{(n+1)\Delta} - B_{n\Delta}), \tag{4.4}$$

$$\frac{S_{(n+1)\Delta} - S_{n\Delta}}{S_{n\Delta}} = b\,\Sigma\lambda\Delta + (1 + b\,\Sigma\Lambda)\Delta\, r_{n\Delta} + b\,\Sigma\,(B_{(n+1)\Delta} - B_{n\Delta}), \tag{4.5}$$

ここで，

$$\Delta = \frac{28}{7056 - 1}.$$

2. (4.4) 式，(4.5) 式をそれぞれ (4.6) 式，(4.7) 式で表される線形回帰モデルとみなし，各線形回帰モデルを OLS で推定する．

$$Y_{1n} = \alpha_1 + \beta_1 X_{1n} + \varepsilon_{1n}, \tag{4.6}$$

ここで，

$$Y_{1n} = r_{(n+1)\Delta} - r_{n\Delta} \quad \alpha_1 = K\theta\Delta, \quad \beta_1 = -K\Delta, \quad X_{1n} = r_{n\Delta}, \quad \varepsilon_{1n} = \Sigma\,(B_{(n+1)\Delta} - B_{n\Delta}),$$

$$Y_{2n} = \alpha_2 + \beta_2 X_{2n} + \varepsilon_{2n}, \tag{4.7}$$

ここで，

$$Y_{2n} = \frac{S_{(n+1)\Delta} - S_{n\Delta}}{S_{n\Delta}}, \quad \alpha_2 = b\,\Sigma\lambda\Delta, \quad \beta_2 = (1+b\,\Sigma\Lambda)\Delta, \quad X_{2n} = r_{n\Delta}, \quad \varepsilon_{2n} = b\,\Sigma\,(B_{(n+1)\Delta} - B_{n\Delta}).$$

3. 推定値 $(\hat{\alpha}_1, \hat{\beta}_1, \hat{\alpha}_2, \hat{\beta}_2)$ と残差標準偏差に基づき，$(K, \theta, \Sigma, \lambda, \Lambda, b)$ の推定値を計算する．

推定結果は表 1 の通りである．

表 1　証券市場モデルの係数体系の推定結果

係数	K	θ	Σ	λ	Λ	b
推定値	0.140753	-0.00988256	0.00736040	0.506620	-2.00042	23.8609

リスクの市場価格が，

$$\Lambda_t = 0.506620 - 2.00042\, r_t, \tag{4.8}$$

と実質短期金利の減少関数であるとの結果が示されている．本モデルでは，株式指数の Sharpe 測度はリスクの市場価格なので，これは，株式指数の Sharpe 測度が金利水準が高くなるにつれて小さくなることを示していることに留意されたい．

4.2　最適投資比率の比較静学

まず，アフィン 1 ファクター証券市場モデルの下，消費者の主観的割引率を $\beta = 0.002$，投資期間を $T = 40$ に設定し，リスク資産である株式指数の最適投資比率の比較静学を行う．以下では，実質短期金利を「実質金利」と略称する．

上記証券市場モデルの下，リスク資産の最適投資比率 Φ_t^* は次式で表されている．

$$\Phi_t^* = \frac{1}{\gamma}\frac{\lambda + \Lambda r_t}{b\Sigma} + \frac{a_t^*(r_t) + A_t^*(r_t)r_t}{b} = \frac{1}{\gamma}\,\frac{0.506620 - 2.00042\, r_t}{23.8609 \times 0.00736040} + \frac{a_t^*(r_t) + A_t^*(r_t)r_t}{23.8609}. \tag{4.9}$$

上式において，第 1 項の近視眼的需要項は，相対的リスク許容度の線形増加関数，実質金利の線形減少関数であり，投資残存期間から独立の単純な関数であるのに対し，第 2 項の保険需要項は，相対的リスク許容度，実質金利，投資残存期間のいずれの変数に対しても複雑な関数であることに留意されたい．

4.2.1　相対的リスク許容度と最適投資比率

相対的リスク許容度と最適投資比率の関係を $t = 0$，$\alpha = 0.5$，$r_0 = -0.005$ に設定して得た結果は図 1 の通りである．

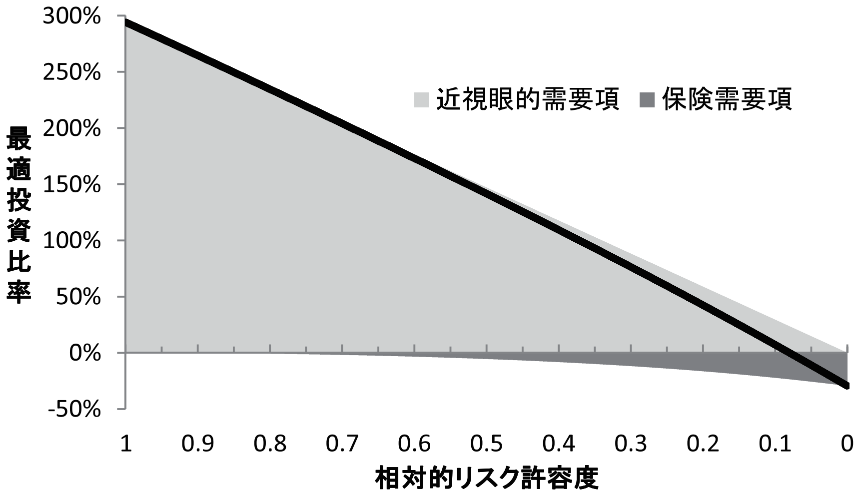

図 1　$(t, \alpha, r_0) = (0, 0.5, -0.005)$ の場合の相対的リスク許容度と最適投資比率

リスク許容度の低下につれて，近視眼的需要項は線形に減少し，保険需要項は負で緩やかに拡大しているため，リスク資産の最適投資比率は減少している．また，最適投資比率は，相対的リスク許容度が 0.4 を上回る水準では 100% 超（富に借金を加えての株式指数投資）となっている一方，相対的リスク許容度が 0.1 を下回る水準では負（株式指数の空売り）となっている．これは，現実に観察される投資行動と整合的な相対的リスク許容度が 0.1〜0.4 の範囲にあることを示唆している．

留意点 5 で既に指摘した通り，保険需要項は相対的リスク許容度が 1 の場合は 0 となるが，1 近傍では，図 2 に示されているように，僅かながら正となっている．

