

編集委員会依頼論文

銀行経営のための数理的枠組み

池森俊文*

2019年3月30日投稿

概要

1980年代に始まった金融自由化によって銀行に要請されている「自主的な経営管理」を実現するための数理的枠組みを提示する。経営管理では経営破綻の回避が重要なテーマとなるが、一般的に経営破綻は、財務上は「収益性の破綻」または「流動性の破綻」として顕現化する。本論文ではそのうちの「収益性の破綻を回避するための数理的枠組み」を提示する。具体的には、銀行全体の複雑な損益プロセスを、「内部資金システム」によって比較的簡単な複数の業務部門別損益プロセスに分解し、「リスク資本の配賦」によって業務部門別に一定の収益性を確保する「収益性制御」と、損失発生を一定の範囲内に抑制する「リスク制御」を課すという方法である。

キーワード：金融自由化，自主的な経営管理，収益性管理，リスク管理，内部資金システム，リスク資本配賦，収益性制御，リスク制御

1. はじめに

邦銀の経営管理として従来から長く実施されていたのが、決算予想や部店別損益計算、主要取引先別利鞘計算などの管理会計であった。しかしその状況が変化したのが、米国発で1980年代に日本にも波及してきた「金融技術革新」¹であった。邦銀の経営管理手法はこれまでに次のような変遷を経て進化してきた。

1. 1 銀行の経営管理手法の進化

1. 1. 1 ALM (Asset Liability Management)

ALMは、第2次石油ショック時(1978年)に米国の金融引き締めによって発生した金利上昇と、それによって発生したS&L (Savings and Loans) 危機に際して、米銀で導入された経営管理手法である。ALMでは、金利変動に対して共に変動する資産からの受取利息と負債への支払利息を併せて管理する金利リスク管理と、資産と負債の資金フローを併せて管理する資金流動性管理から構成される。ALMの邦銀への導入は、赤字国債の大量発行によって金利が乱高下した1980年代半ばの頃であった。

* 統計数理研究所統計思考院 〒190-5862 東京都立川市緑町10-3 email: tikemori@ism.ac.jp
ロボット投信株式会社 〒103-0025 東京都中央区日本橋茅場町1-8-1 茅場町一丁目平和ビル

¹ 金融技術革新とは、1970年代以降の不確実性の時代に対処するために米国で発生し、世界に普及・拡大した確率解析をベースとする金融技術。

そのうちの金利リスク管理では、銀行の期間利鞘額（NII (net interest income)）の変動を分析するGAP分析や、銀行の純資産額の現在価値の変動を分析するデュレーション分析などが導入された。導入当初のALM手法は、1期間の、円貨資産・負債に対する、1金利変動因子の、約定どおりにcash flowが発生すると仮定した手法であったが、やがて多期間ALM、多通貨ALM、多因子ALM、コア預金・期限前返済等を考慮したALMなどが導入された。

この米国のS&L危機を契機に、世界的に「金融自由化」が実施されることになった。

1. 1. 2 自己資本比率規制（バーゼル規制）

規制・保護から金融自由化への銀行監督方針の変更によって、各銀行は自らの責任の下で経営管理を行うことを要請されることになったが、一方ではグローバルな活動を行うようになった世界の主要銀行に対して、世界の金融システムの保全を目的としてバーゼル合意が成立し（1988年）、それを受けて各国の法制の下で自己資本比率規制（所謂バーゼルI）が実施されることになった。日本での実施は1993年からであった。バーゼルIは、銀行の保有する資産 $\sum_i X_i$ と自己資本 E に対する次のような規制で、その内容は信用リスク規制であった。

$$\frac{E}{\sum_i W_{C(i)} \cdot X_i} \geq 0.08 \quad (1)$$

但し、 $W_{C(i)}$ ：資産 i のカテゴリー $C(i)$ に対応するリスクウエイト

1. 1. 3 自主的な信用リスク管理

1990年の日本の不動産バブルの崩壊によって資産内容が悪化した邦銀の中には、簡単なバーゼルIによる管理とは別に、独自の方法によって信用リスク管理を整備するところが出てきた。²

貸出ポートフォリオ $X = \sum_{i=1}^n X_i$ に対して、会計期間中に発生する貸倒損失額 \tilde{L} を、

$$\tilde{L} = \sum_{i=1}^n X_i \cdot (1 - \theta_i) \cdot \tilde{H}_i \quad (2)$$

但し、 θ_i ：デフォルト時回収率、 $R(i)$ ：貸出先 i の格付

$$\tilde{H}_i = \begin{cases} 1 & \text{(期間中にデフォルト有り)} \quad (\text{確率 } p_{R(i)}) \\ 0 & \text{(期間中にデフォルト無し)} \quad (\text{確率 } 1 - p_{R(i)}) \end{cases}$$

と表して、その期待値を $EL = E[\tilde{L}] = \sum_{i=1}^n X_i \cdot (1 - \theta_i) \cdot p_{R(i)}$ 、期待値を超えて一定の信頼度 $\alpha\%$ の下で発生し得る最大損失額を $UL_\alpha = \Phi_\alpha[\tilde{L}] - E[\tilde{L}]$ として管理した。ここで $\Phi_\alpha[\tilde{L}]$ は貸倒損失額 \tilde{L} の $\alpha\%$ 点を表すとす。

1. 1. 4 バーゼル規制の見直し・自主的な経営管理の高度化（統合リスク管理）

1988年に合意され、先進国の銀行に導入された自己資本比率規制（バーゼルI）は、その枠組みが簡単すぎたために早い段階から見直しに向けての検討が始まった。1996年には、それまで信用リスクのみを対象としていた自己資本比率規制にトレーディング勘定の市場リスクが加わり、その際にVaR (Value at Risk) というリスク指標が採用されて、これが世界中の金融機関に普及することになった。

² [11] 西田真二 (1995) 参照

このようなバーゼル規制の動きに呼応して、邦銀でも 1990 年代後半ごろから、独自に導入していた自主的な経営管理としての信用リスク管理手法や市場リスク管理手法を改良する動き³や、新たにオペレーショナル・リスクを導入する動きが始まった。

この当時のテーマは統合リスク管理であった。銀行経営が内包する金融リスク量（一定の信頼度の下で発生し得る最大損失額）を総合的に把握し、経営破綻を起こさないための条件として、それを損失処理の原資としての自己資本の範囲内に抑えることを目的とした統合リスク管理は、自主的な経営管理の究極の目的であった。

そのような銀行独自の動きを受けて、バーゼル規制の見直しも統合リスク管理を目指すとともに、各行が実施する自主的な経営管理手法をバーゼル規制に使用することを「内部モデル法」として許容した。

また、この時期には、米国発の多種多様なデリバティブスや仕組債、証券化商品⁴などが登場して、銀行はそのような新商品に対して業務対応・管理対応を行うことが必要となった。

1. 1. 5 金融危機後の見直し、新しい経営環境への対応

2008 年金融危機前の銀行の金融商品開発やリスク管理手法高度化の動きは「金融高度化」「リスク管理高度化」などと呼ばれてもてはやされた。しかし 2008 年のリーマンショックと引き続く景気後退を境に状況が一変した。それまでの銀行のリスク管理体制は「不十分である」として一斉に批判が起こった。主な批判の論点は次のようなものであった。金融危機後の銀行のリスク管理は、このような指摘に対処することが必要となっている。⁵

- ・管理が過去の情報に基づくもので、将来を見据えた管理になっていない。（将来性）
- ・管理対象がモデル化しやすいものに限られ、重要なリスクを見落としている。（網羅性）
- ・管理が単なる数字作りで終わり、経営に直結していない。（経営直結性）

また、高度 IT・ネット環境のもとでは新たな金融取引形態が発生し、それによる顧客行動の変化や、それに伴う新たな損失発生の可能性は、銀行の経営管理として取り込むべき大きなテーマとなっている。⁶

1. 2 本論文の目的と構成

1. 2. 1 本論文の目的

本論文の目的は、このようにして導入されてきた銀行の自主的な経営管理の仕組みを、内部資金システムを使って分解した部門別損益プロセスに対して、部門別に配賦された自己資本に基づいて収益性制御とリスク制御を加えるという統一的な枠組みによって体系的に整理することである。

金融技術革新以来、段階的に導入されてきた経営管理手法を、このような形で体系的に整理することによって、経営管理の目的が明確になり、新規業務の取り込みや管理手法の変更などによる経営管理手法の改善が見通し良くできるという効果が期待できる。

1. 2. 2 本論文の構成

本論文の構成は以下のとおりである。第 2 章では、銀行全体の損益プロセスを内部資金システムによって「部門別損益プロセス」に分解する方法を示し、貸出部門、トレーディング部門、手数料部門、ALM部門の 4 つの部門

³ 例えば、[9] 高野 靖・羽柴次郎（2008）は信用リスク計量の高速手法を開発して日米で特許を取得した。

⁴ [5] 大垣尚司（1997）参照

⁵ [12] 宮内淳至（2015）参照

⁶ [1] 五十嵐文雄（2016）参照

について、部門別損益プロセスを定義する。第3章では、それらの部門別損益プロセスに対して、自己資本の部門別配賦に基づいて「収益性制御」と「リスク制御」を加える方法を示す。第4章では、本論文で展開した「部門別損益プロセスの制御による経営管理」についての注意点、2008年金融危機で提起された課題や最近の経営環境への対応に関する新たな課題、銀行の経営管理と保険会社の経営管理との関係について言及してまとめとする。

2. 部門別損益プロセスのモデル化

銀行は間接金融機関として、預金を受け入れ貸出や有価証券運用を行うほか、各種の手数料業務や金融市場との間でのトレーディング業務などを行っている。これらの多様な業務から発生する損益のすべてを、一括して確率過程としてモデル化し管理しようとする、あまりにも複雑すぎて難しくなる。そこで適当な方法によって、銀行全体の損益プロセスを比較的簡単な複数の損益プロセスに分解し、それらを個別に管理することによって結果的に全体の損益プロセスを管理するという考えを考へる。

その際に利用する手段が「内部資金システム」である。銀行は様々な形で資金調達・運用を行っているが、業務の実施に必要となるこれらの資金を「ALM部門」が一括して管理し、各業務部門に資金が必要となった場合にはその都度「内部取引」としてALM部門との間で貸借することにより、その部門が必要とする形で資金を提供（あるいは余資を運用）するという仕組みである。

以下では、貸出部門、トレーディング部門、手数料部門、ALM部門の順に、それぞれの部門に提供される内部資金の内容を示し、そこから得られる部門別損益プロセスを定義する。

2.1 貸出部門

貸出部門が実施する貸出の一つ一つに対して、金額・満期・金利の種類（固定金利か変動金利か）がすべて一致する内部資金をALM部門からの内部取引として貸し付ける。貸出部門の期中のバランスは以下ようになる。

$$\sum_{i=1}^n X_i(t) = \sum_{i=1}^n X_i(t) \quad (3)$$

但し、 $X_i(t)$: 取引先 i に対する時点 t の貸出残高、かつ、
それに対するALM部門からの内部資金残高
 $i = 1, \dots, n$

このバランスから発生する利鞘と、貸出部門の経費および貸倒損失額を合わせると、貸出部門の損益プロセスが下記のように得られる。⁸

$$d\tilde{W}_{Loan}(t) = \sum_{i=1}^n \pi_i \cdot X_i(t) \cdot dt - C_{Loan} \cdot dt - \sum_{i=1}^n X_i(t) \cdot (1 - \theta_i) \cdot d\tilde{H}_i(t) \quad (4)$$

但し、 $\pi_i = p_i(t) - \bar{p}_i(t)$: 貸出利鞘率＝貸出金利－内部資金金利

C_{Loan} : 貸出部門経費（期中に均等に発生すると仮定）

⁷ 業務部門別管理を「損益プロセス」としてまとめるアイデアは、[26] Dickson, D. C. M. (2005), [30] Embrechts, P., Kluppelberg, C. and Mikosch, T. (1997), [35] Harrison, J. M. (1985) などでヒントを得たものである。

⁸ $R(i)$ は取引先 i の格付を表すとする。 $p_{R(i)}$ は格付 $R(i)$ のデフォルト率を表す
貸出部門損益＝利鞘－経費－貸倒損失となる。

$\tilde{H}_i(t)$: 時点 $t \in [0,1]$ の取引先 i のデフォルト状態

$$\tilde{H}_i(t) = \begin{cases} 1 & (\text{時点 } t \text{ でデフォルト状態}) \\ 0 & (\text{時点 } t \text{ でデフォルト無し}) \end{cases}$$

$$\tilde{H}_i(t) = 0 \text{ で, } \begin{cases} \tilde{H}_i(t+dt) = 1 \text{ となる確率 } p_{R(i)}dt \\ \tilde{H}_i(t+dt) = 0 \text{ となる確率 } 1 - p_{R(i)}dt \end{cases}$$

θ_i : デフォルト時回収率

取引先のデフォルト状態を表す確率変数 $\tilde{H}_i(t)$ は、さらに下記のように企業価値モデル (firm value model) を使用してデフォルト発生メカニズムを記述するのが、銀行実務の標準的な方式 (業界標準) となっている。⁹

$$\tilde{H}_i(t) = I\{\tilde{V}_i(t) < K_i\} \quad (5)$$

但し、 $I\{\dots\}$ は論理関数で、 $\begin{cases} \{\dots\} \text{ が真ならば } 1 \text{ をとり,} \\ \{\dots\} \text{ が偽ならば } 0 \text{ をとる関数} \end{cases}$

$\tilde{V}_i(t)$: 時点 t の取引先 i の信用状態指標

K_i : デフォルト状態 (債務超過) となる信用状態指標の閾値

$$d\tilde{V}_i(t) = b_{S(i),1} \cdot d\tilde{f}_1(t) + \dots + b_{S(i),K} \cdot d\tilde{f}_K(t) + \sigma_{S(i)} \cdot d\tilde{\epsilon}_i(t) \quad (6)$$

但し、 $S(i)$: 取引先 i の属する業種や地域などのセクター

$d\tilde{f}_1(t), \dots, d\tilde{f}_K(t)$: すべての取引先に影響する共通リスク因子

$d\tilde{\epsilon}_i(t)$: 取引先 i の個別リスク因子

$b_{S(i),1}, \dots, b_{S(i),K}$: 共通リスク因子への感応度

$\sigma_{S(i)}$: 個別リスク因子への感応度

2. 2 トレーディング部門

銀行が行う金融取引は大きくバンキング取引とトレーディング取引に分類される。バンキング取引が顧客との間で実施した取引を満期まで保有し、その間の利息収支によって収益を得るのに対して、トレーディング取引は短期間のうちに金融市場を通じて金融商品を売買して、その際の売買損益によって収益を獲得するような取引である。従って、ALM部門からトレーディング部門に貸借する内部資金は随時に調達・返済できる短期資金である。

