



## 保険数理と統計的方法

清水泰隆著, 共立出版, 2018年10月

384pp, 価格 4,600円 (税抜価格), ISBN 9784320113510

慶應義塾大学理工学部数理科学科  
白石 博

本書は保険数理（とりわけ損害保険数理）の中心的分野の1つであるリスク理論について、本書のタイトルにもあるように、統計的に定量化する方法を議論している。前半では、リスク理論を展開する上で必要となる測度論的な確率論の基礎知識を紹介し、リスク尺度、極値理論などの道具を用いて、保険リスクをモデルから定量化するための方法、およびこの保険リスクを観測データから統計的に推定する方法を議論している。後半では、リスク理論の中でも破産理論に焦点を絞った議論を展開している。まず、資産過程のモデリングに必要な確率過程の基礎知識を紹介した上で、Cramer-Lundberg モデルに対する破産確率などの古典的破産理論を紹介し、さらには、資産過程を Levy 保険リスクモデルに拡張し、破産確率を Gerber-Shiu 関数に拡張した現代的破産理論を展開している。本書の内容は保険数理の中でも損害保険数理に分類され、この分野に関する和書もいくつか存在する（例えば、日本アクチュアリー会、2011 など）が、次の点で本書は他の和書に無い（洋書を含めても数少ない）特徴的な書籍といえる。まず、第1の特徴として、本書は保険数理を研究するための視点に立って記述されているという点にある。和書で保険数理の本はいくつか出版されているが、その多くがアクチュアリー試験に必要な知識の提供という視点で記述されていると思われる。本書は著者が行ってきた研究内容に結びつけるための基礎知識が網羅されており、『保険数理研究の入り口』となる書籍として位置づけられている。第2の特徴として、保険数理を統計的推測論と結び付けている点である。評者が知る限り、洋書も含めて、保険リスクの統計的推測論を記述している書籍はほとんど無いと思われる。本書 4.3 節の複合的保険リスクの推定、6.6 節の破産確率の推定では標本からある興味のある量を統計的に推定することを目的としており、確率論から発展した従来の保険数理では盛んには研究されていなかった分野の内容である。データサイエンスの発展に伴い、近年、保険数理においても統計科学を用いたアプローチが重要視されており、保険リスクの統計的推測論は今後ますます発展すると思われる。第3の特徴として、本書がいくつかの専門分野の内容を（数学的厳密性を担保した上で出来る限り簡潔に）保険数理に結び付けている点である。保険数理の研究を行うためにはいくつかの専門分野の知識を横断的に有する必要があるが、そのことを本書で『なるべく最短な経路で』記述することを目指している。確率論、極値理論、統計的推測論、破産理論、リスク尺度など、本来であれば複数の書籍で学ぶ必要がある内容を保険数理に直結する部分を抜粋して記載されている。

本章の構成は次のようになっている。第1章で確率論の基本事項、第2・3章で保険

会社のリスク管理に必要となる保険料の計算原理とソルベンシー・リスク評価方法を紹介し、第4章で保険リスクの統計的推測方法を議論している。また、第5章で確率過程の基本事項を紹介し、第6・7章でそれぞれ古典的・現代的破産理論を展開している。保険数理の研究を目指す読者がスムーズにこの分野に参入できるよう配慮されている。保険数理に関する内容を研究テーマとして検討している大学生・大学院生だけでなく、専門分野は保険数理ではないが保険数理に興味をもっている研究者、アクチュアリー試験を終えたが保険数理に対する継続的な研究に興味がある金融・保険業界で活躍している社会人などにも読んでもらえるよう配慮されている。ただし、複数の分野の理論が横断的に紹介されているため、理解するのが困難な理論が読者によってはあるかもしれない。その際には、付録や参考文献等で補完する必要がある。

以下に各章の要約を示す。

第1章では、確率論の基本事項として、確率空間や（条件付き）期待値、各種の収束の定義など、現代的リスク理論を理解するために必須となる測度論に基づく確率論の基礎概念を紹介している。まず、可測空間およびこの空間上で定義される確率変数を定義している。次に、いくつかの確率変数の分布を紹介し、確率変数の期待値をStieltjes積分を用いて定義している。保険数理では、離散型と連続型の混合分布にしたがう確率変数を扱うことがあり、このような場合でもStieltjes積分により統一的に議論できる。また、Laplace変換、畳み込み、条件付き期待値など、保険数理の理論を展開する上では必要不可欠な数学的道具を紹介している。最後に、漸近理論を展開するために必要となる各種の収束の定義と、関連する極限定理を紹介している。

第2章では、まず、保険契約の集合（保険ポートフォリオ）の損益構造を数学的に記述した保険リスクモデルを定義する。このモデルは第6章のCramer-Lundbergモデルや、第7章のLevy保険リスクモデルを含む本書の中心的モデルである。次に、保険料を決定する際に基準となる原理・原則を紹介し、実際に保険料計算に必要となる“保険リスク”のモーメント計算法を紹介している。