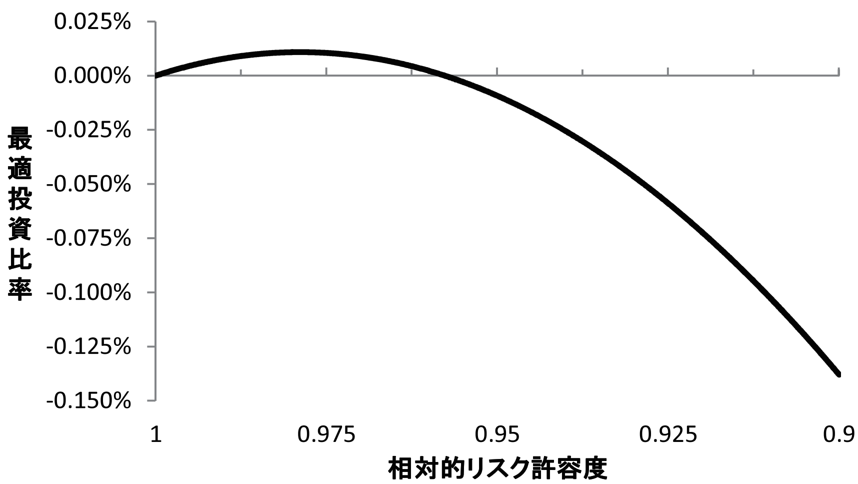

図 2　$(t, \alpha, r_0) = (0, 0.5, -0.005)$ の場合の相対的リスク許容度 1 近傍の最適投資比率の保険需要項

4.2.2 実質金利（状態変数）と最適投資比率

実質金利と最適投資比率の関係を $t=0$，$\alpha=0.5$，$1/\gamma=0.2$ に設定して得た結果は図 3 の通りである．実

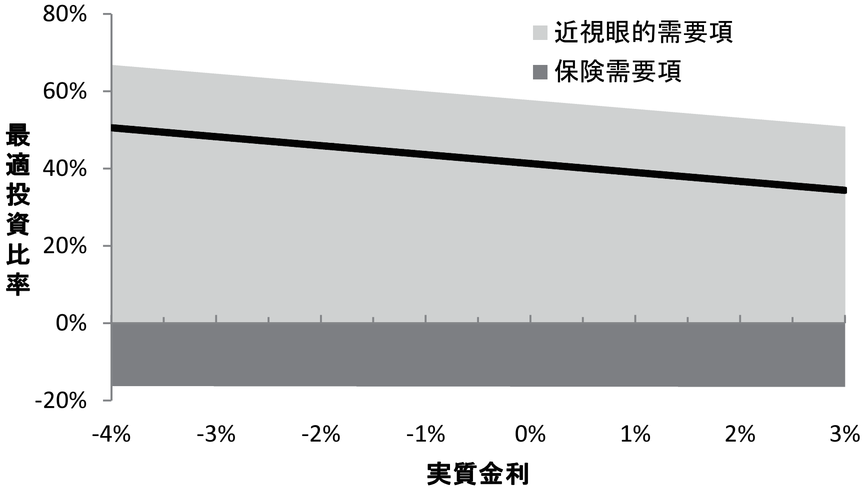

図 3 $(t,\alpha,1/\gamma)=(0,0.5,0.2)$ の場合の実質金利と最適投資比率

質金利によらず，保険需要項は負で概ね一定であるのに対し，実質金利が上昇するにつれて，近視眼的需要項が減少しているため，最適投資比率は減少している．実質金利の上昇に伴う近視眼的需要項の減少は，リスク資産投資に対する報酬であるリスクの市場価格が実質金利の減少関数であることからの当然の帰結である．

図 2 でみた通り，実質金利が -0.5% のとき保険需要項が正となる相対的リスク許容度の領域が 1 近傍にあった．同領域内の代表例として $1/\gamma=0.98$ を取り上げると，実質金利と最適投資比率の関係は図 4 のようになる．

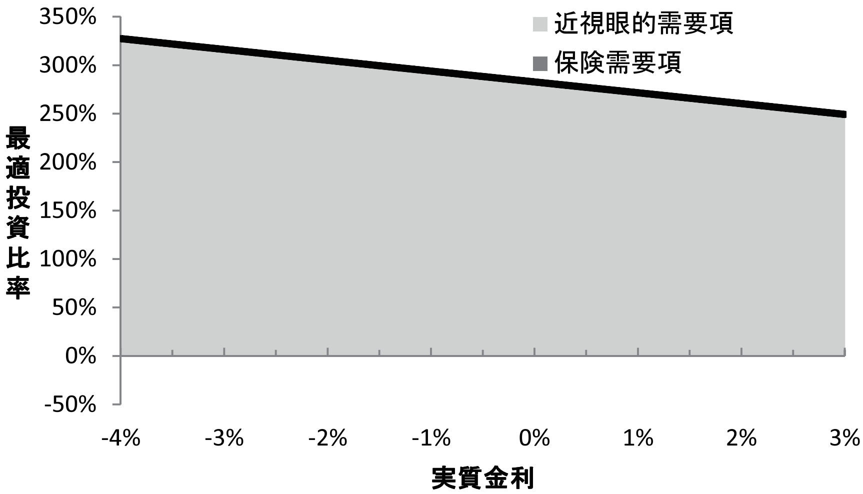

図 4 $(t,\alpha,1/\gamma)=(0,0.5,0.98)$ の場合の実質金利と最適投資比率

保険需要項は概ね 0 となっているが，最適投資比率の縮尺を拡大すると，実質金利 -4.0% では正であるが，実質金利の上昇につれて低下し，0.5% 近辺で負に転じている（次頁図 5 参照）．ここからも，保険需要項の振舞の複雑さが認識できる．

