

研究論文

多期間最適資産形成モデル — 実践的なモデルへの拡張 —

枇々木 規雄^{*}, 小守林 克哉[†]

2006年4月14日投稿

2006年8月28日受理

Abstract

本論文では、個人顧客へのファイナンシャル・コンサルティングを行うために、世帯の属性やライフサイクルを考慮した最適な投資戦略や生命保険、損害保険の加入保険金額を決定するための多期間最適化モデルの構築を行う。より実践的なモデルを構築するために、世帯主が死亡した場合の①遺族年金の受け取り、②住宅ローンの返済免除、③生活レベルの変更、の3点を加えたモデル化の方法を示し、これらの要因の効果を数値計算によって検証する。さらに、世帯主の死亡の有無による条件付き意思決定を組み込んだシミュレーション型モデルも提案し、通常のシミュレーション型モデルとの比較も数値計算を用いて行う。また、住宅購入に関するパラメータを変更したときの影響を調べる(感度分析を行う)ことによって、住宅購入戦略に関する分析を行う。さらに、計算の高速化のためのグループ・パスを用いたモデルの定式化と数値分析の結果を示す。

キーワード：多期間最適化、資産形成、最適投資戦略、生命保険、住宅購入戦略

1 はじめに

近年、金融機関は顧客サービスの一環として、個人または世帯が保有する資産について、どのような金融商品を購入し、将来に向けて有効活用するかのアドバイスを行うファイナンシャル・コンサルティング機能の強化に努めている。具体的には、個人または世帯は、生活を行う上でインフレに伴う実質資産価値の減少リスク、世帯主の死亡に伴う収入減少リスク、住宅の火災などに伴う損失リスクなどにさらされている。これらの様々なリスクを回避し、将来の心配をできるだけ取り除き、安定的に資産形成を行うための金融商品の提案を行うことが不可欠である。

個人の最適な投資戦略については、Samuelson(1969), Merton(1969), Merton(1971), Bodie, Merton and Samuelson(1992)など学術的にも古くから研究が進められている。Chen, Ibbotson, Milevsky and Zhu(2005)は、資産配分に加えて、賃金収入、消費支出、生命保険を含む最適化モデルを提唱している。実証研究ではBodie and Crane(1997)、多期間最適化手法を用いたモデルとしては、吉田、山田、枇々木(2002)、枇々木、小守林、豊田(2005)がある。枇々木、小守林、豊田(2005)は世帯の属性やライフサイクルを考慮した最適な投資戦略や生命保険、損害保険の加入保険金額を決定するために、多期間最適化モデルの構築を行っている。数値計算によって最適戦略の特徴を考察するとともに、3つのケース世帯に対して、ファイナンシャル・コンサルティングの事例を示し、現実的な感覚とも一致する結果が得られている。

^{*}慶應義塾大学 理工学部 管理工学科, 〒223-8522 横浜市港北区日吉3-14-1, E-mail: hibiki@ae.keio.ac.jp

[†]財団法人 金融情報システムセンター, E-mail: komoribayasi@fisc.or.jp

本論文では、より実践的なモデルを構築するために、枇々木、小守林、豊田(2005)を拡張して、世帯主が死亡した場合の①遺族年金の受け取り、②住宅ローンの返済免除、③生活レベルの変更、の3点を加えたモデル化の方法を示す。世帯主の死亡リスクは生命保険でリスクヘッジを行っているが、これらの要因を考慮することによる効果を数値計算によって検証する。さらに、世帯主の死亡の有無による条件付き意思決定を組み込んだシミュレーション型モデルも提案し、通常のシミュレーション型モデルとの比較も数値計算を用いて行う。

また、本論文では、住宅購入時点、頭金、住宅ローン借入期間、ローン金利など住宅購入に関するパラメータを所与としている。これらの条件を変更したときの影響を調べることによって、住宅購入戦略に関する分析を行う。

上記の分析に際し、計画期間が長い場合、問題の規模が大きくなり、多くの計算時間を要する。たとえば、30歳の世帯主が60歳で定年退職する場合を考えよう。この場合、1年ごとにリバランスを行うと計画期間数は30となり、シミュレーションパスの本数が5,000本ならば、制約式は約15万本、決定変数も約15万個となり、計算時間は約6分かかる¹。しかし、様々な分析を行うためには計算速度を向上させることは不可欠である。そこで、下方リスク尺度²を用いる場合、大きい富の値をもつサンプルはリスク尺度の計算に含まれないという問題の特徴を生かして、リスク尺度の計算に不必要(影響の少ない)と思われるサンプルをグルーピングすることによって、計算精度を多少犠牲にしても数値計算を高速化させる定式化の方法を示す。

本論文の構成は以下の通りである。2節では、枇々木、小守林、豊田(2005)の多期間最適化手法を用いた世帯の資産形成モデルの概要を示す。3節では、実践的なファイナンシャル・コンサルティング・ツール構築のために世帯主の死亡に伴うキャッシュ・フローおよび条件付き意思決定を行う方法を示す。具体的には、①遺族年金の考慮、②生活消費支出のモデルの改善、③リスク資産に関する投資決定ルールの変更を行う。4節で数値分析によって、その効果を検証する。さらに、5節では、住宅購入に関する感度分析を行い、住宅購入戦略について調べる。6節では、計算の高速化のためのグループ・パスを用いたモデルの定式化と数値分析の結果を示す。最後に第7節でまとめを行う。

2 多期間最適化手法を用いた世帯の資産形成モデル

この節では、枇々木、小守林、豊田(2005)のシミュレーション型多期間最適化手法を用いたモデルの定式化を示す。リスク尺度として、条件付きバリューアットリスク(CVaR)を用いる。 n 種類のリスク資産と無リスク資産に投資を行い、每期リバランスを可能とする。死亡保険は初期時点のみで契約し、死亡時に一定の保険金を受け取れる定期保険である。一時払い、平準払いともに可能である。また、火災保険は1年満期で毎年契約を更新する保険である。

2.1 記号

(1) 添字

j : 資産を表す添字 ($j = 1, \dots, n$).

t : 時点を表す添字 ($t = 1, \dots, T$).

i : 経路(パス)を表す添字 ($i = 1, \dots, I$).

(2) パラメータ

(A) 経路に関するパラメータ

¹IBM ThinkPad T43, クロック周波数 2.13GHz, メモリ 2GB で数値計画ソフトウェアは NUOPT バージョン7 を利用している。以降、本論文の数値計算はすべて同じ計算機およびソフトウェアを用いて問題を解いている。

²枇々木、小守林、豊田(2005)は条件付きバリューアットリスクや下方部分積率を用いて定式化を行っている。

I : 経路の本数

(B) 資産変動に関するパラメータ

$\rho_{j,0}$: 0時点のリスク資産 j の価格. ($j = 1, \dots, n$)

$\rho_{j,t}^{(i)}$: t 時点の経路 i のリスク資産 j の価格. ($j = 1, \dots, n; t = 1, \dots, T; i = 1, \dots, I$)

$R_{j,t}^{(i)}$ を期間 t の経路 i のリスク資産 j の収益率として、以下の式で計算する.

$$\rho_{j,1}^{(i)} = (1 + R_{j,1}^{(i)}) \rho_{j,0}, \quad (j = 1, \dots, n; i = 1, \dots, I)$$

$$\rho_{j,t}^{(i)} = (1 + R_{j,t}^{(i)}) \rho_{j,t-1}^{(i)}, \quad (j = 1, \dots, n; t = 2, \dots, T; i = 1, \dots, I)$$

r_0 : 0 時点(期間 1) の金利.

$r_{t-1}^{(i)}$: $t-1$ 時点(期間 t) の経路 i の金利. ($t = 2, \dots, T; i = 1, \dots, I$)

(C) 保険事故発生に関するパラメータ

$\tau_{1,t}^{(i)}$: 経路 i において、世帯主が死亡した時点で 1, その他の時点では 0 の値をとる.

$\tau_{2,t}^{(i)}$: 経路 i において、火災事故が発生した時点で 1, その他の時点では 0 の値をとる.

$\tau_{3,t}^{(i)}$: 経路 i において、世帯主が死亡するまでの時点で 1, 死亡した時点以降では 0 の値をとる.

$\lambda_{1,t}$: t 時点での死亡事故発生率 : $\lambda_{1,t} = \Pr(\tau_{1,t} = 1) = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I \tau_{1,t}^{(i)}$

λ_2 : 火災事故発生率 (時点によらず一定) : $\lambda_2 = \Pr(\tau_{2,t} = 1) = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I \tau_{2,t}^{(i)}$

(D) 生命保険に関するパラメータ (保険料現価1円分を1単位とする)

g_1 : 死亡保険の予定利率

f_1 : 死亡保険の保険料支払い方法が一時払いの場合は 1, 平準払いの場合は 0 の値をとる.

y_{f_1} : 死亡保険の1単位あたりの一時払い保険料 : $y_{f_1} = 1$

y_{f_2} : 死亡保険の1単位あたりの平準払い保険料 : $y_{f_2} = \left\{ \sum_{t=0}^{T-1} \frac{1 - \sum_{i=0}^t \lambda_{1,i}}{(1+g_1)^t} \right\}^{-1}$

$y_{L,t}^{(i)}$: 死亡保険1単位あたりの t 時点における支払い保険料

$$y_{L,t}^{(i)} = f_1 y_{f_1} \tau_{4,t} + (1 - f_1) y_{f_2} \tau_{3,t}^{(i)}, \quad \text{ただし, } \tau_{4,0} = 1, \tau_{4,t} = 0, (t \neq 0)$$

θ_1 : 死亡保険1単位あたり受け取り保険金額 : $\theta_1 = \left\{ \sum_{t=1}^T \frac{\lambda_{1,t}}{(1+g_1)^t} \right\}^{-1}$

$L_t^{(i)}$: t 時点の経路 i における死亡保険の1単位あたり受け取り保険金額 : $L_t^{(i)} = \tau_{1,t}^{(i)} \theta_1$

(E) 損害保険に関するパラメータ (保険料現価1円分を1単位とする)

g_2 : 火災保険の予定利率

y_F : 火災保険1単位あたりの支払い保険料 : $y_F = 1$

θ_2 : 火災保険の1単位あたり受け取り保険金額(1年満期) : $\theta_2 = \frac{1+g_2}{\lambda_2}$

$F_t^{(i)}$: t 時点の経路 i における火災保険1単位あたり受け取り保険金額 : $F_t^{(i)} = \tau_{2,t}^{(i)} \theta_2$

α : 火災事故による保有する非金融資産の損害率

γ : 非金融資産の償却率

$A_t^{(i)}$: t 時点の経路 i における火災事故による損失額³. : $A_t^{(i)} = \tau_{2,t}^{(i)} \alpha (1 - \gamma) W_{2,t-1}^{(i)}$

(F) 世帯の収支と富に関するパラメータ

$m_t^{(i)}$: 世帯主が稼ぎ出す t 時点の経路 i における賃金

$M_t^{(i)}$: t 時点の経路 i における賃金収入: $M_t^{(i)} = \tau_{3,t}^{(i)} m_t^{(i)}$

$H_t^{(i)}$: t 時点の経路 i における借入金

$C_{1,t}^{(i)}$: t 時点の経路 i における生活消費支出

$C_{2,t}^{(i)}$: t 時点の経路 i における非金融資産購入支出

$C_t^{(i)}$: t 時点の経路 i における消費支出合計: $C_t^{(i)} = C_{1,t}^{(i)} + C_{2,t}^{(i)}$

$W_{1,t}^{(i)}$: t 時点の経路 i における金融資産保有額. ただし, 時点0 (初期時点) の保有額を $W_{1,0}$ とする.