またトレーディングには、金融商品を取得して売却するロングポジションと、金融商品を空売り (sell short) して買い戻すショートポジションがある。

トレーディング部門のロングポジション・ショートポジションの取得原価によるバランスは以下ようになる。

$$\sum_i A_i^l(t) = \sum_i A_i^{lf}(t) \quad (7)$$

$$\sum_j A_j^{sf}(t) = \sum_j A_j^s(t) \quad (8)$$

但し、 $A_i^l(t)$: 時点 t で保有するロングポジション i の取得原価

$A_i^{lf}(t)$: 同 その取得に要した資金のALM部門からの借入額

⁹ [34] Gundlach M. and Lehrbass, F. (Eds.) (2004), [36] Hibbeln, M.(2010), [44] McNeil, A. J., Frey, R. and Embrechts, P. (2005) など参照。

$A_j^s(t)$: 時点 t で保有するショートポジション j の取得原価
 $A_j^{s,f}(t)$: 同 その空売りで得た資金のALM部門への貸付額

これらのトレーディング取引を時価評価すると、取引原価 ($A_i^l(t), A_j^s(t)$) が時価評価額 ($v_i^l(t), v_j^s(t)$) に置き替わり、その差額が評価損益として計上されることになる。その状況をロングポジションとショートポジションをまとめて同じ添え字 i で表記し、ロング・ショートの違いをプラス・マイナスの符号で区分すると、以下のようにポジション評価損益をまとめることができる。

$$V(t, x_1, \dots, x_K) = \sum_i \pm (v_i(t, x_1, \dots, x_K) - v_{i,0}) \quad (9)$$

但し, $v_{i,0}$: 初期取得価格=ALM部門との貸借金額= $A_i^{l,f}(t), A_j^{s,f}(t)$

$v_i(t, x_1, \dots, x_K)$: ポジション i の時価評価額
 x_1, \dots, x_K : 評価額決定要因

取引 i の市場価格変動は、変数で形式的に展開すると、時間の経過 (dt) と価格決定要因の変動 (dx_1, \dots, dx_K) によって次のように表される。

$$\begin{aligned} dv_i(t) &= \frac{\partial v_i}{\partial t} dt + \frac{\partial v_i}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial v_i}{\partial x_K} dx_K + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^K \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_k} dx_j dx_k \\ &= \theta^i dt + \Delta_1^i dx_1 + \dots + \Delta_K^i dx_K + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^K \Gamma_{j,k}^i dx_j dx_k \end{aligned} \quad (10)$$

但し, $\theta^i = \frac{\partial v_i}{\partial t}$: 時間感応度 (シータ)

$\Delta_k^i = \frac{\partial v_i}{\partial x_k}$: 決定要因 x_k への1次感応度 (デルタ)

$\Gamma_{j,k}^i = \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_k}$: 決定要因 x_j, x_k への2次感応度 (ガンマ)

したがって、それらを合算したポジション評価額全体の變動 ($dV(t)$) は次のようになる。

$$\begin{aligned} dV(t) &= \sum_i dv_i(t) \\ &= \left(\sum_i \theta^i \right) dt + \sum_{k=1}^K \left(\sum_i \Delta_k^i \right) dx_k + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^K \left(\sum_i \Gamma_{j,k}^i \right) dx_j dx_k \\ &= \theta \cdot dt + \sum_{k=1}^K \Delta_k \cdot dx_k + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^K \Gamma_{j,k} \cdot dx_j dx_k \end{aligned} \quad (11)$$

但し、ロング・ショートによる±は、 $v_i(t)$ に含まれるとする。

ポジション全体の時間感応度を θ , 決定要因への1次感応度を Δ_k ,

2次感応度を $\Gamma_{j,k}$ と表記する。

ここで、価格決定要因 (x_1, \dots, x_K) は、次の正規過程にしたがって変動すると仮定する。¹⁰

$$d\tilde{x}_k(t) = \mu_k(t)dt + \sigma_k d\tilde{Z}_k(t) \quad (12)$$

但し、 $d\tilde{Z}_k(t) \sim N(0, dt)$ の標準ブラウン運動

$$\text{Cov}[d\tilde{Z}_j(t), d\tilde{Z}_k(t)] = \rho_{j,k} dt$$

これを(11)式に代入すると次式が得られる。 dt^2 以上の微小項は省略する。

$$\begin{aligned} d\tilde{V}(t) &= \theta(t)dt + \sum_{k=1}^K \Delta_k(t) d\tilde{x}_k(t) + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^K \Gamma_{j,k}(t) d\tilde{x}_j(t) d\tilde{x}_k(t) \\ &= \left[\theta(t) + \sum_{k=1}^K \Delta_k(t) \mu_k(t) + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^K \Gamma_{j,k}(t) \rho_{j,k} \sigma_j \sigma_k \right] dt + \sum_{k=1}^K \Delta_k(t) \sigma_k d\tilde{Z}_k(t) \end{aligned} \quad (13)$$

期初にトレーディング部門に配賦される自己資本額 ($W_{Trade}(0)$) を初期財産額として、トレーディング部門の財産額は以下のような損益プロセスによって積みあがっていく。

$$d\tilde{W}_{Trade}(t) = d\tilde{V}(t) - \left(\sum_i \pm v_{i,0} \right) r(t) dt - C_{Trade} dt \quad (14)$$

但し、 $(\sum_i \pm v_{i,0}) r(t) dt$ はALM部門との貸借資金の利息

$C_{Trade} dt$ は期間中のトレーディング部門の経費支出

整理するとトレーディング部門の損益プロセスは次式のようになる。

$$\begin{aligned} d\tilde{W}_{Trade}(t) &= \left[\theta(t) - V_0(t) r(t) + \sum_{k=1}^K \Delta_k(t) \mu_k(t) + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^K \Gamma_{j,k}(t) \rho_{j,k} \sigma_j \sigma_k - C_{Trade} \right] dt \\ &\quad + \sum_{k=1}^K \Delta_k(t) \sigma_k d\tilde{Z}_k(t) \end{aligned} \quad (15)$$

但し、 $V_0(t) = \sum_i \pm v_{i,0}$: 時点 t で存続するポジションについて合算

2. 3 手数料部門

銀行の貸出業務では、長期的な傾向として利鞘率の縮小が見られ、それに代替する業務として手数料部門拡大の必要性が叫ばれて久しい。手数料業務には為替手数料やATM手数料などのように高頻度・少額で発生するものから、証券元利払い手数料などのように定期的に発生するもの、M&A手数料などのように非定期に発生する大口取引など多岐に亘っている。

この手数料部門では、ATM運用のための資金準備や、証券元利払いのための資金受け入れと支払いなどで業務遂行のための資金が必要となるが、そのような資金はALM部門との間で一定額を貸借し、発生する利息は経費として手数料部門経費 C_{Fee} で考慮することとする。

¹⁰ トレンド項は時間と共に変化する ($\mu_k(t)$) と仮定し、ランダム項のボラティリティ (σ_k) は定数と仮定する。

そのような前提の下で、手数料部門の損益プロセスを次のようにモデル化する。¹¹

1. 時間の経過を $0 \leq t \leq 1$ で表す。

2. 手数料の元となる金融サービスの取引金額を X_k で表し、それらは共通の分布関数 F から発生するものとし、

$$E[X_k] = \mu, V[X_k] = \sigma^2$$

とする。

3. 金融サービスの発生時点を $T_1 \leq T_2 \leq \dots$ で表し、発生間隔

$$Y_k = T_k - T_{k-1}$$

は i i d (independent identically distributed) であるとし、 $E[Y_k] = 1/\theta$ とする。

4. 期間 $[0, t]$ の間の発生件数を $N(t)$ とする。

$$N(t) = \sup\{n \geq 1, T_n \leq t\}$$

5. 取引金額 ($\{X_k\}$) と取引発生間隔 ($\{Y_k\}$) は独立とする。

6. 取引金額に対する手数料率を m とする。

7. 手数料部門の年間経費額を C_{Fee} とし、年間に均一に発生するとする。

このとき、発生件数プロセス $N(t)$ はポワソン過程 (Poisson Process) となり、手数料部門の時点 $t \in [0,1]$ までの期間損益 $P_{Fee}[0, t]$ は、次のように表される。

$$\tilde{P}_{Fee}[0, t] = m \cdot \tilde{X}(t) - C_{Fee} \cdot t \quad (16)$$

但し、 $\tilde{X}(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} \tilde{X}_k$: 時点 t までの累積取引金額

$\tilde{X}(t)$ の分布関数 $G_t(x)$ は以下の通り

$$\begin{aligned} G_t(x) &= \text{Prob}\{X(t) < x\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\theta \cdot t} \frac{(\theta \cdot t)^n}{n!} F^{n*}(x) \end{aligned}$$

ここで $F^{n*}(x)$ は分布関数 $F(x)$ の n 回の畳み込みを表すとする。

従って、手数料部門の損益プロセス ($d\tilde{W}_{Fee}(t)$) は次のように表される。¹²

$$\begin{aligned} d\tilde{W}_{Fee}(t) &= d\tilde{P}_{Fee}[0, t] = m \cdot d\tilde{X}(t) - C_{Fee} \cdot dt \\ &= m \cdot (\tilde{X}(t+dt) - \tilde{X}(t)) - C_{Fee} \cdot dt \\ &= m \cdot \left(\sum_{k=N(t)}^{N(t+dt)} \tilde{X}_k \right) - C_{Fee} \cdot dt \end{aligned} \quad (17)$$

2. 4 A L M部門

A L M部門は内部資金システムの中核として、自己資金や預金や借入金などの外部調達資金を、貸出部門やトレーディング部門や手数料部門に内部資金として供給する。

A L M部門の時点 $s \in [0,1]$ での資産 $A(s)$ と負債 $L(s)$ ・資本 $E(s)$ のバランスを次のとおりとする。

$$A(s) = L(s) + E(s) \quad (18)$$

¹¹ 例えば、[30] Embrechts, P., Kluppelberg, C. and Mikosch, T. (1997) ; 1.1 The Ruin Problemなどを参照

¹² 手数料部門は、実際にはこのように表現できる複数の業務単位の集合体である。それぞれについて金額分布関数 $F(x)$ 、手数料率 m 、発生頻度 θ をモデル化する必要がある。

この時点 s 以降の時点 t ($s < t \leq 1$) において、ALM部門の資産・負債が次のように分解されるとする。

$$\left. \begin{aligned} A(t) &= A_{s,0}(t) + A_{s,1}(t) \\ L(t) &= L_{s,0}(t) + L_{s,1}(t) \\ E(t) &= E(s) = E(0) \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

但し、 $A_{s,0}(t), L_{s,0}(t)$ は時点 s での金利が継続適用される残高
 $A_{s,1}(t), L_{s,1}(t)$ は時点 t での新規金利が適用される残高

期中の新規金利は、期初に想定した金利シナリオ（資産側： $p(t)$ 、負債側： $q(t)$ ）に従って、適用金利が設定されるとする。時点 s までの金利推移が金利シナリオどおりであったとすると、それ以降の時点 ($s < t$) で、期間 $[t, t + dt]$ に発生する受取利息 $P(t)dt$ と支払利息 $Q(t)dt$ は次のように計算される。

$$\left. \begin{aligned} P(t)dt &= \left(A_{s,0}(t)p_{s,0}(t) + A_{s,1}(t)p(t) \right) dt \\ Q(t)dt &= \left(L_{s,0}(t)q_{s,0}(t) + L_{s,1}(t)q(t) \right) dt \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

但し、 $p_{s,0}(t), q_{s,0}(t)$ は、 $A_{s,0}(t), L_{s,0}(t)$ の残高平均金利

ここで時点 s において、当初に設定した金利シナリオ ($p(t), q(t)$) が、乖離幅 $+d\tilde{r}(s)$ で乖離したとする。¹³ その結果、それ以降の時点 ($s < t$) の新規金利シナリオは ($p(t) + d\tilde{r}(s), q(t) + d\tilde{r}(s)$) に修正され、金利シナリオ修正後の発生利息は次のように計算される。

$$\left. \begin{aligned} P(t)^{+d\tilde{r}(s)}dt &= \left(A_{s,0}(t)p_{s,0}(t) + A_{s,1}(t)(p(t) + d\tilde{r}(s)) \right) dt \\ Q(t)^{+d\tilde{r}(s)}dt &= \left(L_{s,0}(t)q_{s,0}(t) + L_{s,1}(t)(q(t) + d\tilde{r}(s)) \right) dt \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

従って、このシナリオ修正 $+d\tilde{r}(s)$ が期間 $[t, t + dt]$ の利息収支額に与える影響は次のようになる。¹⁴

$$\begin{aligned} dR^{+d\tilde{r}(s)}dt &= \left(P(t)^{+d\tilde{r}(s)} - Q(t)^{+d\tilde{r}(s)} \right) \cdot dt - \left(P(t) - Q(t) \right) \cdot dt \\ &= \left(A_{s,1}(t) - L_{s,1}(t) \right) \cdot d\tilde{r}(s) \cdot dt \\ &= GAP(s, t - s) \cdot d\tilde{r}(s) \cdot dt \end{aligned} \quad (22)$$

$$\text{但し、} GAP(s, t - s) = A_{s,1}(t) - L_{s,1}(t) \quad (23)$$

この影響は、ALM部門の期間損益 $P_{ALM}[0,1]$ に対しては、期間 $[s, 1]$ に亘って（即ち、期末まで）及ぶために、金利シナリオ修正 $+d\tilde{r}(s)$ の期間損益への影響は次のように計算される。

$$\begin{aligned} dP_{ALM}[0,1]^{+d\tilde{r}(s)} &= \int_s^1 dR^{+d\tilde{r}(s)} dt \\ &= \int_s^1 GAP(s, t - s) \cdot d\tilde{r}(s) \cdot dt \end{aligned} \quad (24)$$

このような新規金利シナリオの乖離 ($+d\tilde{r}(s)$) が、期初から連続的に発生するとすれば、期間中のすべての金利シナリオ修正の影響を受けて、ALM部門の1年間の期間損益は以下のように修正計算される。

¹³ この論文では1因子モデルとする。銀行実務では、短期・長期・海外金利など複数の金利変動因子を設定するほか、この論文で管理の対象としている実現損益（＝利息収支）に加えて、評価損益も管理の対象とすることが多い。

¹⁴ (23)式で定義される $GAP(s, t - s)$ を時点 s 基準の「資産負債ギャップ」と呼ぶ。

$$\begin{aligned}
dP_{ALM}[0,1] &= \int_0^1 dP_{ALM}[0,1]^{+d\tilde{r}(s)} \\
&= \int_0^1 d\tilde{r}(s) \int_s^1 GAP(s, t-s) dt
\end{aligned} \tag{25}$$

期中の微小期間 $[t, t + dt]$ における、金利シナリオ修正による利息収支（従って期間損益）への影響は、期初から時点 t までに起こった金利シナリオ乖離、 $+d\tilde{r}(s)$ ($0 \leq s \leq t$) の影響を合算したものであるから、上記の積分を積分順序を変更して次のように計算する。このような分析をGAP分析と呼んでいる。

$$dP_{ALM}[0,1] = \int_0^1 dt \int_0^t GAP(s, t-s) \cdot d\tilde{r}(s) \tag{26}$$