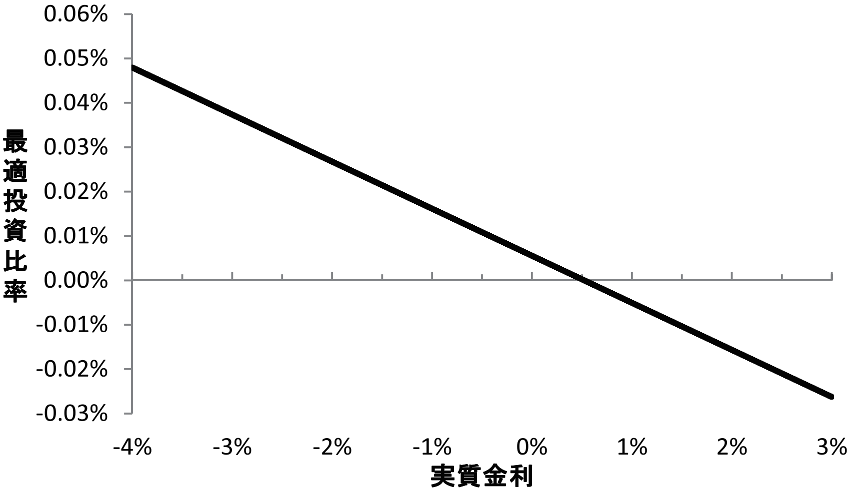

図 5　$(t, \alpha, 1/\gamma) = (0, 0.5, 0.98)$ の場合の実質金利と最適投資比率の保険需要項

4.2.3　投資残存期間と最適投資比率

投資残存期間と最適投資比率の関係を $\alpha = 0.5$，$1/\gamma = 0.2$，$r_0 = -0.005$ に設定して得た結果は図 6 の通りである．

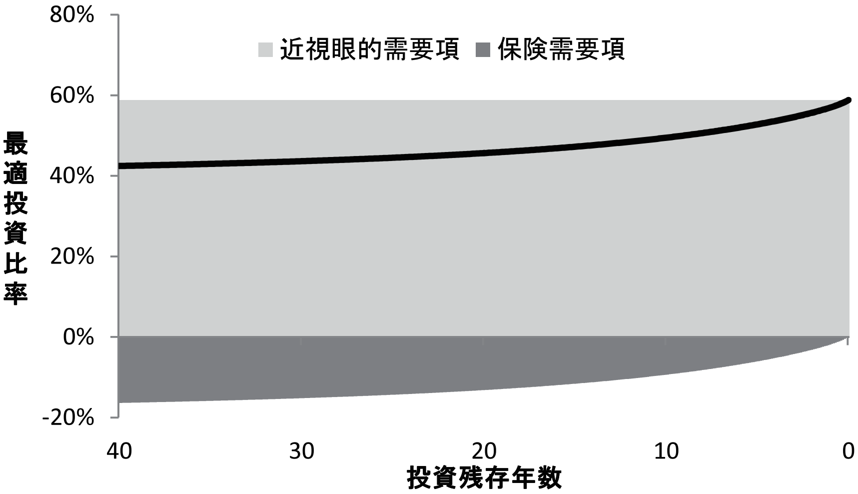

図 6　$(\alpha, 1/\gamma, r_0) = (0.5, 0.2, -0.005)$ の場合の投資残存年数と最適投資比率

近視眼的需要は投資残存年数に依存せず 60% 弱で一定であるのに対し，保険需要は約 -20% 弱で始まり，0 で終わっていることから，最適投資比率は 40% 弱で始まり，緩やかに増大して 60% 弱で終わっている．投資残存年数の縮小は，保険需要項の構成要素である (a_t^*, A_t^*) における積分区間の縮小を通じて，負値である保険需要項の絶対値を減少させていると解釈できる．

保険需要項が正となる相対的リスク許容度の領域の代表例として $1/\gamma = 0.98$ を取り上げると，投資残存年数と最適投資比率の関係は次頁図 7 のようになる．

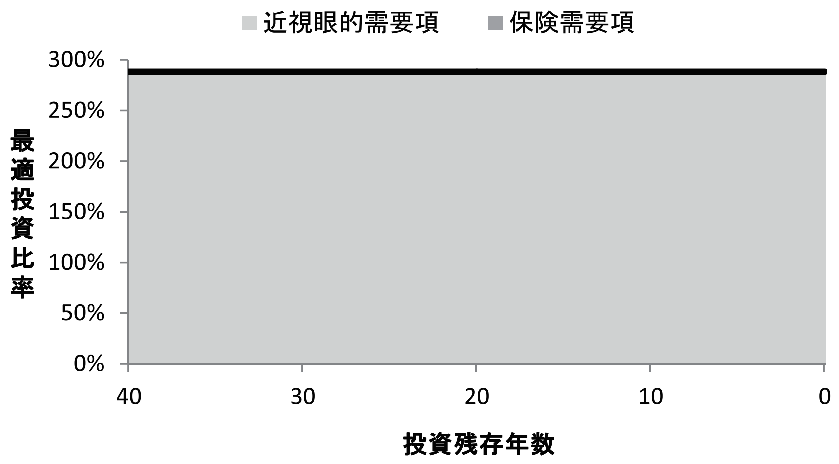

図 7　$(\alpha, 1/\gamma, r_0) = (0.5, 0.98, -0.005)$ の場合の投資残存年数と最適投資比率

保険需要項は概ね 0 となっているが，最適投資比率の縮尺を拡大すると（図 8 参照），僅かながら正で始まり，減少して 0 で終わっている．

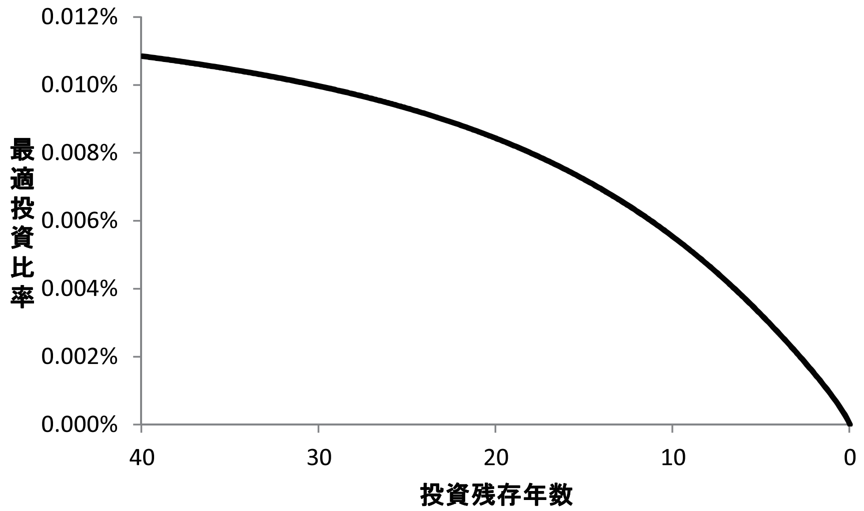

図 8　$(\alpha, 1/\gamma, r_0) = (0.5, 0.98, -0.005)$ の場合の投資残存年数と最適投資比率の保険需要項

4.3　最適消費・富比率の比較静学

次に，アフィン 1 ファクター証券市場モデルの下，消費者の主観的割引率を $\beta = 0.002$，投資期間を $T = 40$ に設定し，最適消費・富比率の比較静学を行う．