$W_{2,t}^{(i)}$: t 時点の経路 i における非金融資産保有額: $W_{2,t}^{(i)} = (1 - \gamma) W_{2,t-1}^{(i)} + C_{2,t}^{(i)}$

ただし, $W_{2,0}$ を時点0 (初期時点) の保有額とする.

W_E : T 時点 (世帯主定年時) に保有する金融資産額の期待値の下限

β : 条件付きバリューアットリスク (CVaR) の確率水準

$L_{v,t}$: t 時点の無リスク資産の下限值. $L_{v,t} < 0$ の場合には借り入れが可能である.

(3) 決定変数

$z_{j,t}$: t 時点のリスク資産 j への投資単位数⁴. ($j = 1, \dots, n$; $t = 0, \dots, T - 1$)

v_0 : 0 時点の現金 (無リスク資産).

$v_t^{(i)}$: t 時点の経路 i の現金 (無リスク資産). ($t = 1, \dots, T - 1$)

u_L : 0 時点で加入する死亡保険の単位数.

$u_{F,t}$: t 時点で加入する1年満期火災保険の単位数. ($t = 0, \dots, T - 1$)

$q^{(i)}$: T 時点における経路 i の保有金融資産額の β -VaR ($\equiv V_\beta$) を下回る部分.

$$q^{(i)} \equiv \max(V_\beta - W_{1,T}^{(i)}, 0), \quad (i = 1, \dots, I)$$

2.2 モデルの定式化

モデルは以下のように定式化することができる.

$$\text{最大化} \quad V_\beta - \frac{1}{(1 - \beta)I} \sum_{i=1}^I q^{(i)} \quad (1)$$

$$\text{制約条件} \quad \sum_{j=1}^n \rho_{j,0} z_{j,0} + v_0 + y_{L,0} u_L + y_{F,0} u_{F,0} = W_{1,0} \quad (2)$$

$$(W_{1,1}^{(i)} \Rightarrow) \quad \sum_{j=1}^n \rho_{j,1}^{(i)} z_{j,0} + (1 + r_0) v_0 + D_1^{(i)} = \sum_{j=1}^n \rho_{j,1}^{(i)} z_{j,1} + v_1^{(i)}, \quad (i = 1, \dots, I) \quad (3)$$

$$(W_{1,t}^{(i)} \Rightarrow) \quad \sum_{j=1}^n \rho_{j,t}^{(i)} z_{j,t-1} + (1 + r_{t-1}^{(i)}) v_{t-1}^{(i)} + D_t^{(i)} = \sum_{j=1}^n \rho_{j,t}^{(i)} z_{j,t} + v_t^{(i)}, \quad (t = 2, \dots, T - 1; i = 1, \dots, I) \quad (4)$$

³火災事故によって非金融資産は $A_t^{(i)}$ だけ毀損 (減少) するが $A_t^{(i)}$ を支出して非金融資産は復旧 (増加) すると考える. したがって, $A_t^{(i)}$ は非金融資産保有額に影響を与えない. その代わりに, (8), (9) 式に示すようにキャッシュフローに影響を与える.

⁴本論文で用いるシミュレーション型モデル (根々木 [2001b]) では, リスク資産の投資単位数はパスに依存しない.

$$W_{1,T}^{(i)} = \left\{ \sum_{j=1}^n \rho_{j,T}^{(i)} z_{j,T-1} + (1 + r_{T-1}^{(i)}) v_{T-1}^{(i)} \right\} + D_T^{(i)}, \quad (i = 1, \dots, I) \quad (5)$$

$$\frac{1}{I} \sum_{i=1}^I W_{1,T}^{(i)} \geq W_E \quad (6)$$

$$W_{1,T}^{(i)} - V_\beta + q^{(i)} \geq 0, \quad (i = 1, \dots, I) \quad (7)$$

$$z_{j,t} \geq 0, \quad (j = 1, \dots, n; t = 0, \dots, T-1)$$

$$v_0 \geq 0$$

$$v_t^{(i)} \geq L_{v,t}, \quad (t = 1, \dots, T-1; i = 1, \dots, I)$$

$$u_L \geq 0$$

$$u_{F,t} \geq 0, \quad (t = 0, \dots, T-1)$$

$$q^{(i)} \geq 0, \quad (i = 1, \dots, I)$$

$$V_\beta : \text{符号無制約}$$

ここで、 $D_t^{(i)}$ は以下に示すように、賃金、消費、保険によるキャッシュ・フローを表す。

$$\begin{aligned} D_t^{(i)} &= M_t^{(i)} + H_t^{(i)} - C_t^{(i)} - y_{L,t}^{(i)} u_L - y_{F,t}^{(i)} u_{F,t} + L_t^{(i)} u_L + F_t^{(i)} u_{F,t-1} - A_t^{(i)} \\ &= \tau_{3,t}^{(i)} m_t^{(i)} + H_t^{(i)} - (C_{1,t}^{(i)} + C_{2,t}^{(i)}) - y_{L,t}^{(i)} u_L - y_{F,t}^{(i)} u_{F,t} + \tau_{1,t}^{(i)} \theta_1 u_L + \tau_{2,t}^{(i)} \theta_2 u_{F,t-1} \\ &\quad - \tau_{2,t}^{(i)} \alpha (1 - \gamma) W_{2,t-1}^{(i)}, \quad (t = 1, \dots, T-1) \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} D_T^{(i)} &= M_T^{(i)} + H_T^{(i)} - C_T^{(i)} + L_T^{(i)} u_L + F_T^{(i)} u_{F,T-1} - A_T^{(i)} \\ &= \tau_{3,T}^{(i)} m_T^{(i)} + H_T^{(i)} - (C_{1,T}^{(i)} + C_{2,T}^{(i)}) + \tau_{1,T}^{(i)} \theta_1 u_L + \tau_{2,T}^{(i)} \theta_2 u_{F,T-1} \\ &\quad - \tau_{2,T}^{(i)} \alpha (1 - \gamma) W_{2,T-1}^{(i)} \end{aligned} \quad (9)$$

$u_L, u_{F,t}$ は(8), (9)式に示すように $D_t^{(i)}$ に含まれる。また、以降の説明において、 T 時点の経路 i における金融資産保有額 $W_{1,T}^{(i)}$ を最終富、その期待値を期待最終富と呼ぶことにする。

3 実践的なモデル化

世帯主が死亡した場合、賃金収入はなくなるが、遺族年金をもらうことができる。また、世帯主が死亡したら、一般に生活レベルが下がることを許容するだろう。このように、世帯主の死亡に伴い、世帯の収入と支出の構造は大きく変化する。そこで、3.1節、3.2節では枇々木、小守林、豊田(2005)のモデルでは取り扱われなかった世帯の収入と支出についてモデル化する方法を示す。

次に、死亡時に生命保険金額を受け取ると手元に現金が残るため、危険資産への運用方法を変えることが考えられる。このような条件付き意思決定は通常のシミュレーション型モデルではできない。それに対し、3.3節では、簡単な投資決定ルールを適用することによってシミュレーション型モデルでも条件付き意思決定を行うことができるモデル化の方法を示す。

3.1 世帯の収入：遺族年金の考慮

遺族年金(遺族基礎年金、遺族厚生年金)は、賃金水準から平均標準報酬金額と平均標準報酬額を計算し、ルールに基づき設定される。厚生年金保険(遺族厚生年金)は世帯主の死亡時点 t_m に依存するのでパスに依存する。世帯主が生きていれば $\tau_{3,t}^{(i)} = 1$ 、死亡していれば $\tau_{3,t}^{(i)} = 0$ である。そこで、世帯主が死亡した場合

の遺族年金を $a_{t_m}^{(i)}$ とし、 $M_t^{(i)}$ を賃金または遺族年金と定義し直すと、以下のように記述することができる。

$$M_t^{(i)} = \tau_{3,t}^{(i)} m_t^{(i)} + (1 - \tau_{3,t}^{(i)}) a_{t_m}^{(i)}$$

3.2 世帯の生活消費支出

世帯の生活消費支出は、① 一般生活消費、② 教育費、③ (借家の場合) 家賃、④ (持ち家の場合) 住宅ローン、などがある。従来のモデルではすべてを合算し、世帯主の死亡とは独立に考えていたが、依存する部分もある。たとえば、住宅ローンは団体信用保険に加入していれば⁵、世帯主の死亡により以降の返済は免除になるし、また一般に生活レベルが下がることも許容するだろう。そこで、生活消費支出 $C_{1,t}^{(i)}$ を以下の3つに分けてパラメータを設定する。

$C_{1,t}^{1(i)}$: 世帯主の死亡に関係なくかかる費用 (②,③)

$C_{1,t}^{2(i)}$: 住宅ローン年支払額 (④)

$C_{1,t}^{3(i)}$: 世帯主が死亡していないときに想定している $C_{1,t}^{1(i)}$, $C_{1,t}^{2(i)}$ 以外の生活消費支出 (①)

この他にモデルに必要な以下のパラメータを設定する。

t_e : 住宅購入時点

κ : 世帯主が死亡したときの生活水準パラメータ

(例) 世帯主の生存時と同じであれば、 $\kappa = 1$ 。支出を70%に抑える場合には $\kappa = 0.7$ 。

これらのパラメータを利用して、住宅ローン返済額と生活消費支出のモデル化を行う。

(1) 住宅ローン

世帯主の有無にかかわらず、住宅を t_e 時点で購入する。したがって、 $C_{1,t}^{2(i)} = 0$ ($t \leq t_e$) である。そして、住宅ローンは団体信用保険に加入していて、住宅購入後に世帯主が死亡すれば、以降のローン返済は免除になるので、住宅ローン支払額は $\tau_{3,t}^{(i)} C_{1,t}^{2(i)}$ ($t > t_e$) である。ただし、世帯主が死亡後に住宅を購入した場合にはローンは免除されず、 $C_{1,t}^{2(i)}$ ($t > t_e$) である。住宅購入時点で世帯主が生存している場合は $\tau_{3,t_e}^{(i)} = 1$ 、死亡している場合には $\tau_{3,t_e}^{(i)} = 0$ かつ $\tau_{3,t}^{(i)} = 0$ ($t > t_e$) である。したがって、 $t(> t_e)$ 時点の住宅ローン支払額は以下のように記述できる。

$$(1 - \tau_{3,t_e}^{(i)} + \tau_{3,t}^{(i)}) C_{1,t}^{2(i)} = \begin{cases} \tau_{3,t}^{(i)} C_{1,t}^{2(i)} & , (\tau_{3,t_e}^{(i)} = 1) \\ C_{1,t}^{2(i)} & , (\tau_{3,t_e}^{(i)} = 0) \end{cases}$$