これは当初に設定した取引シナリオ ($A(t), L(t)$) と新規金利シナリオ ($p(t), q(t)$) どおりに取引が進んだ場合の資産・負債の残高平均金利 ($p(t)^*, q(t)^*$) に基づいて計算した利息収支からの変動額となる。ALM部門経費の要素も考慮すると、ALM部門の損益プロセスは次のようになる。当初に設定した金利シナリオからの乖離は正規分布すると仮定する。 ($d\tilde{r}(s) \sim N(0, \sigma^2)$)

$$\begin{aligned}
d\tilde{W}_{ALM}(t) &= A(t) \cdot p(t)^* \cdot dt - L(t) \cdot q(t)^* \cdot dt - C_{ALM} \cdot dt \\
&\quad + \left(\int_0^t GAP(s, t-s) \cdot d\tilde{r}(s) \right) \cdot dt
\end{aligned} \tag{27}$$

3. 損益プロセスの制御手法（収益性制御・リスク制御）

2. 部門別損益プロセスのモデル化で定義した業務部門毎の損益プロセスに対して、収益性制御とリスク制御を加えることを考える。この収益性制御とリスク制御の基礎となるのが、期初に各業務部門に配賦される「リスク資本」である。リスク資本の原資は自己資本額で、これを株主の投資資本と見れば、株主からの一定の収益性期待を担った資金であり、預金者などの債権者から見れば、損失が発生した場合の処理原資であり、債権額棄損に対するバッファとして見ることができるものである。

業務部門別管理では、期初に業務部門に対して「リスク資本」配賦を行うことによって、業務部門毎にこの株主に対する収益性確保の条件と、預金者などの債権者に対する安全性確保の条件を課すというものである。

銀行の期初の自己資本額を $E(0)$ とすると、この自己資本額が各業務部門に配賦されるリスク資本 ($W_u(0)$) の原資となって次のように分解される。¹⁵

$$E(0) = W_{Total}(0) = W_{Loan}(0) + W_{Trade}(0) + W_{Fee}(0) + W_{ALM}(0) + W_{Buffer}(0)$$

以下では、この期初における自己資本の配賦を基礎とする各業務部門の「収益性制御」と「リスク制御」について、

¹⁵ $W_{Buffer}(0)$ は、4. 1. 1 で議論するオペレーショナル・リスクへの備え（あるいは、その部分を別途取り出して、 $W_{op}(0)$ として計上する）や、ストレス状態において追加資本配布が必要となったような場合のバッファとして用意される。

順番に見て行くことにする。

3. 1 収益性制御

銀行の各業務部門 u ($u \in \{Loan, Trade, Fee, ALM\}$) の財産額 ($W_u(t)$) は、期初リスク資本配賦 ($W_u(0)$) を初期値とし、それぞれの部門の損益プロセス ($d\tilde{W}_u(t)$) によって積みあがっていく。

すなわち、 $t \in [0,1]$ に対して、次のように変化する。

$$\tilde{W}_u(t) = W_u(0) + \int_0^t d\tilde{W}_u(s) \quad (28)$$

但し、 $u \in \{Loan, Trade, Fee, ALM\}$

期初と期末の財産額の差額が各業務部門の期間損益 ($\tilde{P}_u[0,1]$) である。

$$\tilde{P}_u[0,1] = \tilde{W}_u(1) - W_u(0) = \int_0^1 d\tilde{W}_u(s) \quad (29)$$

但し、 $u \in \{Loan, Trade, Fee, ALM\}$

収益性制御は、この各業務部門の期間損益の期待値が、株主が各業務部門に要請する収益率 ρ_u (これを資本コスト率¹⁶と呼ぶ) 以上になるように構成する。

$$E[\tilde{P}_u[0,1]] \geq \rho_u \cdot W_u(0) \quad (30)$$

但し、 $u \in \{Loan, Trade, Fee, ALM\}$

ρ_u : 業務部門 u の資本コスト率

以下では、貸出部門、トレーディング部門、手数料部門、ALM部門ごとに、収益性制御のための条件を構成していくこととする。

3. 1. 1 貸出部門の収益性制御

貸出部門の損益プロセスは次のように表すことができた。

$$d\tilde{W}_{Loan}(t) = \sum_{i=1}^n \pi_i \cdot X_i(t) \cdot dt - C_{Loan} \cdot dt - \sum_{i=1}^n X_i(t) \cdot (1 - \theta_i) \cdot d\tilde{H}_i(t) \quad (4)$$

但し、 $\pi_i = p_i(t) - \bar{p}_i(t)$: 貸出利轄率 = 貸出金利 - 内部資金金利

C_{Loan} : 貸出部門経費 (期中に均等に発生すると仮定)

$\tilde{H}_i(t)$: 時点 $t \in [0,1]$ の取引先 i のデフォルト状態

$$\tilde{H}_i(t) = \begin{cases} 1 & (\text{時点 } t \text{ でデフォルト状態}) \\ 0 & (\text{時点 } t \text{ でデフォルト無し}) \end{cases}$$

$$\tilde{H}_i(t) = 0 \text{ で, } \begin{cases} \tilde{H}_i(t+dt) = 1 \text{ となる確率 } p_{R(i)}dt \\ \tilde{H}_i(t+dt) = 0 \text{ となる確率 } 1 - p_{R(i)}dt \end{cases}$$

θ_i : デフォルト時回収率

¹⁶ この資本コスト率をどのように認識 (計算) するか、という課題がある。

従って、貸出部門の期間損益 ($\tilde{P}_{Loan}[0,1]$) は、次のように計算される。

$$\begin{aligned}\tilde{P}_{Loan}[0,1] &= \sum_{i=1}^n \pi_i \int_0^1 X_i(t) dt - C_{Loan} \int_0^1 dt - \sum_{i=1}^n (1 - \theta_i) X_i(t) d\tilde{H}_i(t) \\ &= \sum_{i=1}^n \pi_i \bar{X}_i - C_{Loan} - \sum_{i=1}^n (1 - \theta_i) X_i(\tilde{\tau}_i) \tilde{H}_i(1)\end{aligned}\quad (31)$$

但し、 $\bar{X}_i = \int_0^1 X_i(t) dt$: 期中平均残高
 $\tilde{\tau}_i$: 取引先 i のデフォルト時点

これに対して、収益性制御の条件 ($E[\tilde{P}_{Loan}[0,1]] \geq \rho_u \cdot W_u(0)$) を適用すると、以下のようになる。

$$\begin{aligned}E[\tilde{P}_{Loan}[0,1]] &= \sum_{i=1}^n \pi_i \bar{X}_i - C_{Loan} - \sum_{i=1}^n (1 - \theta_i) \cdot E[X_i(\tilde{\tau}_i)] \cdot \tilde{H}_i(1) \\ &= \sum_{i=1}^n \pi_i \bar{X}_i - C_{Loan} - \sum_{i=1}^n (1 - \theta_i) \cdot \bar{X}_i \cdot \lambda_{R(i)} \\ &\geq \rho_{Loan} \cdot W_{Loan}(0)\end{aligned}\quad (32)$$

但し、取引先 i のデフォルト時点は期中一様に分布するとし、
 年間デフォルト率は $\lambda_{R(i)}$ とする

この式から更に展開するために、貸出部門経費 (C_{Loan}) と期初配賦資本 ($W_{Loan}(0)$) を、各取引先の貸出に対して次のように割り付けることを考える。¹⁷

$$C_{Loan} = \sum_{i=1}^n c_i \cdot \bar{X}_i \quad (\text{管理会計による}) \quad (33)$$

$$W_{Loan}(0) = \sum_{i=1}^n w_i(0) \cdot \bar{X}_i \quad (\text{リスク寄与度方式等による}) \quad (34)$$

これらの式を(32)式に代入すると、次の(35)式が得られる。

$$\sum_{i=1}^n \pi_i \bar{X}_i - \sum_{i=1}^n c_i \bar{X}_i - \sum_{i=1}^n (1 - \theta_i) \cdot \bar{X}_i \cdot \lambda_{R(i)} \geq \rho_{Loan} \sum_{i=1}^n w_i(0) \cdot \bar{X}_i \quad (35)$$

さらに右辺を移項して \bar{X}_i で括ると次式が得られる。

$$\sum_{i=1}^n \bar{X}_i \cdot [\pi_i - c_i - (1 - \theta_i) \cdot \lambda_{R(i)} - \rho_{Loan} \cdot w_i(0)] \geq 0 \quad (36)$$

この不等式が成立するための「十分条件」は、 Σ の各項が正値であることである。残高 \bar{X}_i は正値であるから、各貸出について以下の条件が満たされていれれば良いことがわかる。

$$\pi_i - c_i - (1 - \theta_i) \cdot \lambda_{R(i)} - \rho_{Loan} \cdot w_i(0) \geq 0 \quad (37)$$

¹⁷ [50] Tache, D. (1999) 参照

これを貸出利率と内部資金利率との間の利鞘率 $\pi_i (= p_i(t) - \bar{q}_i(t))$ について解き、

$$\pi_i = p_i(t) - \bar{q}_i(t) \geq c_i + (1 - \theta_i) \cdot \lambda_{R(i)} + \rho_{Loan} \cdot w_i(0) \quad (38)$$

さらに貸出利率 ($p_i(t)$) について整理すると、次の制約式が得られる。

$$p_i(t) \geq \bar{q}_i(t) + c_i + (1 - \theta_i) \cdot \lambda_{R(i)} + \rho_{Loan} \cdot w_i(0) \quad (39)$$

すなわち、「貸出利率は内部資金利率、経費率、EL (Expected Loss) 比率 ($= (1 - \theta_i) \cdot \lambda_{R(i)}$)、資本コスト比率 ($\rho_{Loan} \cdot w_i(0)$) を加えたものよりも高く設定すべし」という制約式が得られる。この制約式を「プライシング・ガイドライン」と呼んでいる。¹⁸

3. 1. 2 トレーディング部門の収益性制御

金融取引を成立させると満期まで保有して、その間の利息収支によって利益を積み上げる一般のバンキング業務に対して、トレーディング業務は金融市場の状況に応じて短期のポジションを構成し、その間の金融市場の変動によって売買損益の獲得を狙うような取引形態である。従って期間中を通じて一貫した手法のもとに計画的に収益を上げることは困難であり、その時々々の市場の状況に応じてポジションを再構成していくが必要になる。

そのために貸出部門やALM部門や手数料部門のような「収益性確保のための十分条件」を構成することはできず、期中の時点 $t \in [0,1]$ までの損益の積み上がり方が巡航速度をキープしているか否かのチェックを、以下の条件式によって行うことになる。

$$P_{Trade}[0, t] = \int_0^t dW_{Trade}(s) \geq \lambda_{Trade} \cdot W_{Trade}(0) \cdot t \quad (40)$$

以下では、この条件式を満たすための代表的なトレーディング戦略について見ていくこととする。

トレーディング部門の損益プロセスは次のように表された。

$$d\tilde{W}_{Trade}(t) = \left[\theta(t) - V_0(t)r(t) + \sum_{k=1}^K \Delta_k(t)\mu_k(t) + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^K \Gamma_{j,k}(t)\rho_{j,k}\sigma_j\sigma_k - C_{Trade} \right] dt + \sum_{k=1}^K \Delta_k(t)\sigma_k d\tilde{Z}_k(t) \quad (15)$$

但し、 $V_0(t) = \sum_i \pm v_{i,0}$: 時点 t で存続するポジションについて合算

この損益プロセスの期待値を計算すると次式のようになる。

$$E[d\tilde{W}_{Trade}(t)] = [\theta(t) - V_0(t) \cdot r(t)] \cdot dt + \sum_{k=1}^K \Delta_k(t) \cdot \mu_k(t) \cdot dt + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^K \Gamma_{j,k}(t) \cdot \rho_{j,k}\sigma_j\sigma_k \cdot dt - C_{Trade} \cdot dt \quad (41)$$

¹⁸ プライシング・ガイドラインに登場する要素の内、貸出金利は貸出実行時に設定されるものであるが、右辺の内部資金利率 ($\bar{q}_i(t)$) : 従って資金調達コスト率、貸出部門経費 (c_i)、回収率 (θ_i)、取引先デフォルト率 (=格付: $\lambda_{R(i)}$)、資本コスト率 (ρ_{Loan})、貸出部門への配賦資本 ($w_i(0)$) は、貸出実行後の業務努力によって改善することができ、貸出部門の収益性は貸出実行後にも高めることができる。

この期待値を実現するために、(41)式による損益プロセスのどの部分に着目するかによって、様々なトレーディング戦略が考えられている。

(1) Directional Trading

市場変動 ($\mu_k(t)$) が予想されるときに、その方向性 ($\mu_k(t) > 0$ または $\mu_k(t) < 0$) を予測し、予測が当たれば収益が獲得できるようにデルタ・ポジションを構成するような手法で、

$$\mu_k(t) > 0 \text{ ならば } \Delta_k(t) > 0, \quad \mu_k(t) < 0 \text{ ならば } \Delta_k(t) < 0 \text{ として,}$$

$$\mu_k(t) \cdot \Delta_k(t) \cdot dt > 0 \quad (42)$$

の獲得を目的としてトレーディングを行う。

(2) Carry Trading

市場変動の方向性が期待できず ($\mu_k(t) \approx 0$)、変動性も小さい ($\sigma_k \approx 0$) と予想されるときに、右辺の第1項で収益が取れる ($\theta(t) - V_0(t) \cdot r(t) > 0$) 場合には、デルタ・ポジションを構成しつつ、

$$[\theta(t) - V_0(t) \cdot r(t)] \cdot dt > 0 \quad (43)$$

を収益源としてポジションを構成する。これをキャリー取引 (Carry Trading) と呼ぶ。

(3) Arbitrage Trading

市場の状況によっては、複数の取引を同時に実行することによって、デルタやガンマのポジションをとらないで収益を確定できることがある。そのような状況をアービトラージ機会 (Arbitrage Opportunity) という。

その場合の収益源は、Carry Trading と同様に、

$$[\theta(t) - V_0(t) \cdot r(t)] \cdot dt > 0 \quad (43)$$

である。

(4) Gamma Trading (Volatility Trading)

その他に、ガンマ項 ($\Gamma_{j,k}(t) \cdot \rho_{j,k} \sigma_j \sigma_k \cdot dt$) を利用して利益を獲得する方法 (Gamma Trading あるいは Volatility Trading という) もある。¹⁹