4.3.1　相対的リスク許容度と最適消費・富比率

相対的リスク許容度と最適消費・富比率の関係を $t = 0$，$\alpha = 0.5$，$r_0 = -0.005$ に設定して得た結果は次頁図 9 の通りである．

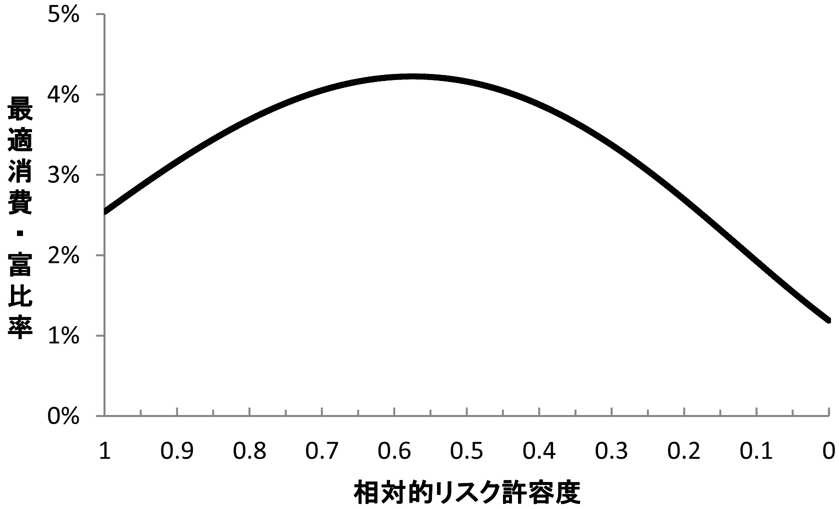

図 9　$(t, \alpha, r_0) = (0, 0.5, -0.005)$ の場合の相対的リスク許容度と最適消費・富比率

相対的リスク許容度が低下するにつれて，最適消費・富比率は，一旦上昇した後，減少に転じている．CRRA 効用では，異なる状態間の変動に対する許容度である相対的リスク許容度と異なる時点間の変動に対する異時点間代替弾力性が一致している．これらを分離して CRRA 効用を一般化した Epstein-Zin 効用を仮定した実証分析（Campbell and Viceira [6]）では，最適消費・富比率は，異時点間代替弾力性の低下に伴い上昇し，相対的リスク許容度の低下に伴い低下することが示されている．ここでの最適消費・富比率の振舞は，上昇区間では異時点間代替弾力性低下の効果が相対的リスク許容度低下の効果を上回っており，低下区間では相対的リスク許容度低下の効果が異時点間代替弾力性低下の効果を上回っていると解釈できる．

4.3.2　実質金利（状態変数）と最適消費・富比率

相対的リスク許容度と最適消費・富比率の関係を $t = 0$，$\alpha = 0.5$，$1/\gamma = 0.2$ に設定して得た結果は図 10 の通りである．

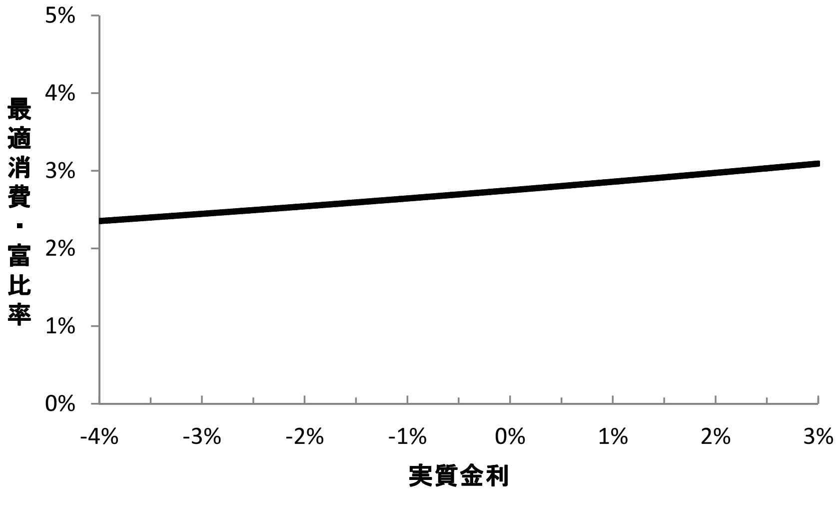

図 10　$(t, \alpha, 1/\gamma) = (0, 0.5, 0.2)$ の場合の実質金利と最適消費・富比率

最適消費・富比率は実質金利の上昇に概ね比例する形で緩やかに増大している．最適消費・富比率の実質金利に関する偏導関数は，(3.32) 式より，

$$\frac{\partial}{\partial r_t} \frac{c_t^*}{W_t^*} = -\alpha^{\frac{1}{\gamma}} \frac{a_t^*(r_t) + A_t^*(r_t) r_t}{G(r_t)}. \tag{4.10}$$

で表される．保険需要項は $(a_t^*(r_t) + A_t^*(r_t) r_t)/b$ であり，$G(r_t)$ は正であることに注意すると，リスク資産の最適投資比率の保険需要項が負（正）であるとき，かつ，そのときに限り，最適消費・富比率は実質金利の増

加関数（減少関数）である．$1/\gamma = 0.2$ では，保険需要項は負なので，最適消費・富比率は実質金利の増加関数となっている．保険需要項が負（正）であるとき，かつ，そのときに限り，最適消費・富比率が実質金利の増加関数（減少関数）となる原理としては次の経済学的解釈が可能である．

保険需要項は，(3.5) 式右辺第 2 項より，

$$\frac{1}{b}\left(a_t^*(r_t) + A_t^*(r_t)r_t\right) = -\frac{J_{Wr}}{bW_t^* J_{WW}} = \frac{1}{\gamma}\frac{J_{Wr}}{bJ_W}, \tag{4.11}$$

と書き換えられるので，保険需要項の符号は J_{Wr} と一致している．$1/\gamma = 0.2$ では，保険需要項は負なので，富の限界間接効用 J_W は実質金利 r の減少関数となっている．すなわち，実質金利が高まるにつれて，低水準で，富の限界間接効用は低くなる．従って，消費者は実質金利が高まるにつれて投資を通じた富の増大よりも消費の増大を求める結果，消費・富比率が高水準になると解釈できる．