(2) 生活レベルの変更

世帯主が生きていれば生活消費はそのまま、死亡後は κ 倍になると考える。世帯主が生きていれば $\tau_{3,t}^{(i)} = 1$ であるので、想定している生活消費の $\tau_{3,t}^{(i)}$ 倍、死亡していれば $\tau_{3,t}^{(i)} = 0$ であるので、 $(1 - \tau_{3,t}^{(i)}) \kappa$ 倍であると考えることができる。したがって、 $C_{1,t}^{1(i)}$, $C_{1,t}^{2(i)}$ 以外の生活消費支出は以下のように計算できる。

$$\left\{ \tau_{3,t}^{(i)} + (1 - \tau_{3,t}^{(i)}) \kappa \right\} C_{1,t}^{3(i)} = \left\{ \kappa + (1 - \kappa) \tau_{3,t}^{(i)} \right\} C_{1,t}^{3(i)}$$

以上のことから、生活消費は以下のように記述することができる。

$$C_{1,t}^{(i)} = C_{1,t}^{1(i)} + (1 - \tau_{3,t_e}^{(i)} + \tau_{3,t}^{(i)}) C_{1,t}^{2(i)} + \left\{ \kappa + (1 - \kappa) \tau_{3,t}^{(i)} \right\} C_{1,t}^{3(i)}$$

3.3 リスク資産の取り扱い

シミュレーション型アプローチでは、死亡事由の有無の条件付きで資産運用の方法が変わることはない。しかし、世帯主が死亡すると死亡保険金が現金で入ってくるので、条件付きの資産運用に変えた方がよいか

⁵民間金融機関の場合、ローン金利の中に保険料は含まれている。住宅金融公庫の場合には別途加入する必要がある。

もしれない。そこで、世帯主が死亡してからの経過時間に依存して運用を行う方法を示す⁶。

決定変数を以下の2つに分けて、設定する。

$z_{j,t}^1$: 世帯主が生存している場合の t 時点の投資単位数

$z_{j,k}^2$: 世帯主が死亡してから k 年経過したときの投資単位数

パス i において世帯主が死亡した時点 $t_m^{(i)}$ とする。 t 時点で設定する決定変数は $z_{j,t-t_m^{(i)}}^2$ である (すなわち、 $k = t - t_m^{(i)}$)。したがって、 t 時点での投資単位数は

$$z_{j,t}^{(i)} = \tau_{3,t}^{(i)} z_{j,t}^1 + (1 - \tau_{3,t}^{(i)}) z_{j,t-t_m^{(i)}}^2$$

と記述できる。現金 $v_t^{(i)}$ はパスごとに異なるので、変更する必要はない。図1に決定変数の割り当て例を示す。丸印が死亡時を表す。

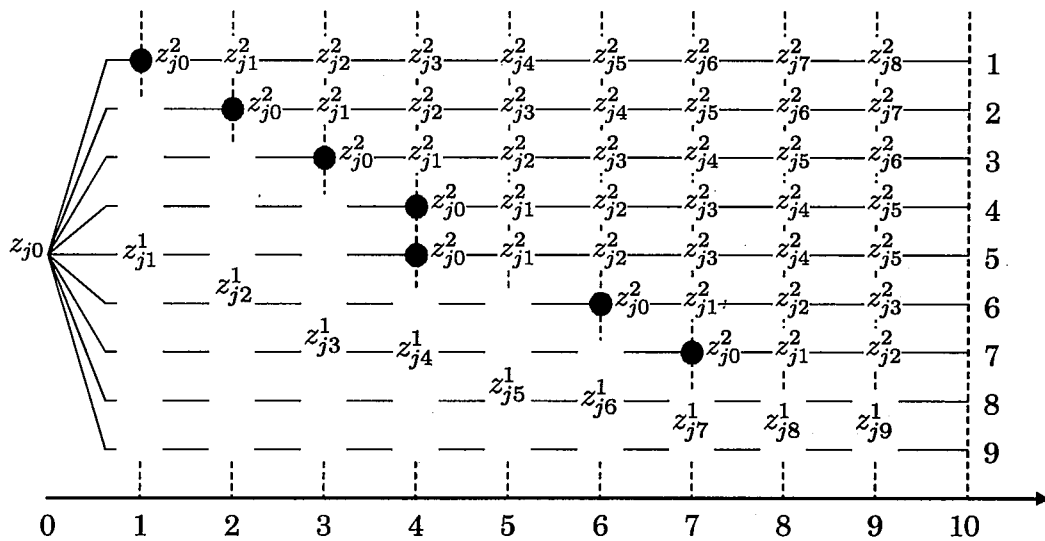


図1 各パスごとの決定変数の設定(10期間, 9パスの場合の例)

4 数値分析

4.1 設定条件

枇々木, 小守林, 豊田(2005)の第6章のB世帯のパラメータを用いて様々な数値分析を行う。B世帯の世帯主の年齢は30歳で、配偶者は専業主婦で28歳、現在子供は1人で0歳であるが、3年後にもう1人誕生予定である。世帯主は金融機関勤務であり、現在はマンションに入居している(20万円/月)が、11年後には一戸建てを購入したいと考えている。予算は5,000万円、頭金は2,000万円を予定している。頭金は住宅購入時すなわち世帯主41歳の時点($t_e = 11$)で支払いを行うものとし、住宅ローンは元利均等返済と仮定して借入金額(3,000万円)、借入期間(20年)、金利(6%)から年間返済額を算出する⁷。また、子供の教育は小学校から大学まで私立に通わせたいと考えている。数値分析に用いる基本パラメータの値を表1に示す。

⁶死亡事由の有無の条件付きで、時点に依存して設定する方法も考えられる。しかし、死亡保険金が入ってくるのは死亡時であり、この方法では、たとえば死亡してから1年目と10年目も同じ運用方法をする事になり、保有している現金に差が生じている可能性が高い。そこで、死亡してからの経過時間に依存して資産運用を変える定式化の方法を示す。

⁷住宅ローン返済額は毎年261.6万円である。期末払いとして、 $t = 12$ から $t = 30$ まで19回支払い、残り1回分は定年後に支払うと想定する。定年時における期待金融資産額を5,000万円とすると、 W_E は5,261.6万円(= 5,000 + 261.6)となる。

表 1 パラメータ設定

パラメータ	設定値
リスク資産の数	$n = 1$
世帯主定年の年齢および期間数	60歳: $T = 30$
リスク資産収益率の期待値	$\mu = 0.1$
リスク資産収益率の標準偏差	$\sigma = 0.2$
無リスク金利	$r = 0.04$
死亡事故発生率	「生保標準生命表1996(死亡保険用)男」 を用いて $\lambda_{1,t}$ を推計
火災事故発生率	$\lambda_2 = 0.005$
死亡保険の予定利率	$g_1 = 0.05$
火災保険の予定利率	$g_2 = 0.05$
生命保険の保険料支払い方法	平準払い: $f_1 = 0$
金融資産の初期保有額(万円)	$W_{1,0} = 1,000$
非金融資産の初期保有額(万円)	$W_{2,0} = 1,000$
非金融資産の償却率	$\gamma = 0.03$
火災事故による非金融資産損害率	$\alpha = 1$
無リスク資産の下限值	$L_{v,t} = -1,000$
期待金融資産額の下限	$W_E = 5,261.6$
CVaRの確率水準	$\beta = 0.8$

世帯の賃金収入は就労者の年齢と職種によって異なるものと考え、厚生労働省(2003)の「賃金構造基本統計調査(平成15年)」をもとに賃金収入を設定する。世帯主が金融機関勤務であるB世帯の賃金収入パターンは若年層における昇給率が高いものの、50歳を越えると年齢をおうごとに賃金収入が減少していく。消費支出は、世帯の賃金収入、家族構成、教育プランに依存して決定する。総務省(2000)の「全国消費実態調査(平成11年)」から世帯の人数および収入別の平均支出額を、文部科学省(2003a, 2003b)の「こどもの学習費調査(平成14年)」と「学生生活調査(平成14年)」から教育機関の種別による平均的な教育費を算出することで消費支出を計算する。

リスク資産の条件付き意思決定の効果を確認するために、以下の2種類のモデルに対する数値分析を行う。

- モデルA: 世帯の収入(3.1節)と生活消費支出(3.2節)のみを修正したモデル
- モデルB: モデルAに加えて、リスク資産の取り扱い(3.3節)も修正したモデル

モデルの修正に伴う影響を確認するために、表2に示す20通りのパラメータの組み合わせを調べる。 $pf = 0$, $np = 0$, $\kappa = 1$ のケースが枇々木、小守林、豊田(2005)のモデルに相当する。

表2 パラメータの組み合わせ

	含める	含めない	
遺族年金の受け取り	$pf = 1$	$pf = 0$	2ケース
住宅ローン返済免除	$np = 1$	$np = 0$	2ケース
生活レベルの変更	$\kappa = 0.6 \sim 1.0(0.1 \text{ 刻み})$		5ケース