3. 1. 3 手数料部門の収益性制御

次に手数料部門の損益プロセスについて、収益確保のための条件を示す。2. 3による手数料部門の期間損益、

$$\tilde{P}_{Fee}[0,1] = m \cdot \tilde{X}(1) - C_{Fee} \quad (16)$$

但し、 $\tilde{X}(1) = \sum_{k=1}^{\tilde{N}(1)} \tilde{X}_k$: 期末時点1までの累積取引金額

¹⁹ Black-Scholes モデルではデリバティブのガンマ (原資産への2次感応度) とベガ (ボラティリティへの感応度) に、次の関係があることが知られている。
 $\sigma \cdot S(t)^2 \cdot (T-t) \cdot \Gamma(t) = Vega(t)$
 従って、ガンマの制御とベガの制御は相互に関係するが、ボラティリティトレーディングとは、オプションの市場価格が内包するボラティリティ (インプライドボラティリティ) とトレーダーが予測するボラティリティに乖離がある場合に実行されるトレーディング手法である。(4) 池森俊文 (2018) 参照

に対して、収益性確保のための条件 ($E[\tilde{P}_{Fee}[0,1] \geq \rho_{Fee} \cdot W_{Fee}(0)]$) を求めると、取引間隔と取引金額が独立であることから次のように計算される。

$$E[\tilde{P}_{Fee}[0,1]] = m \cdot E[\tilde{X}(1)] - C_{Fee} = m \cdot \mu \cdot \theta - C_{Fee} \quad (44)$$

従って、求めるべき条件は以下のようになる。

$$m \cdot \mu \cdot \sigma \geq C_{Fee} + \rho_{Fee} \cdot W_{Fee}(0) \quad (45)$$

すなわち、マージン率×案件の平均金額×年間平均件数が、手数料部門経費+手数料部門の資本コストを上回るように業務設計をすることである。

3. 1. 4 ALM部門の収益性制御

ALM部門の損益プロセス(27)式を、1年間([0,1])に亘って積分すると期間損益 ($P_{ALM}[0,1]$) が得られる。

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{ALM}[0,1] &= \int_0^1 (A(t) \cdot p^*(t) - L(t) \cdot q^*(t) - C_{ALM}) \cdot dt \\ &\quad + \int_0^1 \left(\int_0^1 GAP(s, t-s) \cdot d\tilde{r}(s) \right) \cdot dt \end{aligned} \quad (46)$$

この期間損益の期待値を計算すると、 $E[d\tilde{r}(s)] = 0$ ((27)式の仮定) であるから、

$$\begin{aligned} E[\tilde{P}_{ALM}[0,1]] &= \int_0^1 (A(t) \cdot p^*(t) - L(t) \cdot q^*(t) - C_{ALM}) \cdot dt \\ &\quad + \int_0^1 \left(\int_0^1 GAP(s, t-s) \cdot E[d\tilde{r}(s)] \right) \cdot dt \\ &= \int_0^1 (A(t) \cdot p^*(t) - L(t) \cdot q^*(t)) \cdot dt - C_{ALM} \end{aligned} \quad (47)$$

収益性確保のための条件 ($E[\tilde{P}_{ALM}[0,1] \geq \rho_{ALM} \cdot W_{ALM}(0)]$) を適用すると、

$$\int_0^1 (A(t) \cdot p^*(t) - L(t) \cdot q^*(t)) \cdot dt - C_{ALM} \geq \rho_{ALM} \cdot W_{ALM}(0) \quad (48)$$

銀行の会計上の自己資本比率は数%程度で非常に低いが、債務超過でなければ正値である。これを利用して収益性確保のための条件を次のように書き換える。

$$\begin{aligned} \int_0^1 (A(t) \cdot p^*(t) - L(t) \cdot q^*(t)) \cdot dt &= \int_0^1 L(t) \left((1 + \epsilon(t)) \cdot p^*(t) - q^*(t) \right) \cdot dt \\ &\geq \int_0^1 L(t) (p^*(t) - q^*(t)) \cdot dt = \bar{L} \cdot (\bar{p}^* - \bar{q}^*) \end{aligned} \quad (49)$$

$$\text{但し, } \epsilon(t) = \frac{A(t) - L(t)}{L(t)} > 0, \quad \bar{L} = \int_0^1 L(t) \cdot dt$$

$$\bar{p}^* = \frac{1}{\bar{L}} \int_0^1 p^*(t) \cdot L(t) \cdot dt$$

$$\bar{q}^* = \frac{1}{\bar{L}} \int_0^1 q^*(t) \cdot L(t) \cdot dt$$

従って、ALM部門の収益性確保のための十分条件は次のようになる。

$$\bar{L} \cdot (\bar{p}^* - \bar{q}^*) \geq C_{ALM} + \rho_{ALM} \cdot W_{ALM}(0) \quad (50)$$

すなわち、

$$\bar{p}^* - \bar{q}^* \geq \frac{C_{ALM} + \rho_{ALM} \cdot W_{ALM}(0)}{\bar{L}} \quad (51)$$

この条件式は、期間中の平均内部資金利率（ \bar{p}^* ）と平均資金調達利率（ \bar{q}^* ）の差額（＝利轄率）が、ALM部門経費率（ C_{ALM}/\bar{L} ）と資本コスト率（ $\rho_{ALM} \cdot W_{ALM}(0)/\bar{L}$ ）をカバーするように設定すればよいことを示している。内部資金利率に一定のスプレッドを乗せて設定する貸出金利は他行との競争に晒されており、内部資金利率を高くすることは貸出の競争力を低下させることになる。従って、(51)式は資金調達に要する総コストを制約する条件として考えることが通常である。

$$\bar{p}^* \geq \bar{q}^* + \frac{C_{ALM} + \rho_{ALM} \cdot W_{ALM}(0)}{\bar{L}} \quad (52)$$

ここで、資金調達に要する総コストは以下のもので構成される。

平均資金調達利率	\bar{q}^*
ALM部門経費	C_{ALM}/\bar{L}
資本コスト率	ρ_{ALM}
初期配布資本比率	$W_{ALM}(0)/\bar{L}$

3. 2 リスク制御

各業務部門の期間損益（ $\tilde{P}_u[0,1]$ ）は、期初のリスク資本配賦額（ $W_u(0)$ ）を初期値として、各業務部門の損益プロセス（ $d\tilde{W}_u(t)$ ）が積み上がって構成されることを見た。

$$\begin{aligned} \tilde{P}_u[0,1] &= \tilde{W}_u(1) - W_u(0) \\ &= \int_0^1 d\tilde{W}_u(s) \end{aligned} \quad (29)$$

但し、 $u \in \{Loan, Trade, Fee, ALM\}$

この期間損益が悪化して損失が発生した場合にも、一定の信頼度（ $\alpha\%$ ）の下で発生し得る最大期間損失額、 $\Phi_\alpha[-P_u[0,1]]$ （ $-P_u[0,1]$ の $\alpha\%$ 点）が、各部門の初期配賦リスク資本額（ $W_u(0)$ ）で処理できるようにしたい。

$$\Phi_{\alpha}[-P_u[0,1]] \leq W_u(0) \quad (53)$$

但し, $u \in \{Loan, Trade, Fee, ALM\}$

そのための制約条件について、以下で貸出部門、トレーディング部門、手数料部門、ALM部門ごとに見ていく。

3. 2. 1 貸出部門のリスク制御

貸出部門の損益プロセス ((4)式) のうち、貸倒損失発生部分を決算期間中で合算して \tilde{L}_{Loan} と置く。

$$\begin{aligned} \tilde{L}_{Loan} &= \sum_{i=1}^n \int_0^1 X_i(s) \cdot (1 - \theta_i) \cdot d\tilde{H}_i(s) \\ &= \sum_{i=1}^n X_i(\tilde{\tau}_i) \cdot (1 - \theta_i) \cdot \tilde{H}_i(1) \end{aligned} \quad (54)$$

但し, $\tilde{\tau}_i$: 取引先 i のデフォルト時点

この期間中の貸倒損失累積額の期待値を EL (=Expected Loss) と呼び、下記のように計算される。

$$EL = E[\tilde{L}_{Loan}] = \sum_{i=1}^n \bar{X}_i \cdot (1 - \theta_i) \cdot \lambda_{R(i)} \quad (55)$$

但し, \bar{X}_i : 期中平均残高

$\lambda_{R(i)}$: 取引先 i の格付 $R(i)$ に対応するデフォルト率 (年率)

前節 (3. 1. 1) で示した収益性確保の条件が満たされていれば、 EL は次式のようにフローの名目超過収益でカバーできることが判る。

$$EL = \sum_{i=1}^n \bar{X}_i \cdot (1 - \theta_i) \cdot \lambda_{R(i)} \leq \sum_{i=1}^n \pi_i \bar{X}_i - C_{Loan} - \rho_{Loan} \cdot W_{Loan}(0) \quad (56)$$

次に、期待値を上回る貸倒損失が発生した場合に、一定の信頼度 α の下で想定される「 EL を上回る最大損失額 UL_{α} (=Unexpected Loss) が、当初の配賦資本額 ($W_{Loan}(0)$) でカバーできるように制御したい。そのための条件を構成するために、次のような簡単な例から考えることにする。

(1) 均一ポートフォリオ (最少分散社数による制御)

貸出ポートフォリオの各貸出が下記の条件を満たしていると仮定する。

① 貸出額が同一で期中に残高が変わらない。 $X_i(t) = X_i = X_{Total}/n$

② 各取引先のデフォルト率 (λ)、回収率 (θ) が同一。

③ 各取引先のデフォルトは相互に独立に発生する。

このような均一ポートフォリオの場合には、貸倒損失額の合計 (\tilde{L}_{Loan}) は「同一の分布に従う相互に独立な確率変数の和」であり、中心極限定理により n が十分に大きい場合には正規分布に収束する。

$$\tilde{L}_{Loan} \sim N(\mu, \sigma^2)$$

この \tilde{L}_{Loan} の期待値 (μ) と分散 (σ^2) を計算すると次のようになる。

$$\mu = EL = \sum_{i=1}^n \frac{X_{Total}}{n} \cdot (1 - \theta) \cdot E[\tilde{H}_i(1)] = X_{Total} \cdot (1 - \theta) \cdot \lambda \quad (57)$$

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_{Total}}{n} \right)^2 \cdot (1 - \theta)^2 \cdot V[\tilde{H}_i(1)] = \frac{X_{Total}^2 \cdot (1 - \theta)^2}{n} \cdot \lambda \cdot (1 - \lambda) \quad (58)$$

貸倒損失額の分布が正規分布で近似できるとすれば、 UL_α は定数 (ϕ_α) と標準偏差 (σ) によって次のように表される。

$$UL_\alpha = \phi_\alpha \cdot \sigma = \phi_\alpha \cdot (1 - \theta) \cdot \sqrt{\frac{\lambda \cdot (1 - \lambda)}{n}} \quad (59)$$

ここで貸出ポートフォリオの総額 (X_{Total}) を変えずに貸出社数 (n) を増加させると、 EL は変わらないが UL_α は小さくなっていくことが判る。

$$EL = X_{Total} \cdot (1 - \theta) \cdot \lambda \quad (n \rightarrow \infty)$$

$$UL_\alpha = \phi_\alpha \cdot (1 - \theta) \cdot \sqrt{\frac{\lambda \cdot (1 - \lambda)}{n}} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

貸出ポートフォリオが (貸倒損失額合計が正規分布で近似できるぐらいに) 十分に分散化されているとすると、 UL_α を当初配賦資本 ($W_{Loan}(0)$) 以下に抑えるための条件は以下ようになる。

$$UL_\alpha = \phi_\alpha \cdot (1 - \theta) \cdot \sqrt{\frac{\lambda \cdot (1 - \lambda)}{n}} \leq W_{Loan}(0) \quad (60)$$

これを n について解くと次式が得られ、リスク制御のための必要分散社数となる。

$$n \geq \frac{\phi_\alpha^2 \cdot X_{Total}^2 \cdot (1 - \theta)^2}{W_{Loan}(0)^2} \cdot \lambda \cdot (1 - \lambda) \quad (61)$$

(2) 与信上限設定による制御

次に均一ポートフォリオの条件を少し緩めて、貸出ポートフォリオを構成する各貸出が、下記の条件を満たしていると仮定する。

- ① 貸出額に上限 ($M > 0$) が設定されていて期中に残高が変わらない。 $0 \leq X_i(t) = X_i \leq M$
- ② 各取引先のデフォルト率 (λ)、回収率 (θ) が同一。
- ③ 各取引先のデフォルトは相互に独立に発生する。

このとき、貸出ポートフォリオから発生する貸倒損失額 (\tilde{L}_{Loan}) の分散は、次のように表される。

$$V[\tilde{L}_{Loan}] = \sum_{i=1}^n a \cdot X_i^2 \quad (62)$$

$$\text{但し、} a = (1 - \theta)^2 \cdot \lambda \cdot (1 - \lambda)$$

従って、その最大値は下記の領域（ Ω ）に於いて、

$$\Omega = \left\{ (X_1, \dots, X_n) \in R^n; 0 \leq X_i \leq M, \sum_{i=1}^n X_i = X_{Total} \right\} \quad (63)$$

次の関数（ $f(X_1, \dots, X_n)$ ）が最大となる点で実現する。

$$f(X_1, \dots, X_n) = \sum_{i=1}^n a \cdot X_i^2 \quad (64)$$

その点は、例えば次のような点である。（証明は【補遺1】を参照）

$$X_{Total} = \overbrace{M + \dots + M}^{[X_{Total}/M] \text{ 個}} + \left(X_{Total} - M \cdot \left[\frac{X_{Total}}{M} \right] \right) + 0 + \dots + 0 \quad (65)$$

但し、実数 x に対して $[x]$ はその整数部分を表すものとする。

仮に、 M に欠ける貸出の残高（ $X_{Total} - M \cdot \left[\frac{X_{Total}}{M} \right]$ ）を埋めて、

$$X_{Total}^M = \overbrace{M + \dots + M}^{[X_{Total}/M] + 1 \text{ 個}} + 0 + \dots + 0 \quad (66)$$

とした貸出ポートフォリオを考えると、これは（1）で考えた均一ポートフォリオであるが、この貸出ポートフォリオの総貸出残高（ X_{Total}^M ）はもとの貸出ポートフォリオの総貸出残高（ X_{Total} ）よりも大きくなり、従って、そのUL α は（65）式で示した貸出ポートフォリオのUL α よりも大きくなる。

この均一ポートフォリオに、（1）の最小分散社数の条件を適用すると、そのUL α は当初配賦資本（ $W_{Loan}(0)$ ）以下に抑えられ、それよりも小さい（65）式の貸出ポートフォリオのUL α や、さらに小さい一般貸出ポートフォリオのUL α も当初配賦資本（ $W_{Loan}(0)$ ）で抑えられる。そこで次式が成立するようにすると、

$$\left| \frac{X_{Total}}{M} \right| + 1 \geq \frac{X_{Total}}{M} \geq n_{Min} = \frac{\phi_\alpha^2 \cdot X_{Total}^2 \cdot (1 - \theta)^2 \cdot \lambda \cdot (1 - \lambda)}{W_{Loan}(0)^2} \quad (67)$$