他方，相対的リスク許容度 1 近傍の代表として取り上げてきた $1/\gamma = 0.98$ では，最適投資比率の保険需要項は実質金利が 0.5% 近辺までは正の値を示し，0.5% 超で負の値に転じていた．従って，$1/\gamma = 0.98$ の場合，最適消費・富比率は，実質金利が 0.5% 近辺までは緩やかに減少し，そこから緩やかに増大に転じることが予想される．実際，図 11 では，$1/\gamma = 0.98$ の場合の実質金利と消費・富比率はこの予想が示す通りの結果となっている．

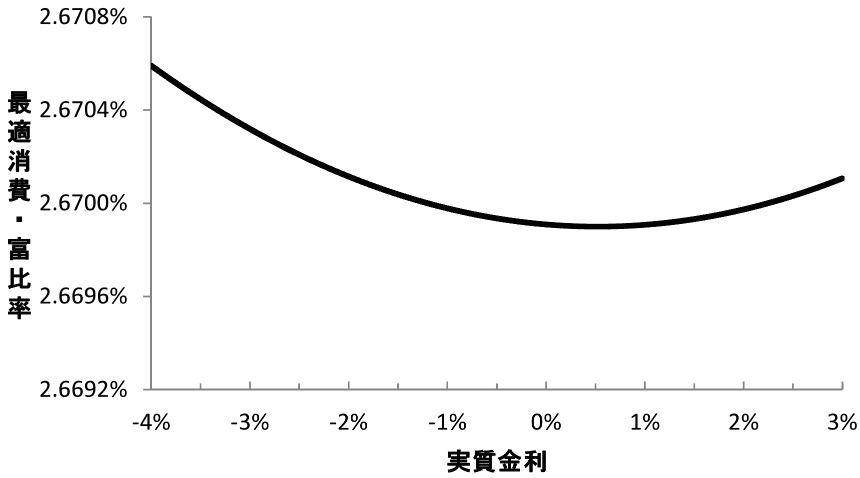

図 11　$(t, \alpha, 1/\gamma) = (0, 0.5, 0.98)$ の場合の実質金利と最適消費・富比率

4.3.3　投資残存期間と最適消費・富比率

投資残存期間と最適消費・富比率の関係を $\alpha = 0.5$，$1/\gamma = 0.2$，$r_0 = -0.005$ に設定して得た結果は次頁図 12 の通りである．

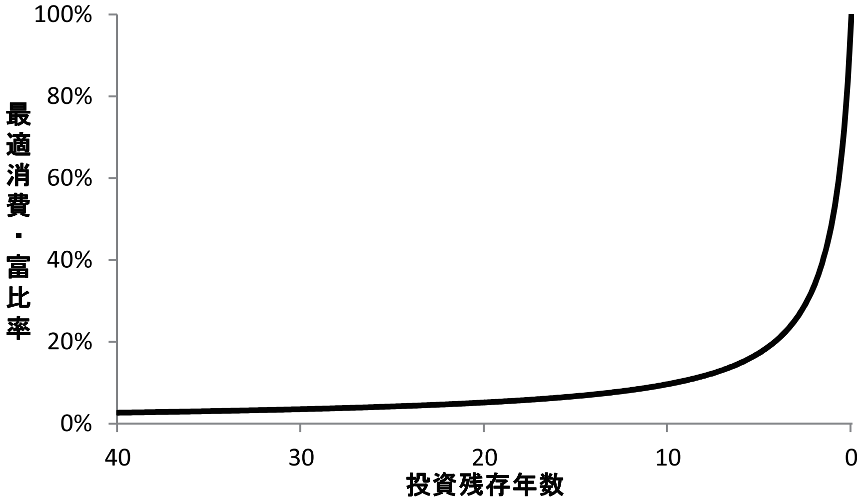

図 12　$(\alpha, 1/\gamma, r_0) = (0.5, 0.2, -0.005)$ の場合の投資残存期間と最適消費・富比率

最適消費・富比率は，初期の約 2.5% から最終期の 100% まで加速しながら増大している．

5　今後の課題

本稿では，CRRA 効用消費者の長期証券投資の最適化問題に対し，準解析解を導出した．バトボルド他 [2] で示された対数線形近似法に基づく最適投資の保険需要項は，本稿では (3.25) 式右辺第 2 項において状態変数の関数として与えている $a_t^*(X_t)$ と $A_t^*(X_t)$ を定数とみなしていることが分かる．本稿で導出された準解析解は，無限時間の場合や相似拡大的頑健効用の場合のような近似手法に依らざるを得ない最適消費・投資問題の近似解の精度を検証するための基準として利用できるであろう．

また，本稿では，最も単純なアフィン 1 ファクター証券市場モデルを仮定し，同モデルのパラメータ推定を行って，最適投資比率と最適消費・富比率の比較静学分析を行った．その結果，最適投資比率の保険需要項が相対的リスク許容度の水準や短期金利の水準に応じて異なる符号をとるなど，複雑な振舞を示すことが明らかになった．現実の証券市場を捉える 3 ファクター以上の高次元アフィン潜在ファクター証券市場モデルの下での比較静学は今後の課題としたい．

参考文献

[1] 有本卓 (1993),『システムと制御の数理』，岩波書店．

[2] バトボルドボロルソフタ，菊池健太郎，楠田浩二 (2018a),「消費と長期証券投資の最適化問題に対する近似解析解」，Discussion paper J-60，滋賀大学経済学部附属リスク研究センター．

[3] バトボルドボロルソフタ，菊池健太郎，楠田浩二 (2018b),「相似拡大的頑健効用投資家の消費と長期証券投資の最適化問題に対する近似解析解」，Discussion paper J-61，滋賀大学経済学部附属リスク研究センター．日本オペレーションズ・リサーチ学会和文論文誌近刊

[4] バトボルドボロルソフタ，菊池健太郎，楠田浩二 (2019),「Epstein-Zin 効用に基づく消費と長期証券投資の最適化問題に対する近似解析解」，日本オペレーションズ・リサーチ学会和文論文誌，Vol.62，23-53.

[5] Campbell, J.(1993), "Intertemporal asset pricing without consumption data," *The American Economic Review*, Vol.83, No.3, 487-512.

[6] Campbell, J. and Viceira, L.(1999), "Consumption and portfolio decisions when expected returns are time varying," *Quarterly Journal of Economics*, Vol.114, No.2, 433-495.