4.2 モデルA

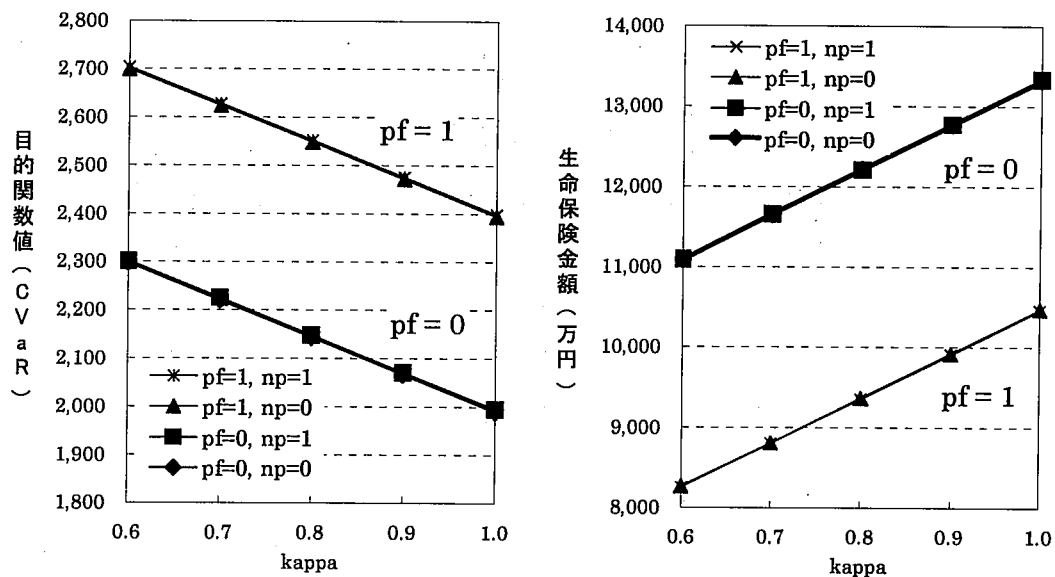


図2 モデルA：目的関数値と生命保険金額

図2に目的関数値と生命保険加入金額を示す。 κ の値を低くし、生活レベル(消費水準)を下げると、目的関数が改善する(CVaRが上昇する)とともに生命保険加入金額も低く抑えることができる。生命保険の主な機能は、賃金収入に対するリスクヘッジであり、この一部が、消費を抑えることで代替可能だからである。同様の理由により、遺族年金を受け取ることができれば($pf = 1$ ならば)、生命保険加入金額を3,000万円程度低く抑えることができる。一方、住宅ローンの返済免除は目的関数値を多少改善するが、生命保険加入金額にほとんど影響を与えない。この理由は、モデルでは生命保険を現時点で加入するのに対し、住宅購入は11年後であり、その間に(住宅購入前に)世帯主が死亡してしまうと、住宅ローンは返済免除にならないからである。しかし、このことは住宅ローンの返済免除に意味がないというわけではない。図3の世帯主の死亡時点別の期待最終富を見てみよう。これは世帯主の死亡時点が同じパスの最終富を集めて期待値を計算した値である。また、0時点の値は世帯主が死亡しない場合の期待最終富である⁸。

住宅を11時点で購入するので、12時点以降で世帯主が死亡すると、住宅ローンは返済免除となる。そのため、(ローン返済を含む)消費支出が抑えられることによって最終富の増加に貢献し、 $np = 1$ の12時点以降の期待最終富の値は、 $np = 0$ の場合の最終富に比べて大きな値をとる。死亡時点が遅くなればなるほど、その効果は減少し、期待最終富の差は縮まっていく。

⁸0時点では世帯主は死亡しない。図の見方に注意されたい。

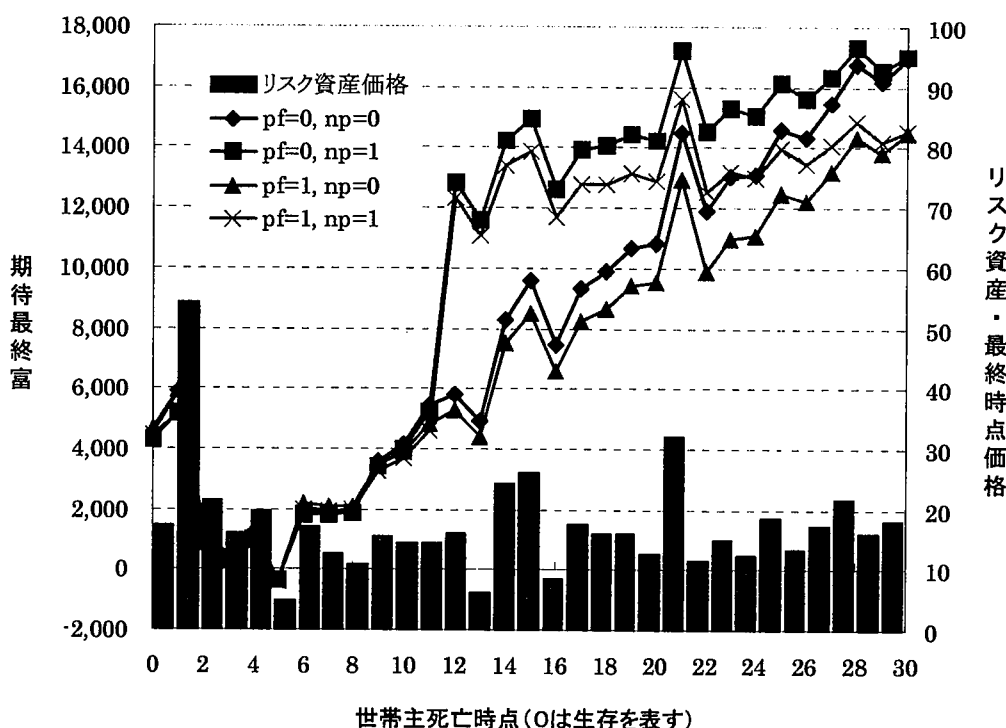


図3 モデルA：世帯主の死亡時点別の期待最終富 ($\kappa = 1$)

一方、死亡時点が遅くなるにつれて期待最終富は増加傾向にある。これは死亡時点が遅ければ、それまでに賃金収入が得られる一方で生命保険を受け取ることができるからである。定期型死亡保険は、保険期間(30年)の間に死亡したときのみ保険金を受け取れる保険であり、世帯主が死亡しないときには保険金を受け取れない。今回の数値分析の結果では、14時点以降に死亡した場合に比べて死亡しない場合の期待最終富は低くなる。早期に(特に住宅購入以前に)世帯主が死亡すると、生命保険は受け取れるが、賃金は受け取ることができず、遺族年金受取額も低いため、期待最終富は低い傾向にある⁹。

図4(左)に $pf = 1, np = 1$ の場合の5種類の κ に対するリスク資産の投資単位数を示す。 κ の値に依らず、各時点のリスク資産への投資の傾向は変わらないが、 κ の値を低くする(生活レベルを下げる)と、投資単位数は減少する。この理由は、消費水準を下げることにより最終富の増加が期待できるため、リスクをとらなくてもよくなるからである。他の pf と np の組み合わせの場合もこの傾向は変わらない。図4(右)に $\kappa = 1$ の場合のリスク資産の投資単位数を示す。遺族年金および住宅ローン返済免除を考慮すると、世帯主死亡に対するリスクヘッジが可能になり、最終富の増加が期待できるため、リスク資産への投資単位数を減少させることができる。

図5に無リスク資産の平均保有額を示す。左図は $pf = 1, np = 1$ の場合の5種類の κ 、右図は $\kappa = 1$ の場合の値を示す。10時点までは増加するが、11時点で住宅を購入し頭金を支払うために保有額は激減する。その後、約10年間は微増するが、子どもが大学を卒業してからは教育費がかからなくなり、大幅に増加する。 κ を小さくしたり、遺族年金および住宅ローン返済免除を考慮すると、最終富の増加が期待でき、リスク資産への投資単位数も減少するため、無リスク資産の保有額も増える。

⁹11時点で死亡した場合の期待最終富が高い理由は最終時点でのリスク資産価格の平均値が高いからである。11時点のバス数は4本であり、サンプル誤差と考えられる。死亡事故発生時のバス数が少ないため、時点の違いによってリスク資産価格はばらついていて、早い死亡時点の資産価格が他の時点に比べて低いということではなく、影響は部分的であると考えられる。たとえば、14、15、21時点で死亡事故のあるバスの資産価格が他に比べて高いため、期待最終富も他の時点に比べて部分的に高くなっている。