これを M について解けば、与信上限についての次式が得られる。

$$M \leq \frac{W_{Loan}(0)^2}{\phi_\alpha^2 \cdot X_{Total} \cdot (1 - \theta)^2 \cdot \lambda \cdot (1 - \lambda)} \quad (68)$$

この式によって、デフォルト率（ λ ）が均一の貸出ポートフォリオの与信上限が得られる。

（3）格付別与信上限の設定と実質エクスポージャー

（2）ではすべての貸出先のデフォルト率（ λ ）と回収率（ θ ）が等しいと仮定したが、実際の貸出ポートフォリオでは想定されるデフォルト率は格付によって異なり、回収率は担保や保証の状況によって異なる。

そこで、貸出ポートフォリオを同一の格付を有する貸出をまとめて部分ポートフォリオとした「格付別貸出ポー

トフォリオ」に分けて、それぞれについて（２）の議論を適用する。

また、貸出残高（ X_i ）に損失率（ $1 - \theta_i$ ）を掛けたものを実質エクスポージャー（ Y_i ）として、

$$Y_i = (1 - \theta_i) \cdot X_i \quad (69)$$

この実質エクスポージャー（ Y_i ）に対して、回収率を $\theta_i = 0$ と考えて、（２）で求めた与信上限（ M ）を適用すればよいことが判る。

貸出全体のポートフォリオが次のように格付別部分ポートフォリオに分解されているとする。

$$\begin{aligned} X_{Total} &= X_{Total}^1 + \dots + X_{Total}^K \\ &= w_1 \cdot X_{Total} + \dots + w_K \cdot X_{Total} \end{aligned} \quad (70)$$

$$X_{Total}^k = w_k \cdot X_{Total}, \quad 0 < w_k < 1, \quad \sum_{k=1}^K w_k = 1$$

各格付別部分ポートフォリオに属する貸出先の集合を $I_k : k = 1, \dots, K$ とし、格付別部分ポートフォリオ（ X_{Total}^k ）から発生する貸倒損失額を $\tilde{L}_{Total}^k : k = 1, \dots, K$ とすると、それぞれの貸出先のデフォルトが「独立に発生する」という（２）の仮定を継承するとすれば、 $\tilde{L}_{Total}^k : k = 1, \dots, K$ は独立であり、その分散に以下の関係が成り立つ。

$$V[\tilde{L}_{Total}] = V[\tilde{L}_{Total}^1] + \dots + V[\tilde{L}_{Total}^K] \quad (71)$$

また、貸倒損失額の分布が正規分布で近似できるほどに、各格付別部分ポートフォリオが十分に分散化されているとすると、各格付別部分ポートフォリオから発生する貸倒損失額の α %点（ UL_α^k ）は、定数とその標準偏差によって次のように表される。

$$UL_\alpha^k = \phi_\alpha \cdot \sqrt{V[\tilde{L}_{Total}^k]}, \quad k = 1, \dots, K \quad (72)$$

そこで、当初配賦資本（ $W_{Loan}(0)$ ）を次のように格付別部分ポートフォリオに分配して、それぞれから発生する貸倒損失額の α %点（ UL_α^k ）を、配賦資本 $\sqrt{w_k} \cdot W_{Loan}(0)$ でカバーできるように制御することを考える。

$$\begin{aligned} W_{Loan}(0)^2 &= w_1 \cdot W_{Loan}(0)^2 + \dots + w_K \cdot W_{Loan}(0)^2 \\ W_{Loan}^k(0) &= \sqrt{w_k} \cdot W_{Loan}(0) \quad k = 1, \dots, K \end{aligned} \quad (73)$$

それぞれの格付別部分ポートフォリオの実質エクスポージャー（ $Y_i : i \in I_k$ ）に対する与信上限（ M_k ）は、次のように計算される。

$$\begin{aligned} Y_i &\leq M_k, \quad i \in I_k, \quad k = 1, \dots, K \\ M_k &\leq \frac{W_{Loan}(0)^2}{\phi_\alpha^2 \cdot X_{Total} \cdot \lambda_k \cdot (1 - \lambda_k)} \end{aligned} \quad (74)$$

（４）デフォルト発生に取引先相互の依存性がある場合

（１）均一ポートフォリオから（３）格付別与信上限設定まで順番に貸出ポートフォリオに仮定する条件を緩めてきたが、最後まで残ったのが「③各取引先のデフォルトは相互に独立に発生する。」という条件である。

この条件を取り除くために、取引先のデフォルト発生メカニズムを企業価値モデルによって記述し、各取引先の企業価値 ($\tilde{V}_i(t)$) が共通リスク因子 ($\tilde{f}(t) = (\tilde{f}_1(t), \dots, \tilde{f}_K(t))$) と個別リスク因子 ($\tilde{\epsilon}_i(t)$) によって変動するという形でモデル化する。このモデルの下で「共通リスク因子が一定の固定値をとって変動しない」という条件付きの議論をすれば、(1) から (3) の仮定をカバーし、「共通リスク因子も変動する」として議論すれば、(4) デフォルト発生に対する取引先相互の依存性を議論することができる。

このような設定の下では、貸出ポートフォリオから決算期間中に発生する貸倒損失額 (\tilde{L}_{Loan}) は、共通リスク因子の変動 (\tilde{f}) と個別リスク因子の変動 ($\tilde{\epsilon}$) によって左右される。

$$\tilde{L}_{Loan} = L_{Loan}(\tilde{f}, \tilde{\epsilon}) \quad (75)$$

そこで条件付き確率の連鎖法則を利用して、貸倒損失額 (\tilde{L}_{Loan}) の分散を次のように2段階で計算する。

$$V_{f,\epsilon}[\tilde{L}_{Loan}] = E_f[V_\epsilon[\tilde{L}_{Loan}|f]] + V_f[E_\epsilon[\tilde{L}_{Loan}|f]] \quad (76)$$

共通リスク因子を固定した条件付きで議論をする場合には、各取引先のデフォルトは個別リスク因子のみの変動に依存して「独立となる」ことに注意すると、(76)式の第1段階の計算は次のようになる。

$$E_\epsilon[\tilde{L}_{Loan}|f] = \sum_{i=1}^n X_i \cdot (1 - \theta_i) \cdot \lambda_{R(i)|f} \quad (77)$$

$$V_\epsilon[\tilde{L}_{Loan}|f] = \sum_{i=1}^n X_i^2 \cdot (1 - \theta_i)^2 \cdot \lambda_{R(i)|f} \cdot (1 - \lambda_{R(i)|f}) \quad (78)$$

第2段階の計算では、共通リスク因子 (\tilde{f}) の変動によってデフォルト率 ($\lambda_{R(i)|f}$) がどのように挙動するかが課題となる。(77)(78)式を(76)式に代入すると、次の(79)式が得られる。

$$\begin{aligned} V_{f,\epsilon}[\tilde{L}_{Loan}] &= E_f[V_\epsilon[\tilde{L}_{Loan}|f]] + V_f[E_\epsilon[\tilde{L}_{Loan}|f]] \\ &= \sum_{i=1}^n X_i^2 \cdot (1 - \theta_i)^2 \cdot E_f[\lambda_{R(i)|f} \cdot (1 - \lambda_{R(i)|f})] \\ &\quad + V_f \left[\sum_{i=1}^n X_i \cdot (1 - \theta_i) \cdot \lambda_{R(i)|f} \right] \end{aligned} \quad (79)$$

この(79)式の第1項は、貸出ポートフォリオの構成 ($X_{Total} \sum_{i=1}^n w_i$, $w_i = X_i/X_{Total}$) を制御することによって抑制することができる。(1) から (3) で議論した貸出額への与信上限の設定による制御がそれに当る。この第1項を「分散化可能リスク」と呼んでいる。

第2項は共通リスク因子 (\tilde{f}) の変動によってデフォルト確率 ($\lambda_{R(i)|f}$) が変動することに起因する。このリスクは取引先に一斉に影響するために、与信分散によっては回避することができない。この第2項を「分散化不能リスク」と呼んでいる。このリスクを制御するためには、共通リスク因子の変動によるセクター別デフォルト ($\lambda_{R(i)|f}$) の挙動を分析する必要がある。²⁰

²⁰ 業種別・地域別のデフォルト率の時系列推移を、直交因子の線形結合として表して(因子分析)、その情報を手掛かりにして「セクター別(業種別・地域別)に与信上限」を設定して分散化不能リスクを制御するような方法が開発されている。[4] 池森俊文(2018), [42] Lutkebohmert, E. (2009) 参照

3. 2. 2 トレーディング部門のリスク制御

トレーディング部門の期間損益についても、一定の信頼度 α の下で想定される最大損失額が、当初にトレーディング部門に配賦されたリスク資本額 ($W_{Trade}(0)$) で処理できる範囲内に収まるように制御したい。各時点 (t) におけるトレーディング部門の損益プロセスは正規過程であり、それを期間内 ($[0,1]$) で積み上げた期間損益は正規分布となる。

$$\tilde{P}_{Trade}[0,1] \sim N \left(E \left[\tilde{P}_{Trade}[0,1] \right], V \left[\tilde{P}_{Trade}[0,1] \right] \right) \quad (80)$$

従って、期待値で中心を規格化したトレーディング部門の期間損益の α %点は、標準偏差 ($\sqrt{V \left[\tilde{P}_{Trade}[0,1] \right]}$) と定数 (ϕ_α) を用いて次のように表される。

$$\Phi_\alpha \left[-(\tilde{P}_{Trade}[0,1] - E[\tilde{P}_{Trade}[0,1]]) \right] = \phi_\alpha \cdot \sqrt{V \left[\tilde{P}_{Trade}[0,1] \right]} \leq W_{Trade}(0) \quad (81)$$

右端の両辺を2乗すれば、トレーディング部門のリスク制約は次のように整理することができる。

$$V \left[\tilde{P}_{Trade}[0,1] \right] = \int_0^1 \Delta^T(t) \cdot \Omega \cdot \Delta(t) \cdot dt \leq \frac{W_{Trade}(0)^2}{\phi_\alpha^2} \quad (82)$$

但し、 $\Delta(t) = (\Delta_1(t), \dots, \Delta_K(t))^T$: デルタ・ポジションベクトル

$\Omega = (\rho_{j,k} \sigma_j \sigma_k)$: $d\tilde{x}_k$ ($k = 1, \dots, K$) の分散共分散行列

各時点 (t) でデルタ・ポジション ($\Delta(t)$) に対して、次のような制約条件を課すとする。²¹

$$|\Delta(t)^T \cdot \Omega \cdot \Delta(t)| = \Delta(t)^T \cdot \Omega \cdot \Delta(t) \leq M \quad (83)$$

これを (82) 式に代入すると次式が得られる。

$$\int_0^1 \Delta^T(t) \cdot \Omega \cdot \Delta(t) \cdot dt \leq \int_0^1 M \cdot dt = M \quad (84)$$

したがって、日々のトレーディングのデルタ・ポジション ($\Delta(t)$) に対して、

$$\Delta(t)^T \cdot \Omega \cdot \Delta(t) \leq M \leq \frac{W_{Trade}(0)^2}{\phi_\alpha^2} \quad (85)$$

という制約を課せば、トレーディング部門の期間損益は一定の信頼度 α の下、初期配賦資本 ($W_{Trade}(0)$) によって損失処理をすることができる。

3. 2. 3 手数料部門のリスク制御

次に手数料部門の期間損益について、一定の信頼度 α の下で想定される最大損失額が、当初に手数料部門に配賦

²¹ 分散共分散行列は正值 (対称) なので絶対値は外せる。

されたリスク資本額 ($W_{Fee}(0)$) で処理できる範囲内に収まるように制御することを考える。手数料部門の期間損益は次のように表された。

$$\tilde{P}_{Fee}[0,1] = m \cdot \tilde{X}(1) - C_{Fee} \quad (16)$$

但し, $\tilde{X}(1) = \sum_{k=1}^{\tilde{N}(1)} \tilde{X}_k$: 期末までの累積取引金額

$\tilde{X}(1)$ の分布関数 $G_1(x)$ は以下の通り

$$\begin{aligned} G_1(x) &= Prob\{X(1) < x\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\theta \cdot t} \frac{(\theta \cdot t)^n}{n!} F^{n*}(x) \end{aligned}$$

ここで $F^{n*}(x)$ は分布関数 $F(x)$ の n 回の畳み込みを表すとする。

ここでは手数料部門の期間損益の α % 点が次のように「定数 \times 標準偏差」で近似できるとして計算する。

$$\Phi_{\alpha}[-P_{Fee}[0,1]] \approx \phi_{\alpha} \cdot \sqrt{V[\tilde{P}_{Fee}[0,1]]} \leq W_{Fee}(0) \quad (86)$$

手数料部門の期間損益の分散 ($V[\tilde{P}_{Fee}[0,1]] = m^2 \cdot V[\tilde{X}(1)]$) を構成する $\tilde{X}(1)$ は、期間中の取引件数 $\tilde{N}(1)$ と、各取引の金額 \tilde{X}_k という 2 つの不確実要因がある。従って、その分散は次のように表される。

$$V_{N,X}[\tilde{X}(1)] = V_N[E_X[\tilde{X}(1)|N = n]] + E_N[V_X[\tilde{X}(1)|N = n]] \quad (87)$$

上式において、各項は次のように計算される。

$$\begin{aligned} \tilde{X}(1)|(N = n) &= \tilde{X}_1 + \dots + \tilde{X}_n \\ E_X[\tilde{X}(1)|(N = n)] &= n \cdot \mu \\ V_X[\tilde{X}(1)|(N = n)] &= n \cdot \sigma^2 \end{aligned} \quad (88)$$

従って、手数料案件の期間中の発生件数がポワソン分布となり、ポワソン分布の期待値と分散が等しい ($= \theta$)²² ことに注意すると、手数料部門の期間損益の分散 ($V[\tilde{P}_{Fee}[0,1]] = m^2 \cdot V[\tilde{X}(1)]$) は次のようになる。

$$\begin{aligned} V[\tilde{P}_{Fee}[0,1]] &= m^2 \cdot V[\tilde{X}(1)] \\ &= m^2 \cdot (V_N[n \cdot \mu] + E_N[n \cdot \sigma^2]) \\ &= m^2 \cdot (\mu^2 \cdot V_N[n] + \sigma^2 \cdot E_N[n]) \\ &= m^2 \cdot \theta \cdot (\mu^2 + \sigma^2) \end{aligned} \quad (89)$$

以上から、手数料部門のリスク制約条件は以下のようになる。

$$\phi_{\alpha} \cdot m \cdot \sqrt{\theta \cdot (\mu^2 + \sigma^2)} \leq W_{Fee}(0) \quad (90)$$