[7] Campbell, J. and Viceira, L.(2002), *Strategic Asset Allocation*, Oxford University Press, Oxford, New York.

[8] Duffie, D. and Kan, R.(1996), "A yield-factor model of interest rates," *Mathematical Finance*, Vol.6, No.4, 379-406.

[9] Liu, J.(2007), "Portfolio selection in stochastic environments," *The Review of Financial Studies*, Vol.20, No.1, 1-39.

[10] Maenhout, P.(2004), "Robust portfolio rules and asset pricing," *The Review of Financial Studies*, Vol.17, No.4, 951-983.

[11] Mamaysky, H.(2002), "A model for pricing stocks and bonds," Working paper 02-10, International Center for Finance, Yale School of Management.

[12] Wachter, J.(2002), "Portfolio and consumption decisions under mean-reverting returns: an exact solution for complete markets," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol.37, No.1, 63-91.

付録 A　証明

A.1　補題 1 の証明

標準ブラウン運動 B_t とリスクの市場価格 Λ_t により，

$$\tilde{B}_t = B_t + \int_0^t \Lambda_s \, ds, \qquad \text{(付録 A.1)}$$

で定義される確率過程 $\tilde{B}_t$ は，Girsanov の定理より，リスク中立確率測度下の標準ブラウン運動である．よって，リスク中立確率測度の下で，潜在ファクターの確率微分方程式は，

$$\begin{aligned} dX_t &= (K(\theta - X_t) - \Sigma\Lambda_t)\, dt + \Sigma\, d\tilde{B}_t \\ &= \{K\theta - \Sigma\lambda - (K + \Sigma\Lambda)X_t\}\, dt + \Sigma\, d\tilde{B}_t, \end{aligned}$$

と表現される．

今，割引物価連動債 P_t^T を r_t の上に書かれた派生資産とみなすと，r_t は X_t のアフィン関数なので，滑らかな関数 $f(X_t, t)$ により，

$$P_t^T = f(X_t, t), \qquad \text{(付録 A.2)}$$

と表される．このとき，無裁定条件から，f は次の偏微分方程式の解となっていることが示される．

$$f_t + \{K\theta - \Sigma\lambda - (K + \Sigma\Lambda)X_t\}' f_X + \frac{1}{2}\mathrm{tr}[\Sigma\Sigma' f_{XX}] - (r_0 + r' X_t) f = 0, \qquad f(X_T, T) = 1. \quad \text{(付録 A.3)}$$

一方，本モデルはアフィン・モデルなので，$\tau = T - t$ とおくと，上記偏微分方程式の解 f は滑らかな関数 $b_0(\tau), b(\tau)$ によって

$$f(X_t, t) = e^{b_0(\tau) + b(\tau)' X_t}, \qquad (b_0(0), b(0)) = (0, 0), \qquad \text{(付録 A.4)}$$

と書けることが示される．まず，上式を対数微分して P_t^T の確率微分方程式を導出すると，(2.6) 式を得る．次に，(付録 A.4) 式に偏微分を施し，(付録 A.3) 式に代入すると，次式を得る．

$$-\frac{db_0(\tau)}{d\tau} - \frac{db(\tau)'}{d\tau} X_t + b(\tau)'\{K\theta - \Sigma\lambda - (K + \Sigma\Lambda)X_t\} + \frac{1}{2} b(\tau)'\Sigma\Sigma' b(\tau) - (r_0 + r' X_t) = 0. \quad \text{(付録 A.5)}$$

(付録 A.5) 式は X_t の恒等式であるから，X_t の係数を整理すると，次式を得る．

$$\frac{db(\tau)}{d\tau} = -(K + \Sigma\Lambda)' b(\tau) - r, \qquad b(0) = 0. \qquad \text{(付録 A.6)}$$

上式を定数変化法で解いて，(2.7) 式を得る．

非債券の第 j 指数を $\tilde{S}_t^j$ と表記する．このとき，Mamaysky [11] より，$\tilde{S}_t^j$ は次式で表され，

$$\tilde{S}_t^j = \exp(b_{0j}t + b_j' X_t). \tag{付録 A.7}$$

配当率過程は次式となる．

$$\frac{D_t^j}{\tilde{S}_t^j} = (d_{0j} + d_j' X_t). \tag{付録 A.8}$$

(付録 A.7)(付録 A.8) 両式より，配当込み指数に関する無裁定条件から，次式を得る．

$$b_{0j} + b_j'\{K\theta - \Sigma\lambda - (K + \Sigma\Lambda)X_t\} + \frac{1}{2}b_j'\Sigma\Sigma' b_j + (d_{0j} + d_j' X_t) - (r_0 + r' X_t) = 0. \tag{付録 A.9}$$

(付録 A.9) 式は X_t の恒等式であるから，X_t の係数を整理すると，(2.9) 式を得る．

A.2　補題 2 の証明

本稿では，消費財を価値基準財とする実質証券価格を対象としてきたが，ここではまず，名目価格を対象とする．すなわち，満期までの期間 τ の物価連動債の名目価格を $\tilde{P}_t(\tau)$，主要指数の配当込みでない名目価格を $\tilde{S}_t^{*j}$ と表記する．また，ある拡散過程に従う一般物価過程を p_t と表記する．

短期債，物価連動債，主要指数から組成されるポートフォリオを $(\vartheta, (\vartheta(\tau)), (\vartheta^{*j}))$ とすると，富の名目価値 $\tilde{W}_t$ は次式で表現される．

$$\tilde{W}_t = \vartheta_t \tilde{P}_t + \int_0^{\bar{\tau}} \vartheta_t(\tau)\tilde{P}_t(\tau)d\tau + \sum_{j=1}^{J} \vartheta_t^{*j}\tilde{S}_t^{*j}. \tag{付録 A.10}$$

このとき，配当込み主要指数のポートフォリオは，

$$\vartheta_t^j = \frac{\tilde{S}_t^{*j}}{\tilde{S}_t^j}\vartheta_t^{*j}, \tag{付録 A.11}$$

で定義され，配当込み主要指数の名目収益率と主要指数の名目収益率の間に，

$$\frac{d\tilde{S}_t^j}{\tilde{S}_t^j} = \frac{d\tilde{S}_t^{*j}}{\tilde{S}_t^{*j}} + \tilde{D}_t^j dt, \tag{付録 A.12}$$