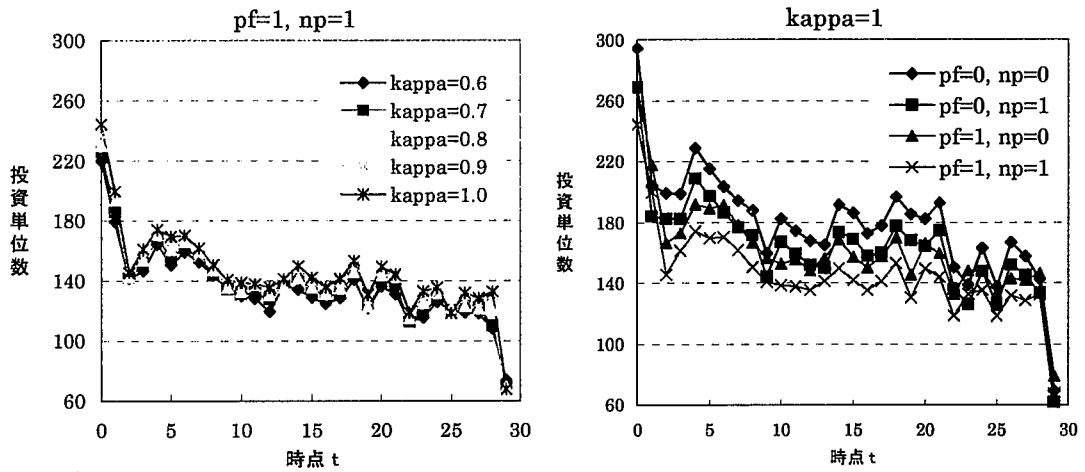


図4 モデルA：リスク資産・投資単位数

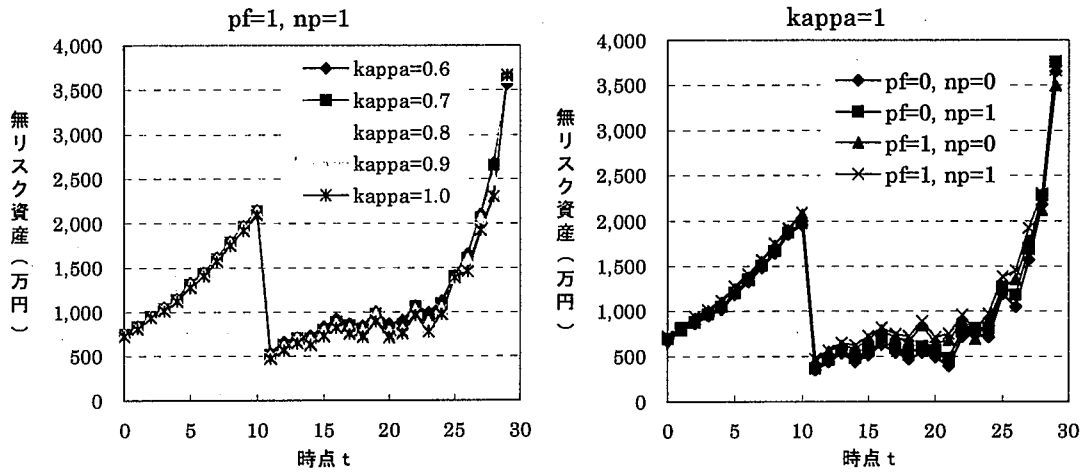


図5 モデルA：無リスク資産・平均保有額

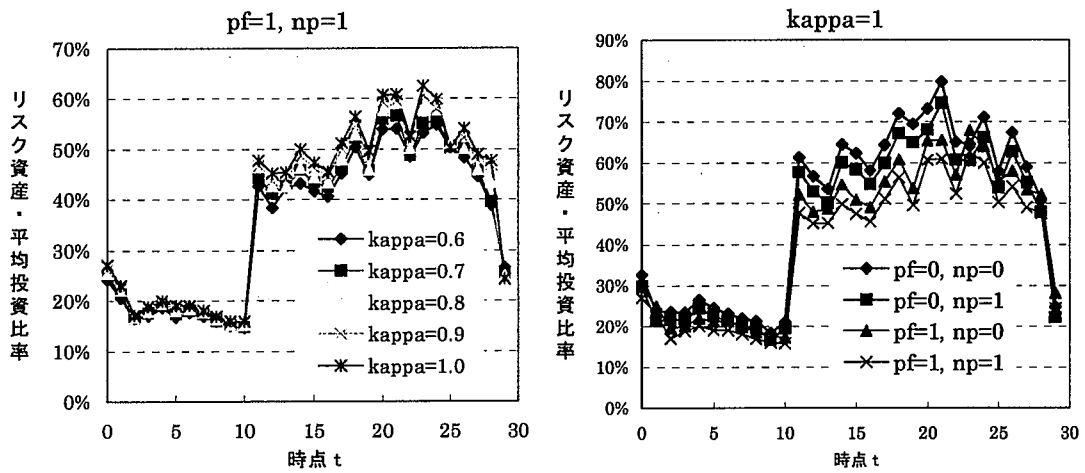


図6 モデルA：リスク資産・平均投資比率

図6にリスク資産の平均投資比率を示す。左図は $pf = 1, np = 1$ の場合の5種類の κ , 右図は $\kappa = 1$ の場合の値を示す。無リスク資産は住宅購入時点までの間、リスク資産への投資単位数よりも大きく増加するが、期待収益率 10% で平均価格が上昇するため、平均投資比率は微減で済んでいる。しかし、11時点では住宅を購入するため、リスク資産への投資単位数は減少傾向にあるものの、平均投資比率は急上昇する。その後も徐々に増加するが、無リスク資産の増加とともに平均投資比率も下がっている。 κ を小さくしたり、遺族年金および住宅ローン返済免除を考慮すると、無リスク資産が増加し、リスク資産の平均投資比率も減少する。

図7に最終富の経験分布を示す。右図は最終富の VaR 以下の部分を拡大したものである。図2(左)の CVaR の値からも分かるように、遺族年金を考慮する ($pf = 1$) と、分布の裾が右にシフトし、リスクを減少させる様子を見ることが出来る。

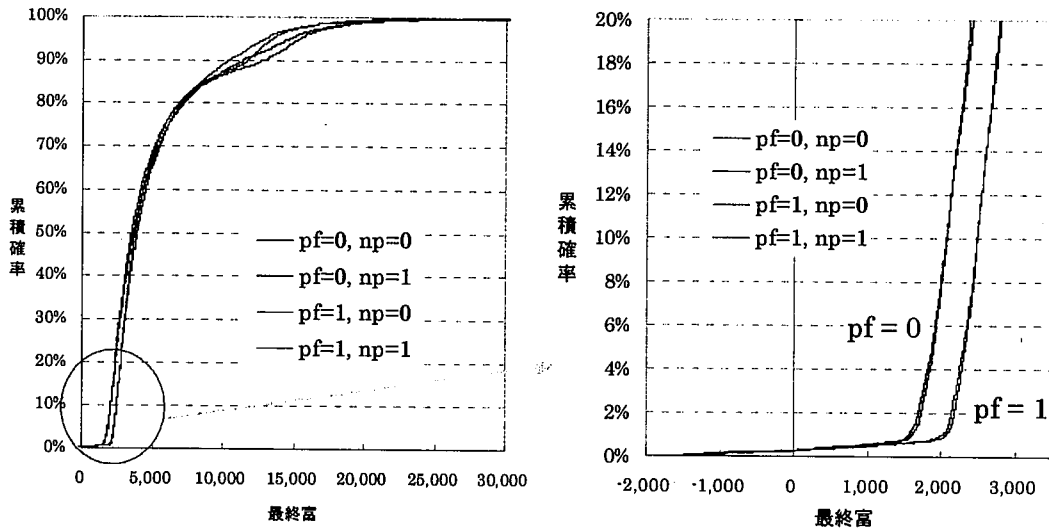


図7 モデルA：最終富の経験分布

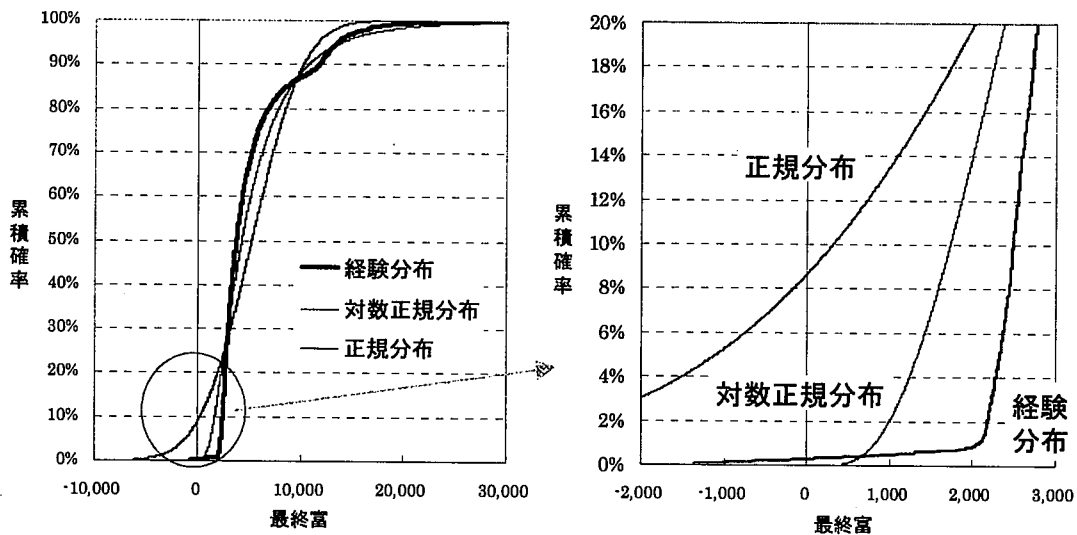


図8 モデルA：最終富の経験分布の正規分布，対数正規分布との比較

最終富の経験分布の形状を正規分布，対数正規分布と比較するために，図8を見てみよう。図8の経験分布は $pf = 1, np = 1, \kappa = 1$ の場合のグラフを表す。正規分布，対数正規分布は最終富の経験分布と同じ期

待値と標準偏差を持つ累積分布関数を表す。経験分布は正規分布に比べるとかなり裾が薄い分布になり、正規分布に比べて対数正規分布に近いことが分かる。これはリスク資産の収益率の時系列相関はないと仮定しているため、最終時点の資産価格は対数正規分布に近い形状をしており、その影響を強く受けているからと考えられる。

図9に最適な火災保険金額を示す。左図は $pf = 1, np = 1$ の場合の5種類の κ に対する最適火災保険金額、右図は $\kappa = 1$ の場合の最適火災保険金額である。遺族年金、住宅ローン返済免除、生活レベルを考慮しても、火災保険金額にはまったく影響を与えないことが分かるだろう。

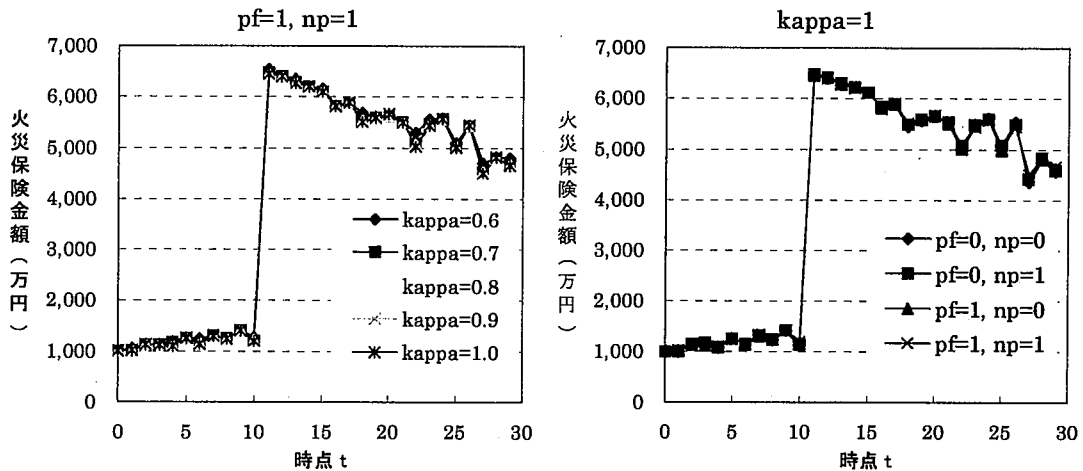


図9 モデルA：火災保険金額

4.3 モデルB

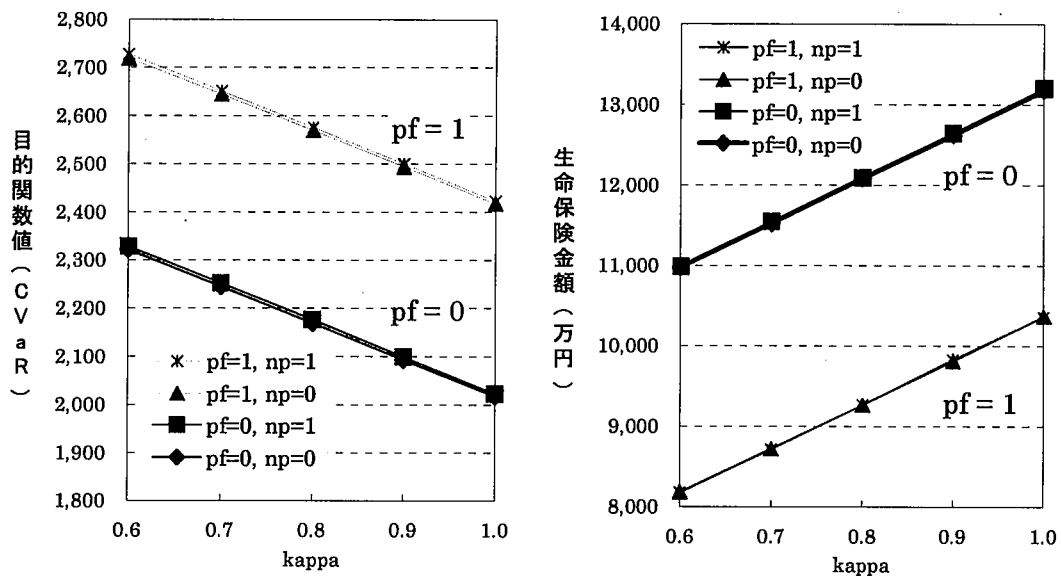


図10 モデルB：目的関数値と生命保険金額

図10に目的関数値と生命保険加入金額を示す。モデルA(図2)と同様の特徴が見られる。図ではわかりにくいですが、モデルAに比べて目的関数値は1%上昇、生命保険加入金額は1%減少している。