3. 2. 4 ALM部門のリスク制御

ALM部門の損益プロセスは次のように表された。

²² 例えば, [38] Jones, P.W. and Smith, P. (2001) p.110-p.111 参照

$$\begin{aligned}
d\tilde{W}_{ALM}(t) &= A(t) \cdot p(t)^* \cdot dt - L(t) \cdot q(t)^* \cdot dt - C_{ALM} \cdot dt \\
&\quad + \left(\int_0^t GAP(s, t-s) \cdot d\tilde{r}(s) \right) \cdot dt \\
&\quad \text{但し, } d\tilde{r}(s) \sim N(0, \sigma^2)
\end{aligned} \tag{27}$$

この中で、ALM部門の期間損益に不確実性を引き起こすのは以下の部分である。

$$+ \left(\int_0^t GAP(s, t-s) \cdot d\tilde{r}(s) \right) \cdot dt$$

これを1年間に亘って積み上げた年間変動額（＝期間損益の変動）は以下のとおりとなる。

$$\tilde{G}_{ALM} = \tilde{P}_{ALM}[0,1] - E[\tilde{P}_{ALM}[0,1]] = \int_0^1 \left[\int_0^t GAP(s, t-s) d\tilde{r}(s) \right] \cdot dt \tag{91}$$

この年間変動額の悪い方向への変動幅（利益減少）を、一定の信頼度 α の下で、期初配賦資本額（ $W_{ALM}(0)$ ）の範囲内に抑えることがリスク量制御の目的である。

$$\Phi_\alpha[-\tilde{G}_{ALM}] \leq W_{ALM}(0)$$

期初の金利シナリオからの乖離（ $d\tilde{r}(s)$ ）が正規分布をすることを仮定しているので、それを積分した $-\tilde{G}_{ALM}$ も正規分布をして、その $\alpha\%$ 点（ $\Phi_\alpha[-\tilde{G}_{ALM}]$ ）は標準偏差（ $\sqrt{V[-\tilde{G}_{ALM}]}$ ）を定数倍（ ϕ_α ）することによって計算することができる。

$$\Phi_\alpha[-\tilde{G}_{ALM}] = \phi_\alpha \cdot \sqrt{V[-\tilde{G}_{ALM}]} \tag{92}$$

期初の金利シナリオからの乖離（ $d\tilde{r}(s)$ ）を、 $d\tilde{r}(s) = \sigma \cdot d\tilde{z}(s)$ （ $d\tilde{z}(s) \sim N(0, ds)$ ：標準ブラウン運動）と置くと、 $-\tilde{G}_{ALM}$ の分散は次のように計算することができる。

$$\begin{aligned}
V[-\tilde{G}_{ALM}] &= E \left[\left(\int_0^1 \left[\int_0^t GAP(s, t-s) d\tilde{r}(s) \right] \cdot dt \right)^2 \right] \\
&= E \left[\left(\int_0^1 \left[\int_0^t GAP(s, t-s) \cdot \sigma \cdot d\tilde{z}(s) \right] \cdot dt \right)^2 \right] \\
&= E \left[\left(\int_0^1 d\tilde{z}(s) \int_s^1 GAP(s, t-s) \cdot \sigma \cdot dt \right)^2 \right] \\
&= \int_0^1 ds \cdot \left(\int_s^1 GAP(s, t-s) \cdot \sigma \cdot dt \right)^2 \\
&\leq \int_0^1 ds \cdot \left(\int_s^1 |GAP(s, t-s)| \cdot \sigma \cdot dt \right)^2
\end{aligned} \tag{93}$$

2行目から3行目への変形は、積分領域（ $\{0 \leq s \leq t\} \times \{0 \leq t \leq 1\}$ ）の積分順序を入れ替えて、積分領域を

($\{s \leq t \leq 1\} \times \{0 \leq s \leq 1\}$) として計算したものの²³、3行目から4行目への変形は、ブラウン運動が独立過程であることを利用したものである。

ここで、期間中のGAP ($|GAP(s, t - s)|$) に次のように上限 (M) が設定されているとする。

$$|GAP(s, t - s)| \leq M \quad (94)$$

これを(93)式に代入して積分を計算すると、

$$V[-\tilde{G}_{ALM}] \leq \int_0^1 ds \left(\int_s^1 M \cdot \sigma \cdot dt \right)^2 = \int_0^1 ds \cdot M^2 \cdot \sigma^2 \cdot (1 - s)^2 = \frac{M^2 \cdot \sigma^2}{3} \quad (95)$$

したがって、リスク制約のための条件は次のようになる。

$$\Phi_\alpha[-\tilde{G}_{ALM}] = \phi_\alpha \cdot \sqrt{V[-\tilde{G}_{ALM}]} \leq \frac{\phi_\alpha \cdot M \cdot \sigma}{\sqrt{3}} \leq W_{ALM}(0) \quad (96)$$

これを M について解くと、GAP上限設定のための条件(97)式が得られる。^{24, 25}

$$M \leq \frac{\sqrt{3} \cdot W_{ALM}(0)}{\phi_\alpha \cdot \sigma} \quad (97)$$

4. 若干の注意点、新たな課題、保険会社ERMとの関係

本論文では、銀行全体の損益プロセスを「内部資金システム」によって複数の業務部門別損益プロセスに分解して、期初の「リスク資本配賦」に基づき各業務部門に対して体系的に「収益性制御」と「リスク制御」を課す方法を示した。その方法を実務として具体的に実現化するに当たってはいくつかの注意が必要となる。本章では、まず、それらの注意点について述べる。次に、2008年のリーマン・ショックを経て、銀行の経営管理として軌道修正をしなければならない課題や、最近の高度IT・ネット社会の中で新たに組み込まなければならない課題について概観する。最後に、銀行の経営管理から見た保険会社ERMの共通点と相違点について考える。

4. 1 若干の注意点

4. 1. 1 オペレーショナル・リスクについて

オペレーショナル・リスクとは、銀行が行う金融取引やその管理などの業務執行上のトラブルに伴って、各業務部門の経費が増加する可能性のことを言う。それらは、

- (1) 定常的な経費の増加 (パーゼル規制におけるオペレーショナル・リスク)
- (2) ストレス状況における経費の増加 (ストレス・テストの対象)

²³ 【補遺2】参照

²⁴ この論文では、金利変動を1因子としてモデル化しているが、多くの銀行のリスク管理実務では複数因子によってモデル化するのが一般的である。その場合には、銀行間金利、債券市場金利、短期金利、長期金利、海外金利などが因子となる。[13] 吉藤 茂 (2005) など参照

²⁵ また、この論文では、ALMは実現損益のみを管理対象としているが、実現損益+評価損益を対象とするという実務も行われている。その場合には、リスク中立測度と現実測度を同時に考える必要がある。両者の関係については、[22] Carr, P. and Yu, J. (2012), [49] Ross, S. (2011), [51] Tsui, H. M. (2013) などを参照。

に分類されるが、本論文のモデルにおいて経費は、各業務部門で（変動が無く）コンスタントに発生するものとして組み立てたためにオペレーショナル・リスクは考慮していない。

$$C_{Total} = C_{Loan} + C_{Trade} + C_{Fee} + C_{ALM} \quad (98)$$

従って、（１）定常的な経費の増加可能性に対しては、別途にオペレーショナル・リスクに対処するための資本（ $W_{Op}(0)$ ）を用意して、損失発生に備えなければならない。

$$W_{Total}(0) = W_{Loan}(0) + W_{Trade}(0) + W_{Fee}(0) + W_{ALM}(0) + W_{Op}(0) + W_{Buffer}(0) \quad (99)$$

また、（２）ストレス状況における経費増加の可能性（災害やテロなど）に対しては、いわゆるストレス・テストの中で、自己資本バッファ（ $W_{Buffer}(0)$ ）も含めて損失処理の耐久力をチェックする必要がある。

オペレーショナル・リスクの計量化は、手数料部門の計量化と同様の方法（金額分布のモデル化と発生頻度のモデル化）によって行われる。²⁶

4. 1. 2 更なる部分管理の必要性

本論文では、銀行の業務を「貸出部門」「トレーディング部門」「手数料部門」「ALM部門」に分けて管理する方法を展開した。しかし実際の銀行業務では、次のような形で更に細分化した業務管理が行われている。

（１）貸出部門と営業部店管理

貸出業務を実行・管理する部門として「貸出部門」を設定した。しかし銀行の実務では、貸出業務は業種や地域ごとに構成された「営業部店」で実行されている。「営業部店」では、本部から付与された権限（貸出金額や貸出方法などによって決まっている）に従って独自の判断で貸出を実行し、営業部店の貸出ポートフォリオを構成しており、営業部店としての実績管理や収益性管理が行われている。

しかしながら、このような営業部店の貸出ポートフォリオでは、営業部店が担当する業種や地域を超えて貸出を実施することはできず、信用リスク管理の本質である「与信分散」が大きく制約されることになる。

そこで、各営業部店は「貸出部門本部」から貸出資金（元は、貸出部門本部がALM部門から借り受けた内部資金）を借り受けて、取引先への貸出を実施すると同時に、「貸出部門本部」から内部取引としてCDS（Credit Default Swap）によるプロテクションを買って、信用リスクを保全するような仕組みを考える。その結果、各営業部店は信用リスク管理から解放されて、貸出の収益性管理のみを行い、信用リスク管理は「貸出部門本部」が一括して実施することになる。

CDSプレミアムを控除した営業部店の貸出の損益は次のように計算される。

$$(p_i - \bar{q}_i - m_i - c_i) \cdot X_i \quad (100)$$

但し、 p_i ：貸出利率、 \bar{q}_i ：内部資金利率、 m_i ：CDSプレミアム、 c_i ：経費率

X_i ：貸出残高

CDSプレミアムが、 $m_i = E[(1 - \theta_i) \cdot \tilde{H}_i(1)]$ で設定されていれば、上記の損益は「リスク調整後損益」（Risk

²⁶ [20] Bolance, C., Guillen, M., Gustafsson, J. and Nielsen, J. P. (2012) など参照

Adjusted Return) と呼ばれているものと一致する。²⁷

(2) トレーディング部門と金融市場別管理

銀行の行うトレーディングの対象は、外国為替、資金（金利）、債券、各種のデリバティブなど多岐に亘っている。トレーディング業務を行うトレーダーはそれぞれが得意な分野を持っていて、分野が共通するトレーダーがチームを作って業務を行う。損益管理や金融リスク管理も、チーム毎の取引分野別のポジションに対して行われることが多く、その場合にはチーム毎に（取引分野別のポジション毎に）収益目標やポジション枠が設定される。

従って、本論文で展開したトレーディング部門の管理手法は、さらに取引分野別（チーム別）の管理に分解して実施することが必要となる。具体的には、トレーディング部門のバランス・シートを取引分野別（チーム別）のバランス・シートに分解してその損益やリスクが議論できるようにし、トレーディング部門に対して配賦された自己資本 ($W_{Trade}(0)$) を取引分野別（チーム別）に再配賦して、各取引分野別（チーム別）の収益目標やポジション枠を設定するための基礎とする必要がある。

$$W_{Trade}(0) = W_{Forex}(0) + W_{Bond}(0) + W_{Money}(0) + W_{Deriv}(0) \quad (101)$$

その際には、各チームが対象とする金融取引分野毎の価格変動の連動性を如何に考慮するかが課題となる。

(3) 手数料部門と取引種類別管理

本論文分では、手数料部門を一括して「1つのモデル」で表示したが、実際には異なる構造を持った複数の手数料業務の集合体である。それぞれの手数料業務について個別に金額分布関数 $F(x)$ 、手数料率 m 、発生頻度 θ のモデル化をする必要がある。²⁸

また、手数料率 m が取引金額の水準によって異なる ($m = m(x)$) ような状況や、発生頻度 θ が金融市場の状況 (M_t) や景気サイクル (Y_t) に依存する ($\theta = \theta(M_t, Y_t)$) ような状況にも対応することが求められる。

(4) ALM部門と投資部門

ALM部門は銀行内の資金管理を総括し、「内部資金システム」運営の中核として外部資金調達を行い、銀行内の各業務部門に必要となる資金を「内部資金」として供給している。また資金余剰が生じた場合には、その余資を計画的に運用する機能も果たしている。

すでに長い期間に亘って国内の借入需要が低迷し、一方で預金は着実に積み上がって、それに伴って銀行の資金収支に大きな余剰資金が生じるようになった。それに対して銀行のALM部門では多額の国債保有や外国証券保有などの有価証券運用を行うようになった。

そのような状況の下で、このような資金運用部門をALM部門から独立させて、新たに「投資部門」として業務部門を設定することが考えられる。ALM部門から「投資部門」に供給する内部資金は、資産の投資予定期間に応じた資金とし、「投資部門」はその投資収益と内部資金利息との間の損益の獲得を目標に、収益性管理とリスク管理を行うという設定である。

²⁷ [2] 池森俊文 (2018) 参照

²⁸ [20] Bolance, C., Guillen, M., Gustafsson, J. and Nielsen, J. P. (2012), [30] Embrechts, P., Kluppelberg, C. and Mikosch, T. (1997) などが参考になる。

(5) デリバティブの信用リスクとCVAデスク

2008年金融危機の前までは、銀行間の金融取引（資金取引やデリバティブ取引）には基本的に「信用リスクが無い」としてプライシングされていたが、金融危機以降には大手銀行の金融取引にも「金融リスクが考慮される」ようになった。

一般の与信取引では、信用リスクを考慮したプライシングは、当該与信取引のキャッシュフローを「信用リスク・プレミアムを加算した金利」で割引くことで実施することができるが、デリバティブ取引では市場の状況によってその取引が与信になったり受信になったりして変化するほか、取引先毎に「ネットティング契約」を結んで、デフォルト発生時には当事者間のすべての取引の評価価値をネットティングして、その差額のみを決済することや、そのようにネットティングされた価値を日々再計算して、それに対して差し入れている担保の量を日々加減するような慣行が行われていて、信用リスク考慮のデリバティブの評価額の計算は複雑になる。

デリバティブ評価額の信用リスク考慮による修正は、その考慮する内容によってCVA (Credit Valuation Adjustment), DVA (Debt Valuation Adjustment), CCA (Collateral Cost Adjustment), FVA (Funding Valuation Adjustment) などと呼ばれ、それらを総称して「XVA問題」と呼んでいる。²⁹

銀行間のデリバティブ取引に信用リスクが考慮されるようになると、そのリスク管理を行う組織にも工夫が必要になる。例えば大手銀行では、デリバティブのキャッシュフローから信用リスクに関わる部分を抽出して、それを「CVAデスク」という組織に移転して一括管理するような方法が行われている。従来の市場部門（トレーディング部門）では、専ら市場リスクのみを管理することになる。一方の「CVAデスク」では、ネットティング契約や担保の一括管理を行うほか、デリバティブの信用リスク制御や信用リスク相当部分の損益管理などを行う。このようなCVA管理は、銀行が行うその他の金融取引の信用リスクとも関係するため、貸出部門による従来からの「信用リスク管理」との連携についても整理する必要がある。