が成り立っていることに注意すると，所与の c_t の下，自己資金充足的ポートフォリオ $(\vartheta, (\vartheta(\tau)), (\vartheta^{*j}))$ は，次式を満たしている．

$$\begin{aligned}
\frac{d\tilde{W}_t}{\tilde{W}_t} &= \frac{1}{\tilde{W}_t}\left\{\vartheta_t d\tilde{P}_t + \int_0^{\bar{\tau}} \vartheta_t(\tau)d\tilde{P}_t(\tau)d\tau + \sum_{j=1}^{J}\vartheta_t^{*j}\left(d\tilde{S}_t^{*j} + \tilde{D}_t^j\tilde{S}_t^{*j}dt\right) - p_t c_t dt\right\} \\
&= \frac{\vartheta_t\tilde{P}_t}{\tilde{W}_t}\frac{d\tilde{P}_t}{\tilde{P}_t} + \int_0^{\bar{\tau}}\frac{\vartheta_t(\tau)\tilde{P}_t(\tau)}{\tilde{W}_t}\frac{d\tilde{P}_t(\tau)}{\tilde{P}_t(\tau)}d\tau + \sum_{j=1}^{J}\frac{\vartheta_t^j\tilde{S}_t^j}{\tilde{W}_t}\left(\frac{d\tilde{S}_t^{*j}}{\tilde{S}_t^{*j}} + \tilde{D}_t^j dt\right) - \frac{c_t}{W_t}dt \\
&= \left(1 - \int_0^{\bar{\tau}}\varphi_t(\tau)d\tau - \sum_{j=1}^{J}\Phi_t^j\right)\frac{d\tilde{P}_t}{\tilde{P}_t} + \int_0^{\bar{\tau}}\varphi_t(\tau)\frac{d\tilde{P}_t(\tau)}{\tilde{P}_t(\tau)}d\tau + \sum_{j=1}^{J}\Phi_t^j\frac{d\tilde{S}_t^j}{\tilde{S}_t^j} - \frac{c_t}{W_t}dt.
\end{aligned}$$

このとき，各証券の名目収益率の項に，

$$\frac{d\tilde{S}_t^j}{\tilde{S}_t^j} = \frac{dS_t^j}{S_t^j} + \frac{dp_t}{p_t} + \left(\frac{dS_t^j}{S_t^j}\right)\left(\frac{dp_t}{p_t}\right),$$

等を代入し整理すると，次式が導かれる．

$$\begin{aligned}\frac{dW_t}{W_t} &= \frac{d\tilde{W}_t}{\tilde{W}_t} - \frac{dp_t}{p_t} - \left(\frac{dW_t}{W_t}\right)\left(\frac{dp_t}{p_t}\right)\\ &= \left(1 - \int_0^{\bar{\tau}} \varphi_t(\tau)d\tau - \sum_{j=1}^{J} \Phi_t^j\right)\frac{dP_t}{P_t} + \int_0^{\bar{\tau}} \varphi_t(\tau)\frac{dP_t(\tau)}{P_t(\tau)}d\tau + \sum_{j=1}^{J} \Phi_t^j \frac{dS_t^j}{S_t^j} - \frac{c_t}{W_t}dt.\end{aligned}$$

上式に，(2.5)(2.6)(2.8) 式を代入し，整理すると，(2.11) 式を得る．

A.3　命題 1 の証明

まず，最適消費は，

$$c_t^* = \alpha^{\frac{1}{\gamma}} e^{-\frac{\beta}{\gamma}t} J_W^{-\frac{1}{\gamma}} = \alpha^{\frac{1}{\gamma}} e^{-\frac{\beta}{\gamma}t} \left\{e^{-\beta t}(W_t^*)^{-\gamma} G^{\gamma}\right\}^{-\frac{1}{\gamma}} = \alpha^{\frac{1}{\gamma}} \frac{W_t^*}{G}.$$

従って，上式と最適投資を予算制約式 (2.11) に代入し，伊藤の補題を適用して解くと，最適富 (3.11) 式を得る．

次に，J に偏微分を施すと，次の式群を得る．

$$J_t = -\beta J + \gamma J \frac{G_t}{G}, \qquad W J_W = (1-\gamma)J, \qquad J_X = \gamma\, J \frac{G_X}{G},$$

$$W^2 J_{WW} = -\gamma(1-\gamma)J, \qquad W J_{XW} = \gamma(1-\gamma)J\frac{G_X}{G}, \qquad J_{XX} = \gamma\, J\left\{(\gamma-1)\frac{G_X}{G}\frac{G_X'}{G} + \frac{G_{XX}}{G}\right\}.$$

間接効用関数 J の偏微分結果より，最適投資 (3.3) 式右辺の分子・分母は次のように表される．

$$\pi_t = (\gamma-1)J\left(\Lambda_t + \gamma\Sigma'\frac{G_X}{G}\right), \qquad \text{(付録 A.13)}$$

$$W_t^2 J_{WW} = \gamma(\gamma-1)J. \qquad \text{(付録 A.14)}$$

ゆえに，最適投資 (3.3) 式に (付録 A.13)(付録 A.14) 式を代入すると，(3.12) 式を得る．

間接効用関数 J の偏微分方程式 (3.7) における第 2・第 3 項は，(付録 A.13)(付録 A.14) 式を代入し整理すると，次式が得られる．

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left[\Sigma\Sigma' J_{XX}\right] - \frac{\pi_t'\pi_t}{2W_t^2 J_{WW}}\\ &\quad = \frac{\gamma}{2}J\operatorname{tr}\left[\Sigma\Sigma'\left\{(\gamma-1)\frac{G_X}{G}\frac{G_X'}{G} + \frac{G_{XX}}{G}\right\}\right] - \frac{\gamma-1}{2\gamma}J\left(\Lambda_t + \gamma\Sigma'\frac{G_X}{G}\right)'\left(\Lambda_t + \gamma\Sigma'\frac{G_X}{G}\right)\\ &\quad = J\left\{\frac{\gamma}{2}\operatorname{tr}\left[\Sigma\Sigma'\frac{G_{XX}}{G}\right] - \frac{\gamma-1}{2\gamma}\Lambda_t'\Lambda_t - (\gamma-1)\Lambda_t'\Sigma'\frac{G_X}{G}\right\}. \qquad \text{(付録 A.15)}\end{aligned}$$

偏微分方程式 (3.7) における第 6 項は，(3.2) 式を代入し整理すると，

$$\frac{\gamma}{1-\gamma}c_t^* J_W = \frac{\gamma}{1-\gamma}\alpha^{\frac{1}{\gamma}}\frac{W_t^*}{G}(1-\gamma)\frac{J}{G} = \gamma\alpha^{\frac{1}{\gamma}}\frac{J}{G}, \qquad \text{(付録 A.16)}$$