図11に生存の場合のリスク資産の投資単位数を示す。左図は $pf = 1, np = 1$ の場合の5種類の κ に対する値、右図は $\kappa = 1$ における値を示す。時点の経過とともに減少傾向となる特徴は、モデルAの投資単位数(図4)と同様である。しかし、生存している場合の投資単位数はモデルAの投資単位数に比べて全体的に減少する。図12によって、この差を確認できる。この理由は以下の通りである。モデルBでは死亡時には多額の生命保険を受け取ることができるので、その受け取った現金の一部をより多くのリスク資産へ投資する。その一方で、生存時には現金を受け取ることができないので、死亡時に比べてリスク資産へ投資しないという意思決定を行っているからである。それに対し、モデルAでは死亡条件付きの意思決定ができないため(死亡後、生存時ともに同じ意思決定をするため)、平均的にリスク資産への投資単位数が増加せざるを得ない。従来のシミュレーション型モデルに新たな条件付き意思決定の枠組みを入れることによって、より適切な意思決定ができることが分かる。

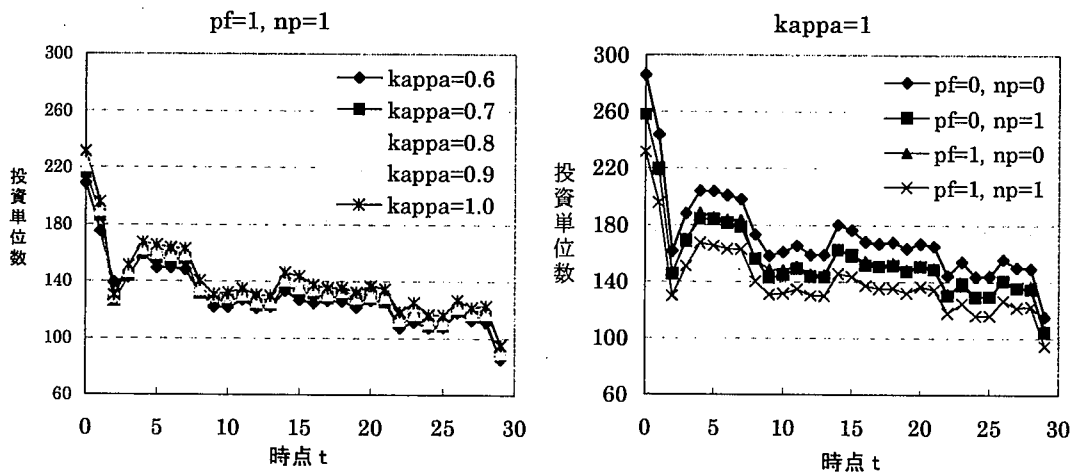


図 11 モデルB：生存の場合のリスク資産・投資単位数 ($z_{j,t}^1$)

一方、図13の死亡後のリスク資産の投資単位数を見ると、ほとんど特徴が見られない。この理由は、「死亡後の年数が同じ場合には同じ投資決定を行う」という条件付き意思決定をモデル化したためである¹⁰。したがって、生存の場合のリスク資産のより適切な投資決定をするための調整機能を果たすために死亡後のリスク資産・投資単位数 ($z_{j,k}^2$) を設定していると考えればよい。

¹⁰死亡時点ごとにそれ以降の時点ごとに別々の投資決定を設定することもできるが、その場合には死亡時のパス数が少ないという問題点が生じる。たとえば、1時点における死亡率は0.085%でパス5,000本の場合には世帯主が死亡するのは4本のみである。パス数を増やせば、これらの影響を減らすことが可能であるが、問題の規模が大きくなるという新たな問題点も生じる。

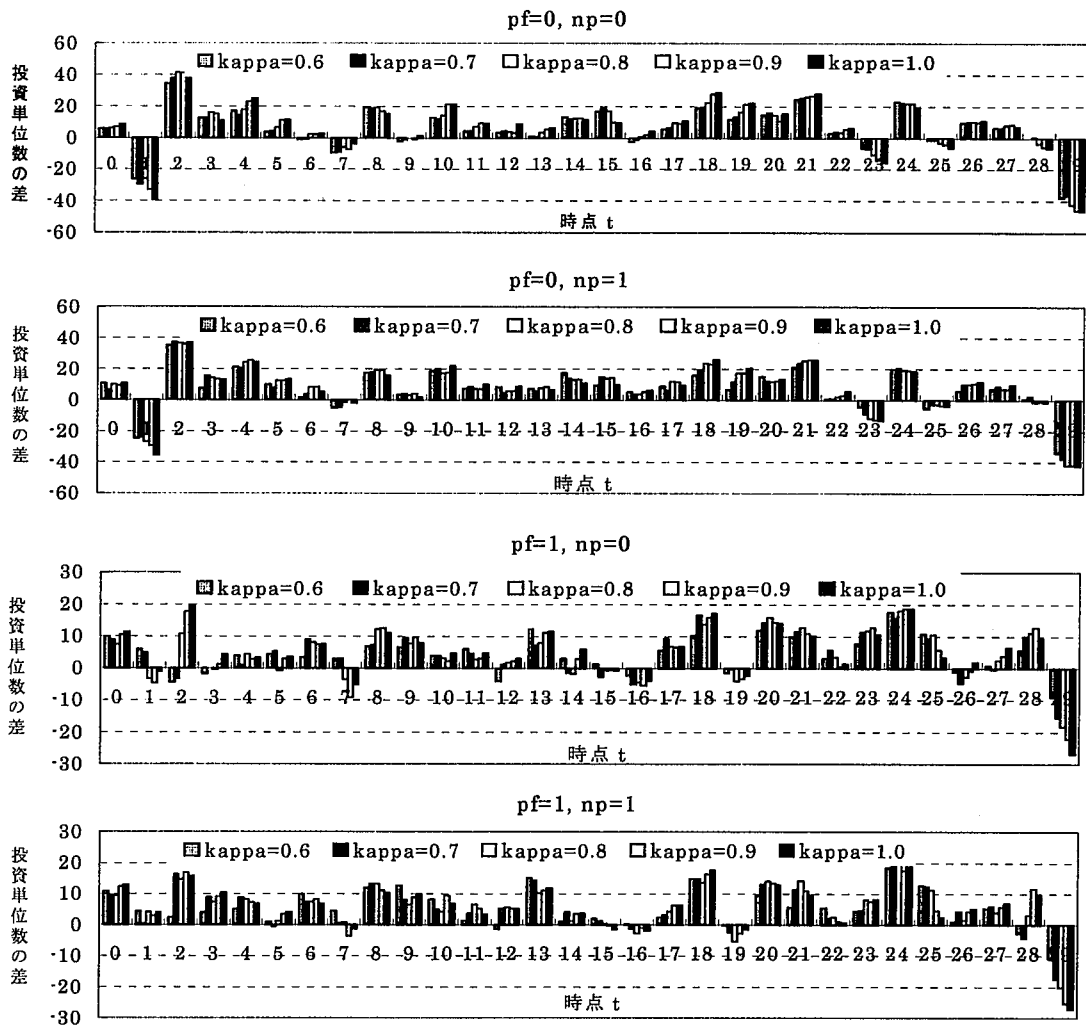


図 12 モデルA とモデルB のリスク資産・投資単位数の差 ($z_{j,t} - z_{j,t}^1$)

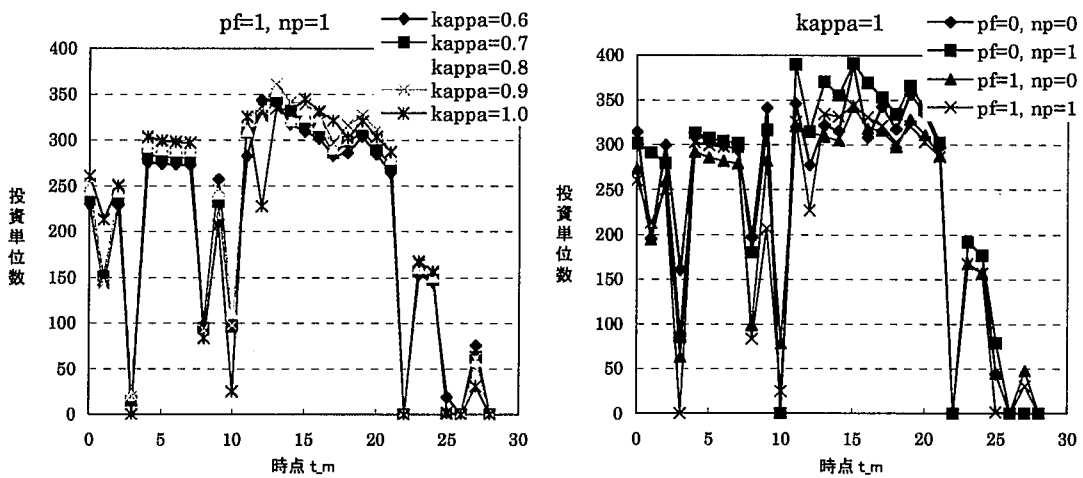


図 13 モデルB: 死亡後のリスク資産・投資単位数 ($z_{j,k}^2$)

5 住宅購入に関する感度分析

住宅購入に関する4つのパラメータ(住宅購入時点, 頭金, 住宅ローン金利, 借入期間)については, 前節までは, 値を固定した. 本節では, これらの条件を変更したときの影響を調べる. 住宅ローン金利が下がると目的関数は改善するとともに, 最終富に関する制約が効かなくなる可能性があるため, $W_E = 7,000$ とする. $pf = 1, np = 1, \kappa = 1$ とし, 3種類の購入時点(5時点, 10時点, 15時点), 3種類の頭金(1,000万円, 2,000万円, 3,000万円), 4種類の住宅ローン金利(3%, 4%, 5%, 6%)の組み合わせに対し, 最適解を求める. ローン期間は住宅購入時点から定年時点 $T = 30$ までとし, それぞれ 25年, 20年, 15年とする.