4. 1. 3 部分管理と全体管理

本論文に於いて、各業務部門の損益プロセスをモデル化するのに、本来ならば考慮すべきリスク因子の間の相互関係（例えば、貸出部門の信用リスクやトレーディング部門の市場リスク、或いはALM部門の金利リスクなどの相互関係）を考慮することなく、各リスク因子の変動を個別にモデル化した。

期間損益の計算や収益性確保のための条件の設定については、その処理に加法性があるために問題とはならないが、各業務部門で算定したリスク量を合算する場合には加法性がなく問題が生じる。リスク合算に当ってリスク因子相互の関係を考慮しなければならないという問題である。

$$\left. \begin{aligned} \tilde{P}_{Total}[0,1] &= \tilde{P}_{Loan}[0,1] + \tilde{P}_{Trade}[0,1] + \tilde{P}_{Fee}[0,1] + \tilde{P}_{ALM}[0,1] \\ E[\tilde{P}_{Total}[0,1]] &= E[\tilde{P}_{Loan}[0,1]] + E[\tilde{P}_{Trade}[0,1]] + E[\tilde{P}_{Fee}[0,1]] + E[\tilde{P}_{ALM}[0,1]] \\ \Phi_{\alpha}[-\tilde{P}_{Total}[0,1]] &\neq \Phi_{\alpha}[-\tilde{P}_{Loan}[0,1]] + \Phi_{\alpha}[-\tilde{P}_{Trade}[0,1]] \\ &\quad + \Phi_{\alpha}[-\tilde{P}_{Fee}[0,1]] + \Phi_{\alpha}[-\tilde{P}_{ALM}[0,1]] \end{aligned} \right\} \quad (102)$$

業務部門別（或いはリスク因子別）に算定したリスク量（ $\Phi_{\alpha}[-\tilde{P}_u[0,1]] : u \in \{Loan, Trade, Fee, ALM\}$ ）を、事後的に合算する方法には次のようなものがある。³⁰

²⁹ 例えば、[41] Lu, D. (2016) 参照

³⁰ [16] Bellini, T. (2017) 参照

<トップダウン・アプローチ>

個別に計算した業務部門別（或いはリスク因子別）リスク量を便宜的に合算する方法

- ・基礎的合算（単純合算，分散共分散法，コピュラ合算³¹）
- ・トップレベル合算（条件付き確率計算の乗法法則を利用してリスク合算を行う方法）
- ・ベースレベル合算（各リスク因子に内包する経済要因を明示的に表示してリスク合算を行う方法）

<ボトムアップ・アプローチ>

2008年金融危機以降に、それまで形式的に実施されていた「ストレス・テスト」に対する批判から、実質的なストレス・シナリオの設定と、構成的なシナリオ・シミュレーションを行うようになった中で、リスク合算にあたって損益計算の枠組みに立ち返り、損失発生の可能性を基礎から積み上げる「ボトムアップ・アプローチ」が使われるようになった。

4. 2 新たな課題

金融危機が発生する前の2007年の頃には、長期間を掛けて検討・改良された「バーゼルⅡ」が実施され、また、それと併行して検討・実装されて行った銀行独自の「自主的な内部リスク管理」の成果と合わせて「リスク管理の高度化の時代」と言われた。しかし、2008年金融危機を契機に評価が一変した。巨額の損失発生を防げなかった金融機関のリスク管理や、金融取引を過度に複雑化させる一因と考えられた金融工学が批判の対象となり、銀行の経営管理手法についても様々な問題提起がなされた。

一方、高度IT・ネット社会の到来によるインターネット、電子メール、SNSなどの新しい情報手段の普及は、いわゆるビッグ・データと呼ばれる情報量の急拡大をもたらしたほか、顧客行動の変化や「新しい金融」を実施する周辺業態から金融ビジネスへの攻勢をもたらして、銀行もこれらのデータの活用や新しい金融サービスの開発が喫緊の課題となっている。

この節では、そのような新たな課題³²に対する銀行の経営管理手法の対応について概観する。

4. 2. 1 RAF (Risk Appetite Framework)

2008年金融危機までの銀行の「リスク管理」は、現在の資産・負債構成を前提に、過去の金融市場で実現した変動性に基づく形式的なリスク計量が中心で、それが必ずしも経営判断に結びつかず、また、計量が可能なリスクについてのみに詳細に算定したものであった。しかし本来「リスク管理」は、これから発生し得る将来の課題に対処することが目的であり、将来に視点を置いた（フォワード・ルッキング）、経営に直結した、より網羅的な「リスク管理」が要請されるようになった。また、それまでのリスク管理には、根底に「リスクは回避するもの」という考えがあったが、「リスクは収益の見返りであり、経営の判断として積極的・合理的にとるもの」とする考え方に変わっていった。このような枠組みは「RAF (Risk Appetite Framework)」と呼ばれている。

本論文で展開した枠組みでは、経営環境の予測に基づく将来の「金融市場シナリオ（金利・為替・株価・デフォルト率・回収率など）」と、それに基づいて立案された経営戦略を反映した「新規取引シナリオ」が、フォワード・ルッキングに対応するものとなる。この2つの将来シナリオ（「金融市場シナリオ」及び「新規取引シナリオ」）に従って計算された結果が期待値であり、そこからの乖離がリスクである。

³¹ [29] Durante, F. and Sempì, C. (2016) など参照

³² [8] 教学協働プログラム・金融作業グループ (2017) 参照

従来のリスク管理では、各種リスク因子を独立に変動させて、事後的にそれらを合算することが多かった。それに対して、しっかりしたマクロ経済予測をベースに、相互に整合性のあるシナリオ設定と経営戦略の立案を行い、リスクはそれに対する予測誤差やシナリオのシフト、エマージング・ファクター（Emerging Factors）と呼ばれる新規要因の発生によって生じる、としてリスク管理を構成するという考え方である。

このような構成を行うとすれば、マクロ経済モデルが重要な役割を果たすことになる。いわゆるマクロ経済学と金融工学の融合であるが、現状のマクロ経済モデルについては、平常時とストレス時を同時に記述することの難しさや金融セクター充実の必要性などの問題点が指摘されて³³、今後に向けての課題となっている。

4. 2. 2 通常時の管理とストレス時の管理

一般に金融リスク管理には、1. 損失発生時の処理能力の管理と、2. 抱えたリスクに見合った収益性確保の管理という2つの視点があるが、金融リスク管理を促進した金融監督当局の影響もあり、銀行の金融リスク管理では1番目の視点を中心で、2番目の視点は長い間軽視されていた。

しかし、2008年金融危機以降の規制の強化、先進諸国における世界的な低金利化、銀行業務の益々のグローバル化、高度IT・ネット社会への対応などで銀行の収益性は低下しており、この2番目の視点は今後に向けて重要性を増している。

通常時の経営管理では、まずは2番目の「収益性の確保」が重点事項になるべきであり、そのためには、より精度の高い管理会計の構築が不可欠である。本論文の組み立てとの関係では、業務部門別の収益性制御の実施に耐えられるような管理会計の構築が必要となる。

一方でストレス状況においては、1番目の「損失発生に対する対応」が重要事項となる。まさに銀行経営を継続させることができるか、あるいは金融システムへの影響を低く抑えながら銀行業務の一部（または全部）を清算すべきか、という「リカバリー・レゾリューション（Recovery or Resolution）」の判断を迫られることになる。

このようなストレス状況におけるアクション・プランを考える際には、時間軸を持ったシミュレーション・モデルの実装が必要になる。ストレス・シナリオに対する単なる「what-if分析」ではなく、どのタイミングでどのような状況が発生し、それに対するアクション・プランの効果がどのように顕現化するのかを理解することが重要になる。

また、ストレス状況における管理では、損益悪化へのインパクトだけでなく、本論文では取り上げていない資金繰り悪化に対する管理（流動性リスク管理）が重要となる。

どのようなストレス・シナリオを想定するか、という課題と共に、ストレス・テストを実行するためのこれらのインフラ構築が重要となっている。

4. 2. 3 金融市場レベルの管理

これまでの銀行のリスク管理の考え方は「各銀行がそれぞれにリスク管理をやることによって、金融システムが保全される」というものであった。しかし、システムック・リスクの発生や金融市場の機能不全、金融規制の強化が各金融機関のリスク行動に与える影響、SNS等を通じた顧客の集団行動の発生等による取引件数の急増やコア預金モデルの破綻など、個別銀行レベルでは対処できない「金融市場レベルのリスク」が認識されるようになり、

³³ [18] Blanchard, O. (2014) 参照

それを分析・管理するためのインフラや手法が議論されている。³⁴

金融への数理手法の適用範囲が、キャッシュ・フローの集合としての金融取引から金融取引の集合としての金融機関経営・投資ポートフォリオ運営へ、そして金融機関・投資家等の集合としての金融市場（金融システム）へと階層拡大している状況である。

実体経済への影響が甚大となる「金融市場のクラッシュ」を事前に察知できるような分析手法の開発やそのためのデータ・ベースの構築は、今後に向けての金融の重要な課題の一つである。³⁵

4. 2. 4 新たな経営環境への挑戦

2008年金融危機以降、それまでの大手金融機関同士の取引には考慮されなかった信用リスクが取引条件に反映されるようになり（「too big to fail」という考え方の修正）、店頭取引として行う金利スワップやCDS（Credit Default Swap）のような標準的なデリバティブは中央清算機関を介して決済することが義務付けられた。また、金融危機時およびその後に、大きく低下した市場流動性や世界的な景気後退への対応策として実施された先進諸国の金融緩和策、それによって発生した金利低下やゼロ金利（マイナス金利）³⁶など、金融市場で起こった新たな経営環境への対応が必要となった。また、金融危機の発生を契機に、それまでの金融自由化から一転して、再度金融規制の強化が図られて³⁷、銀行はそれに対する技術的・組織的な体制の整備が求められた。

一方で伝統的な銀行業は、高度IT・ネット社会の到来による新しい情報手段（インターネット、電子メール、SNSなど）の普及と、それに伴う顧客行動の変化、それに順応した「新たな金融」を実施する周辺産業からの攻勢などの経営環境変化に晒されている。コンビニエンス業界によるコンビニATM・コンビニ決済、リテール業界によるネット販売とその決済の多様化や、電子マネー・消費ポイントによる消費と資金フローの囲い込み、ネット銀行・ネット証券による低コスト・好条件の金融商品の提供などが拡大しつつある。

インターネットやモバイル端末を通じた金融取引を実施するには、個人認証や取引保護のための技術（暗号理論）や、分散型帳簿のための技術（ブロック・チェーン）³⁸などへの取り組みが新たに必要になっている。

また、いわゆるビッグ・データの時代に、広範囲のデータを使用したマーケティングや新金融サービスの開発、市場動向や顧客動向の把握、信用判定などのリスク分析、自らの業務内容の分析・評価などの手法開発・改善が求められている。

このような新しい経営環境への対応に当たっては、「通貨」³⁹や「決済」の具備すべき機能、「与信取引・受信取引」の満たすべき基本要件、「預金」の果たすべき役割など、自らが果たしてきた金融機能の本質とそれを実施するためのコスト・採算性について、改めて検証をする必要がある。⁴⁰

4. 3 保険会社ERM（Enterprise Risk Management）との関係

本論文では、銀行の経営管理手法を構成するための数理的枠組みについて展開したが、保険会社についても会計基準やソルベンシーマージン規制などによって包括的なリスク管理の枠組み（ERM）が導入されている。

³⁴ [6] 加藤 恭・山中 卓 (2014), [25] Darolles, S. and Gouriéroux, C. (2015), [27] Diebold, F. X. and Yilmaz, K. (2015), [43] Mantegna, R. N. and Stanley, H. E. (2000), [47] Purica, I. (2015) などを参照

³⁵ [21] Buchanan, M. (2013) 参照

³⁶ [32] Gollier, C. (2001) にゼロ金利・マイナス金利発生メカニズムについての記述がある。

³⁷ [46] Ozdemir, B. and Miu, P. [2012] 参照

³⁸ [52] Wattenhofer, R. (2016) 参照

³⁹ [31] Franco, P. (2015) 参照

⁴⁰ [24] Crane, D. B. et al. (1995) 参照

[9] 田中周二 (2018) によると、「・・・生命保険会社についていえば、1990 年代まではリスク管理はALM (Asset-Liability Management ; 資産負債管理) が主流であった。・・・これが、2000 年代になると、より包括的にリスク管理を行うことの必要性が高まってきた。・・・COSO⁴¹の枠組みでは、ERMはリスクを忌避するものではなく、積極的に管理するもので、リスクに対する方針を決めて体系的に取り組む対象として提示した・・・もう一つのERMの特徴は、個々のリスクではなくリスクのある事業ポートフォリオとしてリスクを捉える点である。・・・」と述べられている。

このような保険会社ERM導入⁴²は、本論文において展開した銀行の経営管理手法の目的と合致するものであると言える。特に類似点としては、以下のような点が挙げられる。

- (1) (流動性リスクではなく) 収益性リスクが対象であること
 - (2) 保険会社が抱える収益性リスク (ソルベンシー) を包括的に捉えようとしていること
- 一方で、本論文において展開した銀行の経営管理手法との相違点としては以下のような点が挙げられる。
- (3) 保険会社の場合には、重要な対象リスクとして「保険引受リスク」が含まれること
 - (4) 本論文の収益性・リスク認識が原則実現損益ベースであるのに対して、保険会社ERMでは経済価値ベースで組立てられていること
 - (5) 本論文の経営管理手法では、収益性およびリスクの計量とともに、収益性確保のための制御手法、経営破綻回避のためのリスク制御手法の導入を重要な目的としていること

銀行の経営管理手法の再構成に当っては、今後も機会を捉えて「保険会社ERM」との間で情報交換を行って、相互の理解を深めて行くべきであろうと考える。

⁴¹ Committee of Sponsoring Organization of Treadway Commission が事業リスクマネジメントについての報告書を公表

⁴² [14] 米山高生・酒井重人 (2015) も参照

【補遺 1】 与信上限が設定された貸出ポートフォリオの貸倒損失額

貸出ポートフォリオの構成を表すベクトル $X = (X_1, \dots, X_n)$ が、下記の領域 Ω を動くとき、

$$\Omega = \{(X_1, \dots, X_n) \in R^n; 0 \leq X_i \leq M, \sum_{i=1}^n X_i = X_{Total}\}$$

但し、 $M < X_{Total} < n \cdot M$

次の関数 $f(X)$ を最大にする点は、

$$f(X) = a \cdot \sum_{i=1}^n X_i^2, \quad a = \lambda \cdot (1 - \lambda) \cdot (1 - \theta)^2$$

X_1, \dots, X_n の順序を入れ替えれば、例えば以下のような点で実現される。

$$\left(\underbrace{M, \dots, M}_{\left\lfloor \frac{X_{Total}}{M} \right\rfloor \text{ 個}}, X_{Total} - M \cdot \left\lfloor \frac{X_{Total}}{M} \right\rfloor, 0, \dots, 0 \right)$$

(証明)

数学的帰納法によって証明する。

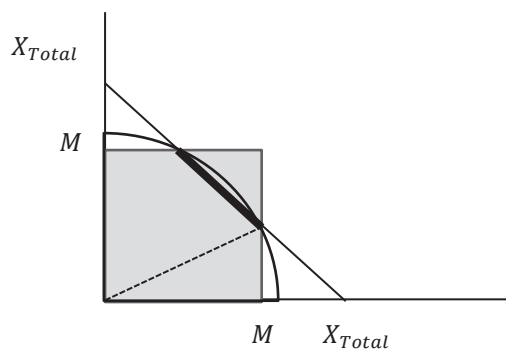
1. $n = 2$ の場合には成立する

$n = 2$ の場合には、最大化する関数は $f(X) = a \cdot (X_1^2 + X_2^2)$ であり、これは2次元平面の領域、

$$\Omega = \{(X_1, X_2) \in R^2; 0 \leq X_i \leq M, \sum_{i=1}^2 X_i = X_{Total}\}$$

において、円の半径 ($r: r^2 = X_1^2 + X_2^2$) が最大になるような点をとるという問題である。

制約された領域は、下記の太線部分であり



関数 $f(X) = a \cdot (X_1^2 + X_2^2)$ の最大値 (従って、円 ($X_1^2 + X_2^2 = r^2$) の最大の半径 (r)) は、

$$(X_1, X_2) = (M, X_{Total} - M), \text{ または } (X_1, X_2) = (X_{Total} - M, M)$$

で実現することが判る。

2. $n - 1$ について成立すれば、 n でも成立する

A. 最大値を実現する点 $X = (X_1, \dots, X_n)$ において、 $X_i (i = 1, \dots, n)$ のうちの1つでも

$X_i = 0$ 、または $X_i = M$ となる点があれば、(例えば、 $X_1 = 0$ または $X_1 = M$ と仮定)、

これ以外の $n-1$ の X_i について,

$$\begin{aligned} X_{Total} &= X_2 + \cdots + X_n \quad (X_1 = 0 \text{ の場合}), \text{ または,} \\ X_{Total} - M &= X_2 + \cdots + X_n \quad (X_1 = M \text{ の場合}) \end{aligned}$$

となる.