第3章は、本書の前半の山場であり、“保険リスク”に対するいくつかのリスク尺度の定義を紹介し、保険事業で想定される大規模災害および小規模災害の下でのリスク評価方法を紹介している。まず、保険リスクに対する基本的なリスク尺度であるVaR、TVaR、CTE、ESなどの定義および性質を紹介する。次に、『ごく稀に起こる大事故や大災害によって発生しうる極端に大きい額の支払い』に対する保険リスクを評価する場合を議論する。このような大規模災害に関する保険リスクの分布には“裾の重い分布”といわれる分布族が想定される。この分布族に含まれるいくつかの分布を紹介し、これらの分布(族)の持ついくつかの性質を紹介している。次に、小規模災害・大規模災害のそれぞれケースでVaRなどのリスク尺度の計算方法を紹介している。ここで、一般にはリスク尺度は明示的に計算することはできない。したがって、極値理論を用いて分布の裾の漸近挙動に注目し、近似的なリスク評価を行っている。最後に、複数のリスク尺度の優劣を定めるための、リスク尺度が持つことが望ましいいくつかの性質を紹介し、望ましい条件を

みたすリスク尺度として整合的リスク尺度を紹介している。

第4章では、統計的推測論の基礎概念である一致性や漸近正規性などの推定量の漸近的性質や、最尤法やZ-推定法などの推定法とその性質を紹介した後、前章で紹介した保険リスク（ここでは、一定期間に請求されるクレームの累積をリスクとする複合的保険リスクを考える）に対するVaRの統計的推定方法を裾の軽いクレーム分布の場合と、裾の重いクレーム分布の場合に分けて議論している。各ケースにおけるVaRの推定量を提案するとともに、その推定量の漸近的性質も紹介している。なお、保険クレームのような裾の重い分布の場合、経験分布を用いた推定量に問題があることがあり、そのような問題への対処法も提案している。

第5章では、第6章および第7章で紹介する破産理論についての基礎知識として、確率過程の基礎概念を紹介している。特に、第6章で紹介するCramer-Lundbergモデル（以下、CLモデルとよぶ）は複合Poisson過程とよばれる確率過程のクラスであり、第7章で紹介するLevy保険リスクはLevy過程とよばれる確率過程のクラスである。第5章では、さまざまな確率過程のクラス（Poisson過程、複合Poisson過程、Brown運動、Levy過程）の定義およびそれら確率過程の持つ性質を紹介している。

第6章は、古典的破産理論として、CLモデルの破産確率について議論している。破産理論が不完全再生方程式とよばれる方程式をみたすことを用いて破産確率の明示的表現を導出している。また、CLモデルの拡張として拡散摂動モデルを紹介し、破産確率の導出方法を紹介している。さらに、有限時間の破産確率の議論や、破産確率を利用した再保険戦略の議論を行っている。加えて、本章の最後に、破産確率の統計的推定問題について、パラメトリックな手法とノンパラメトリックな手法のそれぞれで推定方法を紹介している。

第7章は、現代的破産理論として、破産確率を拡張したGerber-Shiu関数についての分析（以下、Gerber-Shiu解析とよぶ）についての議論をしている。Gerber-Shiu関数とは、保険会社が破産する直前の資産額と破産時損害額に依存したある関数の期待現在価値であり、破産確率やVaRなどを表現することができる。本章では、CLモデルにおけるGerber-Shiu関数の導出方法を紹介した後、保険会社の資産モデルが、CLモデルや拡散摂動モデルを含むLevy保険リスクモデルにしたがう場合のGerber-Shiu関数の導出方法を紹介している。また、Gerber-Shiu解析の応用として、配当戦略や資本注入などを紹介している。

付録として、測度と期待値、再生理論、確率過程の分布収束に関するいくつかの補足事項が紹介されている。非専門家であっても、補足事項（および必要であれば参考文献）を適宜参照することで、本書で紹介されている内容が理解しやすくなると思われる。

まえがきに『海外の大学、とりわけ中国やヨーロッパ・北米の大学に目を向けてみると、そこには保険数理学科（Department of Actuarial Science）が存在し、古くからリスク理論を中心とした学術的研究が重視され、それらの実質的な応用方法を教育し、多くの博士号取得者を輩出している。（中略）一方、日本に目を戻すと、保険数理を専門とする研究

者は極めて少なく、保険数理について十分な教育がなされているとはいえない。』とある。この点は評者も強く同意する。評者の研究室にもアクチュアリーを志望する学生は毎年現れるが、これらの学生は、アクチュアリー試験への合格が保険会社への入社へのインセンティブになることを意識しており、(まるで国家資格のように)アクチュアリー試験に合格するために保険数理を勉強している。アクチュアリー試験に合格するための保険数理の“勉強”と中国や欧米で実践されている産学連携による保険数理の“学術研究”は全く別であり、現在における日本国内の保険数理に対する“学術研究”の軽視志向からの脱却が無い限り、学術研究分野としての保険数理学は中国・欧米と肩を並べる段階には至らないと評者は(おそらく著者も)危惧している。評者が知る限り、この“学術研究”としての保険数理を知るための和書は現時点では本書以外には無く、保険数理を研究するための主な専門知識は本書でほとんど得られると思われる。周辺分野を研究している研究者・保険数理に学問として興味を持っている学生・アクチュアリー試験を終え、保険数理に対する継続的な研究に興味がある社会人には、是非本書を通読することをお勧めする。これにより、日本における『保険数理の研究人口』が増加することを著者とともに評者も期待する。

なお、著者のホームページにおいて、本書の正誤表が掲載されているので合わせてご覧頂きたい (<http://www.shimizu.sci.waseda.ac.jp/files/hoken-tokei.pdf>)。

## 参考文献

日本アクチュアリー会 (2011). 『損保数理』, 公益社団法人 日本アクチュアリー会.