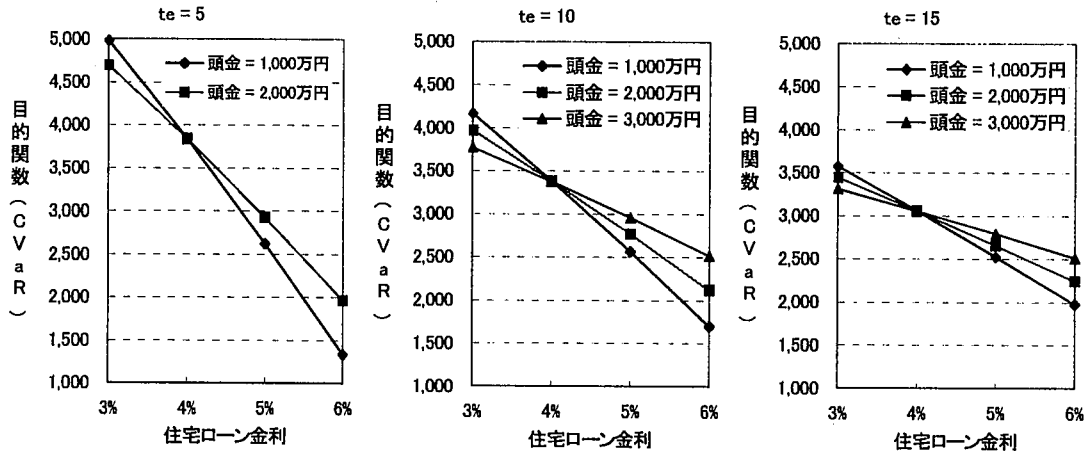


図 14 目的関数値(1)

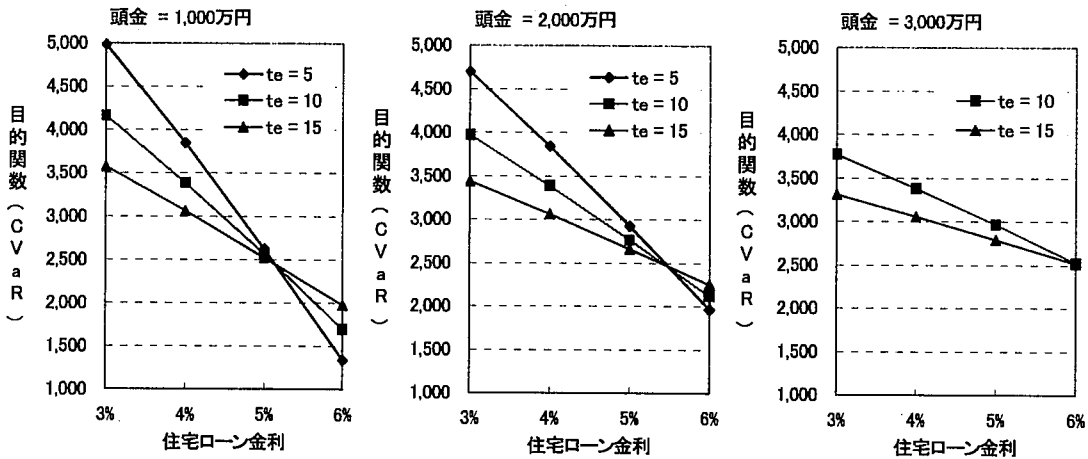


図 15 目的関数値(2)

図 14は3種類の頭金と4種類の住宅ローン金利に対する目的関数値の関係を3種類の購入時点ごとに示した図である¹¹. 住宅ローン金利が無リスク金利(4%)と一致すると, 目的関数値は頭金の大きさに影響を受けないことが3枚の図から読みとれる. 住宅ローン金利が無リスク金利(4%)よりも小さいと頭金の小さい方が目的関数値はよい. この理由は, 多くの頭金を支払うよりも手元に資金を持っていて(高い無リスク金利で運用し), 住宅ローンで少なかった頭金の分を(低い住宅ローン金利で)支払う方が金利差の分だけ有利になるからである. また, 住宅購入時点が遅いとローン支払い期間が減るので, 住宅ローン金利の影響を受

¹¹5時点で頭金が3,000万円のケースがないのは, 早い時期に多額の頭金を払って住宅を購入することはできず, 実行不可能になるからである. 無リスク資産の下限値 $L_{v,t}$ を下げると実行可能になるが, 結果は示していない.

けにくく、頭金および住宅ローン金利の違いによる目的関数値の差は小さい。

図15は3種類の購入時点と4種類の住宅ローン金利に対する目的関数値の関係を示すために、図14を3種類の頭金ごとにまとめ直した図である。頭金と同じであるならば、住宅ローン金利が低いときは購入時点の早い方が目的関数値は高い。この理由は購入時点が早ければ、たとえ金利を支払っても家賃を払う必要がなくなるからであると考えられる。そして、金利が高くなると、住宅ローン支払額(金利負担)が大きくなり、購入時点の遅い方が有利になる。

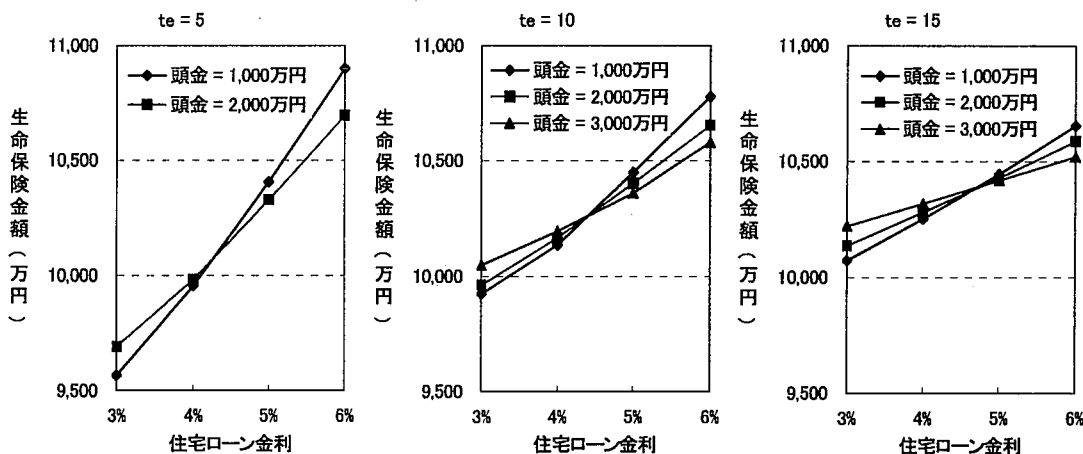


図 16 最適生命保険金額(1)

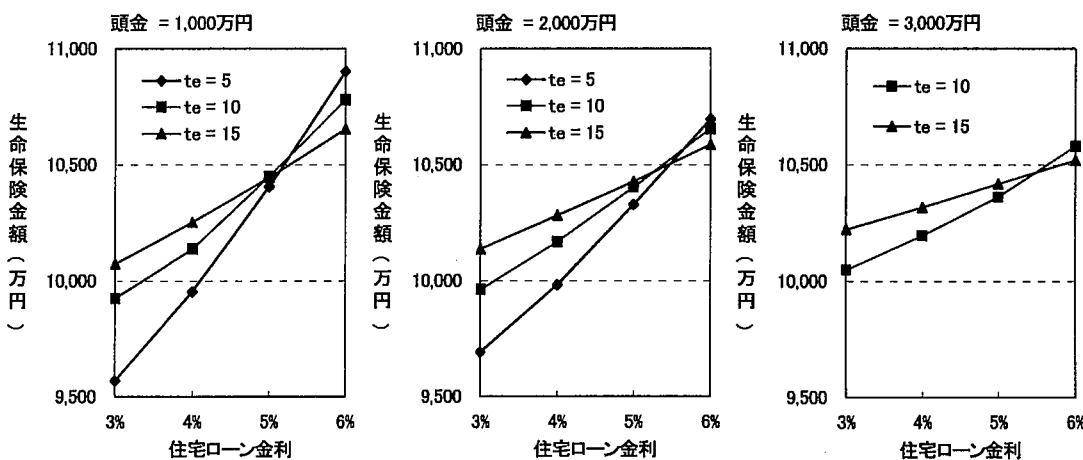


図 17 最適生命保険金額(2)

図16は3種類の頭金と4種類の住宅ローン金利に対する最適生命保険金額の関係を3種類の購入時点ごとに示した図である。住宅ローン金利が高いほど、生命保険金額は大きい。この理由は、金利負担の増加により住宅ローンの支払金額が増えると、世帯の保有する金融資産額が減り、世帯主が死亡した場合にはその分を生命保険でカバーする必要があるからである。一方、住宅ローン金利が低いとき、頭金の小さい方が生命保険金額は低い、住宅ローン金利が高いときには頭金の大きい方が生命保険金額は低くなる。世帯主が死亡すると住宅ローンは返済免除となるために頭金は少ない方が手元に多くの金融資産が残る一方で、多くの住宅ローンを抱えるため、金利負担が金融資産を減少させる。したがって、住宅ローン金利が低い場合には、金利支払いの影響が小さく頭金の少ない方が多額の金融資産を残せるが、住宅ローン金利が高い場合には金融資産が減少し、より多くの生命保険を掛ける必要が出てくる。また、頭金が多いほど、

住宅ローン金利の影響を受けにくいことも図から読みとることができる。

図17は3種類の購入時点と4種類の住宅ローン金利に対する最適生命保険金額の関係を示すために、図16を3種類の頭金ごとにまとめ直した図である。住宅ローン金利が低いとき、住宅購入時点が早い方が生命保険金額は低いが、住宅ローン金利が高いときには住宅購入時点が遅い方が生命保険金額は低くなる。この理由は、住宅購入時点が早いほど、世帯主死亡による住宅ローンの返済免除を受けられるからである。しかし、住宅ローン金利が高い場合には、その効果よりも早期に購入することによる金利支払いの負担が大きくなるため、逆転現象が起きると考えられる。また、住宅購入時点が遅いほど、住宅ローン金利の影響を受けにくいことも図から読みとることができる。