それぞれの場合に, 帰納法の仮定によって,

$$\begin{aligned} (X_1 = 0 \text{ の場合}) \quad X_2 + \cdots + X_n &= X_{Total} \\ (X_2, \dots, X_n) &= (M, \dots, M, X_{Total} - M \cdot \left\lfloor \frac{X_{Total}}{M} \right\rfloor, 0, \dots, 0), \quad \text{従って,} \\ (X_1, X_2, \dots, X_n) &= (0, M, \dots, M, X_{Total} - M \cdot \left\lfloor \frac{X_{Total}}{M} \right\rfloor, 0, \dots, 0) \end{aligned}$$

と表すことができる.

$$\begin{aligned} (X_1 = M \text{ の場合}) \quad X_2 + \cdots + X_n &= X_{Total} - M \\ (X_2, \dots, X_n) &= (M, \dots, M, X_{Total} - M - M \cdot \left\lfloor \frac{X_{Total} - M}{M} \right\rfloor, 0, \dots, 0), \quad \text{従って,} \\ (X_1, X_2, \dots, X_n) &= (M, M, \dots, M, X_{Total} - M \cdot \left\lfloor \frac{X_{Total}}{M} \right\rfloor, 0, \dots, 0) \end{aligned}$$

と表わすことができ,

いずれの場合にも n でも成立することが判る.

B. もしも, 最大値を実現する点 $X = (X_1, \dots, X_n)$ が, すべての $X_i (i = 1, \dots, n)$ について,

$$0 < X_i < M$$

とすれば, 領域 Ω の内点で実現することになるが, その場合には矛盾が生じることを示す.

最大化する関数 $f(X)$ に対して, 変数 $X = (X_1, \dots, X_n)$ に微小な変化 $dX = (h_1, \dots, h_n)$ を加えると.

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) \cdot (h_1, \dots, h_n)^T = 2 \cdot (X_1, \dots, X_n) \cdot (h_1, \dots, h_n)^T$$

となる. 従って, $(h_1, \dots, h_n) = (X_1, \dots, X_n) \cdot \epsilon$ の方向に微小変化させれば, 関数 $f(X)$ は増加する.

この方向を領域 Ω の法線方向とそれに直交する方向に分解すると,

$$(X_1, \dots, X_n) \cdot \epsilon = \frac{X_{Total}}{n} \cdot (1, \dots, 1) \cdot \epsilon + \left(X_1 - \frac{X_{Total}}{n}, \dots, X_n - \frac{X_{Total}}{n} \right) \cdot \epsilon$$

右辺の第2項を領域 Ω の内点 $X = (X_1, \dots, X_n)$ に加えた点も, ϵ を小さくとれば領域 Ω 内にとどめることができる. ($(X_1, \dots, X_n) + (h_1, \dots, h_n) \in \Omega$)

$$(h_1, \dots, h_n) = \left(X_1 - \frac{X_{Total}}{n}, \dots, X_n - \frac{X_{Total}}{n} \right) \cdot \epsilon$$

このとき,

$$\begin{aligned} df &= 2 \cdot (X_1, \dots, X_n) \cdot \left(X_1 - \frac{X_{Total}}{n}, \dots, X_n - \frac{X_{Total}}{n} \right)^T \cdot \epsilon \\ &= 2 \cdot \epsilon \cdot \left(\sum_{i=1}^n X_i^2 - \frac{X_{Total}^2}{n} \right) \\ &= 2 \cdot \epsilon \cdot \left(\sum_{i=1}^n \left(X_i - \frac{X_{Total}}{n} \right)^2 + \frac{1}{n} \cdot \left(1 - \frac{1}{n} \right) \cdot X_{Total}^2 \right) > 0 \end{aligned}$$

となつて, 領域 Ω 内で関数値を増加させることができ, $X = (X_1, \dots, X_n)$ が最大値を実現する点であるという仮定に反する. よつて, $X = (X_1, \dots, X_n)$ が領域 Ω の内点であるというB. の場合は起こりえず, A. の場合のみが起こつて, 【補遺1】の主張が成り立つことが判る.

【補遺2】ALM部門の損益プロセスの積分領域における積分順序の入れ替え

(93)式において、金利シナリオからの乖離 ($d\tilde{r}(s) = \sigma \cdot d\tilde{z}(s)$) を代入した後に、積分区間を次のように組み替えて計算する。

$$\begin{aligned}
 V[-\tilde{G}_{ALM}] &= E \left[\left(\int_0^1 \left[\int_0^t GAP(s, t-s) \cdot \sigma \cdot d\tilde{z}(s) \right] \cdot dt \right)^2 \right] \\
 &= E \left[\left(\int_0^1 d\tilde{z}(s) \int_s^1 GAP(s, t-s) \cdot \sigma \cdot dt \right)^2 \right]
 \end{aligned}$$

(解説)

上式において、 $0 \leq s \leq t \leq 1$ であるから、変数 (s, t) の積分領域は以下のような三角形である。

第1行においては、まず

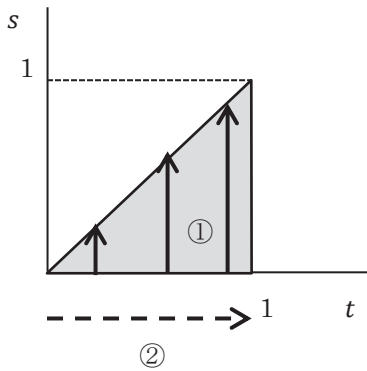
- ① $0 \leq s \leq t$ について s の積分をして、次に、
- ② $0 \leq t \leq 1$ について t の積分をすることを表している。

それを第2行においては、まず、

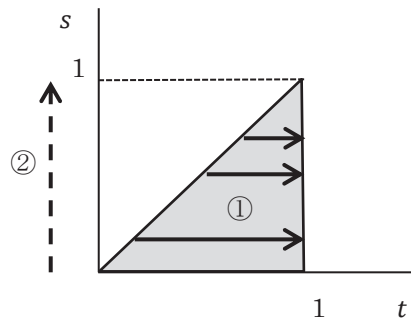
- ① $s \leq t \leq 1$ について t の積分をして、次に、
- ② $0 \leq s \leq 1$ について s の積分をするように、

計算する順序を入れ替えたものである。

(第1行の計算)



(第2行の計算)



【参考文献】

(日本語文献)

- [1] 五十嵐文雄 (2016), 「欧米における FinTech への対応と日本への示唆」, 『証券アナリストジャーナル』, 第54巻 第6号, 29-38
- [2] 池森俊文 (2013), 『金融リスク制御』, 一橋大学大学院商学研究科講義資料
- [3] 池森俊文 (2015), 『金融イノベーションの歴史と理論』, 一橋大学商学部講義資料
- [4] 池森俊文 (2018), 『銀行経営のための数理的枠組み: 金融リスクの制御』, プログレス
- [5] 大垣尚司 (1997), 『ストラクチャード・ファイナンス入門』, 日本経済新聞社
- [6] 加藤 恭・山中 卓 (2014), 「システミックリスクに纏わる数理モデルについて」, 『日本応用数理学会論文誌』, Vol. 24, No.4, 397-443
- [7] 小谷眞一・俣野 博 (1998) 『微分方程式と固有関数展開』, 岩波講座現代数学の基礎 14, 岩波書店
- [8] 数学協働プログラム・金融作業グループ (2017) 『金融数理の「これまで」と「これから」』
- [9] 高野 靖・羽柴次郎 (2008), “A Novel Methodology for Credit Portfolio Analysis: Numerical Approximation Approach”, Mizuho-DL Financial Technology
- [10] 田中周二 (2018), 『保険リスクマネジメント』, 日本評論社
- [11] 西田真二 (1995), 『ALM手法の新展開』, 日本経済新聞社
- [12] 宮内淳至 (2015), 『金融危機とバーゼル規制の経済学』, 勁草書房
- [13] 吉藤 茂 (2005), 『金融工学とリスクマネジメント』, 金融財政事情研究会
- [14] 米山高生・酒井重人 (2015), 『保険ERM戦略: リスク分散への挑戦』, 保険毎日新聞社

(外国語文献)

- [15] Ammann, M. (1999), *Pricing Derivative Credit Risk*, Springer
- [16] Bellini, T. (2017), *Stress Testing and Risk Integration in Banks*, Academic Press
- [17] Bjork, T. (1998), *Arbitrage Theory in Continuous Time*, Oxford University Press
- [18] Blanchard, O. (2014), “How the crisis changed macroeconomics”, World Economic Forum
- [19] Bol, G. et al (Eds.) (2003), *Credit Risk : Management, Evaluation and Management*, Physica-Verlag
- [20] Bolance, C., Guillen, M., Gustafsson, J. and Nielsen, J. P. (2012), *Quantitative Operational Risk Models*, CRC Press, Taylor & Francis Group
- [21] Buchanan, M. (2013), *Forecast: What Physics, Meteorology, and the Natural Sciences Can Teach Us About Economics*, (邦訳『金融市場は物理法則で動く』, 熊谷玲美訳, 白揚社)
- [22] Carr, P. and Yu, J. (2012), “Risk, return, and Ross recovery”, *The Journal of Derivatives*, 20, 38-59
- [23] Cochrane, J. H. (2001), *Asset Pricing*, Princeton University Press
- [24] Crane, D. B., Merton, R. C., Froot, K. A., Bodie, A., Mason, S. P., Sirri, E. R., Perold, A. ,F. and Tufano, P. (1995), *The Global Financial System*, Harvard Business School Press University Press
(“金融の本質” 野村総合研究所訳, 野村総合研究所)
- [25] Darolles, S. and Gouriéroux, C. (2015), *Contagion Phenomena with Applications in Finance*, ISTE Press Ltd
- [26] Dickson, D. C. M. (2005), *Insurance Risk and Ruin*, Cambridge University Press

- [27] Diebold, F. X. and Yilmaz, K. (2015), *Financial and Macroeconomic Connectedness*, Oxford University Press
- [28] Duffie, D. (1992), *Dynamic Asset Pricing Theory*, Princeton University Press
- [29] Durante, F. and Sempì, C. (2016), *Principles of Copula Theory*, CRC Press
- [30] Embrechts, P., Kluppelberg, C. and Mikosch, T. (1997), *Modelling Extremal Events*, Springer
- [31] Franco, P. (2015), *Understanding Bitcoin*, John Wiley & Sons Ltd.
- [32] Gollier, C. (2001), *The Economics of Risk and Time*, MIT Press
- [33] Grbac, Z. and Runggaldier W. J. (2015), *Interest Rate Modeling: Post-Crisis Challenges and Approaches*, Springer
- [34] Gundlach M. and Lehrbass, F. (Eds.) [2004] *CreditRisk+ in the Banking Industry*, Springer
- [35] Harrison, J. M. (1985), *Brownian Motion and Stochastic Flow System*, John Wiley & Sons, Inc.
- [36] Hibbeln, M. [2010], *Risk Management in Credit Portfolios : Concentration Risk and Basel II*, Physica-Verlag
- [37] Ingersoll, Jr. J. F. (1987), *Theory of Financial Decision Making*, Rowman & Littlefield Publishers
- [38] Jones, P. W. and Smith, P. (2001), *Stochastic Processes An introduction*, ARNOLD
- [39] Karatzas, I. (1991), *Lectures on the Mathematics of Finance*, American Mathematical Society
- [40] Kuhn, J. (2006), *Optimal Risk-Return Trade-Offs of Commercial Banks : and the Suitability of Profitability Measures for Loan Portfolios*, Springer
- [41] Lu, D. (2016), *The XVA of Financial Derivatives: CVA, DVA and FVA Explained*, Palgrave Macmillan
- [42] Lutkebohmert, E. (2009), *Concentration Risk in Credit Portfolios*, Springer
- [43] Mantegna, R. N. and Stanley, H. E. (2000), *An Introduction to Econophysics*, Cambridge University Press
- [44] McNeil, A. J., Frey, R. and Embrechts, P. (2005), *Quantitative Risk Management*, Princeton University Press
- [45] Olsson, O. (2012), *Essentials of Advanced Macroeconomic Theory*, Routledge
- [46] Ozdemir, B. and Miu, P. [2012] *Adapting to Basel III and the Financial Crisis*, Risk Books
- [47] Purica, I. (2015), *Nonlinear Dynamics of Financial Crises*, Academic Press
- [48] Rebonato, R., McKay, K. and White, R. (2009), *The SABR/Libor Market Model*, John Wiley & Sons Ltd.
- [49] Ross, S. (2011), “*The recovery theorem*”, working paper
- [50] Tache, D. (1999), “*Risk Contribution and Performance Measurement*”, working paper
- [51] Tsui, H. M. (2013), “*Ross Recovery Theorem and its extension*”, University of Oxford, working paper
- [52] Wattenhofer, R. (2016), *The Science of the Blockchain*, Inverted Forest Publishing