を得る．

(付録 A.15)(付録 A.16) 式等を偏微分方程式 (3.7) に代入し，両辺を γJ で除して整理すると，(3.13) 式が得られる．

A.4　命題 2 の証明

$a_0(\tau)$，$a(\tau)$ がそれぞれ (3.26) 式，(3.27) 式で表されることは容易に確認できるので，$A(\tau)$ が (3.27) 式で表されることを証明する．

まず，$A(\tau)$ の転置行列を微分すると，$A(\tau)$ の対称性から次の常微分方程式を得る．

$$\frac{d}{d\tau}A(\tau) = A(\tau)\Sigma\Sigma' A(\tau) - 2A(\tau)\left(K + \frac{\gamma-1}{\gamma}\Sigma\Lambda\right) - \frac{\gamma-1}{\gamma^2}\Lambda'\Lambda, \qquad A(0) = 0. \quad \text{(付録 A.17)}$$

(3.21) 式と (付録 A.17) 式の両辺を辺々加え，2 で除すると，常微分方程式 (3.21) は次の Riccati 型微分方程式に帰着される．

$$\frac{d}{d\tau}A(\tau) = A(\tau)\Sigma\Sigma' A(\tau) - \left(K + \frac{\gamma-1}{\gamma}\Sigma\Lambda\right)' A(\tau) - A(\tau)\left(K + \frac{\gamma-1}{\gamma}\Sigma\Lambda\right) - \frac{\gamma-1}{\gamma^2}\Lambda'\Lambda, \qquad A(0) = 0. \quad \text{(付録 A.18)}$$

ここからは，有本 [1] 定理 5.2 に沿って証明する．$N \times N$ の行列 $C_1(\tau)$，$C_2(\tau)$ に関する線形微分方程式の初期値問題を考察する．

$$\frac{d}{d\tau}\begin{pmatrix} C_1(\tau) \\ C_2(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K + \frac{\gamma-1}{\gamma}\Sigma\Lambda & -\Sigma\Sigma' \\ -\frac{\gamma-1}{\gamma^2}\Lambda'\Lambda & -\left(K + \frac{\gamma-1}{\gamma}\Sigma\Lambda\right)' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1(\tau) \\ C_2(\tau) \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} C_1(0) \\ C_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_N \\ 0_N \end{pmatrix}. \quad \text{(付録 A.19)}$$

線形微分方程式 (付録 A.19) の解は (3.29) 式で表される．$C_1(\tau)$ は正則であることが証明できる*4ので，$A(\tau)$ を (3.28) 式で定義する．次の記法を用いる．

$$\tilde{K} = K + \frac{\gamma-1}{\gamma}\Sigma\Lambda \quad \text{(付録 A.20)}$$

このとき，

$$\frac{d}{d\tau}C_1^{-1}(\tau) = -C_1^{-1}(\tau)\left\{\frac{d}{d\tau}C_1(\tau)\right\}C_1^{-1}(\tau) \quad \text{(付録 A.21)}$$

となることに注意すると，

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\tau}A(\tau) &= \left\{\frac{d}{d\tau}C_2(\tau)\right\}C_1^{-1}(\tau) + C_2(\tau)\frac{d}{d\tau}C_1^{-1}(\tau) \\
&= \left(-\frac{\gamma-1}{\gamma^2}\Lambda'\Lambda C_1(\tau) - \tilde{K}'C_2(\tau)\right)C_1^{-1}(\tau) - A(\tau)\left(\tilde{K}C_1(\tau) - \Sigma\Sigma' C_2(\tau)\right)C_1^{-1}(\tau) \\
&= A(\tau)\Sigma\Sigma' A(\tau) - \tilde{K}'A(\tau) - A(\tau)\tilde{K} - \frac{\gamma-1}{\gamma^2}\Lambda'\Lambda,
\end{aligned}$$

となり，$A(\tau)$ が Riccati 型微分方程式 (付録 A.18) を満たしていることを確認できる．$A(\tau)$ の一意性は，有本 [1] 定理 5.2 の証明を参照せよ．最後に，$A(\tau)$ の対称性は，Riccati 型微分方程式および初期値 (付録 A.18) の転置をとったとき，$A(\tau)'$ に関して同一の式が得られるので，解の一意性から $A(\tau)' = A(\tau)$ でなければならないことによる．

*4 有本 [1] 定理 5.2 の証明を参照せよ．

A Semi-analytical Solution to Finite-time Optimization Problem of Long-term Security Investment for Consumer with CRRA Utility

Bolorsuvd Batbold Kentaro Kikuchi Koji Kusuda
Graduate School of Shiga University Shiga University

Abstract

Liu considers a finite-time horizon optimal consumption and investment problem for a consumer with CRRA utility, assuming that the short-term interest rate and market price of risk are quadratic functions of a latent multi-dimensional factor which is subject to a diffusion process in which the drift term and the diffusion term are quadratic functions of the factor. He shows a functional form of the solution to a non-homogeneous partial differential equation derived from an optimal condition, and derives a system of ordinary differential equations on the unknown set of parameters of the function, but not the analytical solution. We examine the same problem under a different security market model in which the short-term interest rate and market price of risk are affine functions of a latent multi-dimensional factor which is subject to a multi-dimensional version of Ornstein-Uhlenbeck process. We derive a 'semi-analytical solution' which is the time integral representation of an analytical function, and conduct a comparative statics based on the solution under an affine one factor security market model.

概　要

Liu [9]は，潜在ファクターが自身の 2 次関数であるドリフト項および拡散項を持つ拡散過程に従い，短期金利，リスクの市場価格の平方等が潜在ファクターの 2 次関数で記述される証券市場モデルを仮定し，消費と投資の問題を考察している．彼は同問題の最適化の結果導出される非斉次偏微分方程式に対し，解析解の関数形を示し，同関数の未知係数群の連立常微分方程式を導出しているものの，同方程式の解析解は導出していない．
本稿では，潜在ファクターが多次元版Ornstein-Uhlenbeck過程，短期金利，リスクの市場価格等が潜在ファクターのアフィン関数にそれぞれ従う証券市場モデルを仮定し，消費と投資の問題に対し，解表現に解析関数の時間積分を含む「準解析解」を導出するほか，アフィン1ファクター証券市場モデルの下で，同解に基づく比較静学を行う．