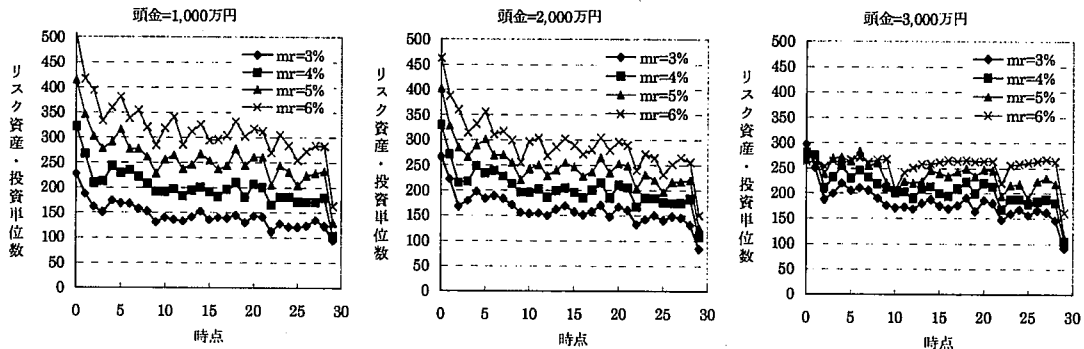


図18 最適リスク資産・投資単位数 ($t_e = 10$)

図18に10時点で住宅を購入した場合の3種類の頭金と4種類の住宅ローン金利(mr)に対するリスク資産の最適投資単位数を示す。住宅ローン金利が高い場合には(ローン返済を含む)消費支出が増えるため、リスクの高い投資を行って金融資産額を増やす必要があり、リスク資産への投資は増加する。また、頭金が多いほど、住宅ローン金利の影響を受けにくいので、投資単位数の差は小さくなる。5時点および15時点の場合も同様の特徴が見られるので、ここでは紙面の都合上省略する。

6 グループ・パスを用いたモデルの定式化

問題の規模は、計画期間数 T 、経路の本数 I 、リスク資産数 n に依存する。4節で示したモデルAの場合、決定変数の数および制約式の本数(上下限制約, 非負制約を除く)は以下の通りである。

$$\text{決定変数の数} : T(n + I + 1) + 3$$

$$\text{制約式の本数} : TI + 2$$

決定変数および制約式の大きさは、ほぼ TI になる。モデルは、死亡保険や火災保険を対象としており、それに関連する死亡率と火災発生率をサンプルパスで記述するためには多くのパスが必要であり、シミュレーション型多期間最適化手法では、 T に比べて I は大きい。生保標準生命表(1996)によると、男40歳の死亡率は0.156%であり、たとえば、ある1本のパスのみで死亡事故が発生する場合でも、641本のシミュレーション・パスが必要である。したがって、不確実性の精度を上げるために I を増やす必要がある。しかし、 I の増加は、最適化問題の規模を大きくする。一方、下方リスク尺度を用いる場合、ほとんどの(富が大きくなる)パスは、リスク尺度の計算に用いられない。そこで、リスク尺度の計算に不必要(影響の少ない)と思われるパスを1本のパスと考える(グループとして取り扱う)定式化を行い、問題の規模を小さくすることを試みる。ここで、不必要(影響の少ない)と考えられる $W_T^{(i)}$ のパス i の集合を G とし、本数を $|G|$ とする。グループ・パスの発生確率は $\frac{|G|}{T}$ となる。

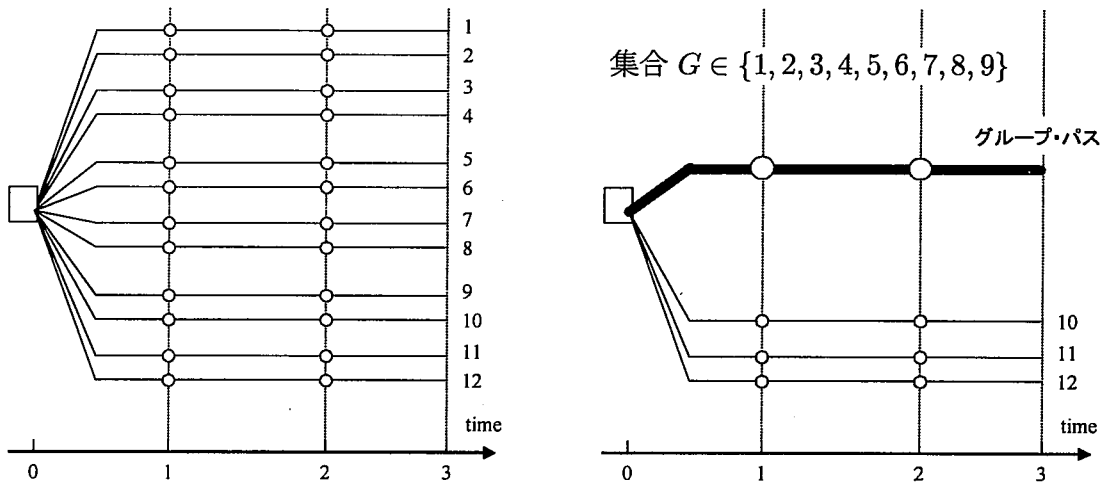


図 19 グループ・パスの設定方法

グループ・パスの設定方法の概略図を図 19 に示す。パスを 12 本とし、リスク尺度の計算に用いるパスを $i = 10, 11, 12$ の 3 本とすると、集合 G は 9 本のパスから構成される。

集合 G に含まれるパスが多ければ多いほど、問題の規模は小さくなるが、その一方で下方リスク尺度の計算に必要なパスが含まれてしまう可能性も生じる。問題の規模(計算時間)と計算精度はトレードオフの関係にあるが、集合 G は問題の特徴に依存して決定されると考えられる。そこで、本節ではこれらの関係を調べるために、まず初めにグループとしてまとめる集合 G が与えられたときのモデルの定式化を示す。そして、数値分析によって、集合 G の設定方法を提案し、その有用性を検証する。

6.1 モデルの定式化

集合 G に含まれるパスに関する取引がまとめて記述される。含まれないパスは従来の定式化と同様である。

$$\text{最大化} \quad V_\beta - \frac{1}{(1-\beta)I} \sum_{i \notin G} q^{(i)} \tag{10}$$

制約条件

$$\sum_{j=1}^n \rho_{j,0} z_{j,0} + v_0 + y_{L,0} u_L + y_{F,U,F,0} = W_{1,0} \tag{11}$$

$$\sum_{j=1}^n \rho_{j,1}^G z_{j,0} + (1+r_0)v_0 + D_1^G = \sum_{j=1}^n \rho_{j,1}^G z_{j,1} + \frac{1}{|G|} \sum_{i \in G} v_1^{(i)} \tag{12}$$

$$\sum_{j=1}^n \rho_{j,1}^{(i)} z_{j,0} + (1+r_0)v_0 + D_1^{(i)} = \sum_{j=1}^n \rho_{j,1}^{(i)} z_{j,1} + v_1^{(i)}, \quad (i \notin G) \tag{13}$$

$$\sum_{j=1}^n \rho_{j,t}^G z_{j,t-1} + \frac{1}{|G|} \sum_{i \in G} (1+r_{t-1}^{(i)}) v_{t-1}^{(i)} + D_t^G = \sum_{j=1}^n \rho_{j,t}^G z_{j,t} + \frac{1}{|G|} \sum_{i \in G} v_t^{(i)}, \quad (t = 2, \dots, T-1) \tag{14}$$

$$\sum_{j=1}^n \rho_{j,t}^{(i)} z_{j,t-1} + (1+r_{t-1}^{(i)}) v_{t-1}^{(i)} + D_t^{(i)} = \sum_{j=1}^n \rho_{j,t}^{(i)} z_{j,t} + v_t^{(i)}, \quad (t = 2, \dots, T-1; i \notin G) \tag{15}$$

$$W_{1,T}^G = \left\{ \sum_{j=1}^n \rho_{j,T}^G z_{j,T-1} + \frac{1}{|G|} \sum_{i \in G} (1 + r_{T-1}^{(i)}) v_{T-1}^{(i)} \right\} + D_T^G \quad (16)$$

$$W_{1,T}^{(i)} = \left\{ \sum_{j=1}^n \rho_{j,T}^{(i)} z_{j,T-1} + (1 + r_{T-1}^{(i)}) v_{T-1}^{(i)} \right\} + D_T^{(i)}, \quad (i \notin G) \quad (17)$$

$$\frac{1}{I} \left(|G| W_{1,T}^G + \sum_{i \in G} W_{1,T}^{(i)} \right) \geq W_E \quad (18)$$

$$W_{1,T}^{(i)} - V_\beta + q^{(i)} \geq 0, \quad (i \notin G) \quad (19)$$

$$z_{j,t} \geq 0, \quad (j = 1, \dots, n; t = 0, \dots, T-1)$$

$$v_0 \geq 0$$

$$v_t^{(i)} \geq L_{v,t}, \quad (t = 1, \dots, T-1; i = 1, \dots, I) \quad (20)$$

$$u_L \geq 0$$

$$u_{F,t} \geq 0, \quad (t = 0, \dots, T-1)$$

$$q^{(i)} \geq 0, \quad (i \notin G)$$

V_β : 符号無制約

ただし,

$$\begin{aligned} \rho_{jt}^G &= \frac{1}{|G|} \sum_{i \in G} \rho_{j,t}^{(i)} \\ D_t^G &= M_t^G + H_t^G - C_t^G - y_{L,t}^G u_L - y_{F,t} u_{F,t} + \tau_{1,t}^G \theta_1 u_L + \tau_{2,t}^G \theta_2 u_{F,t-1} \\ &\quad - \frac{1}{|G|} \sum_{i \in G} \tau_{2,t}^{(i)} \alpha (1 - \gamma) W_{2,t-1}^{(i)}, \quad (t = 1, \dots, T-1) \end{aligned} \quad (21)$$

$$D_T^G = M_T^G + H_T^G - C_T^G + \tau_{1,T}^G \theta_1 u_L + \tau_{2,T}^G \theta_2 u_{F,T-1} - \frac{1}{|G|} \sum_{i \in G} \tau_{2,T}^{(i)} \alpha (1 - \gamma) W_{2,T-1}^{(i)} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} M_t^G &= \frac{1}{|G|} \sum_{i \in G} \tau_{3,t}^{(i)} m_t^{(i)}, \quad H_t^G = \frac{1}{|G|} \sum_{i \in G} H_t^{(i)}, \quad C_t^G = \frac{1}{|G|} \sum_{i \in G} C_t^{(i)} \\ \tau_{1,t}^G &= \frac{1}{|G|} \sum_{i \in G} \tau_{1,t}^{(i)}, \quad \tau_{2,t}^G = \frac{1}{|G|} \sum_{i \in G} \tau_{2,t}^{(i)}, \quad \tau_{3,t}^G = \frac{1}{|G|} \sum_{i \in G} \tau_{3,t}^{(i)} \\ y_{L,t}^G &= f_1 y_{f_1} \tau_{4,t} + (1 - f_1) y_{f_2} \tau_{3,t}^G \end{aligned}$$

である。さらに、各時点において金利が一定(r_t)で、(20)式の $i \in G$ に関して、

$$v_t^G = \frac{1}{|G|} \sum_{i \in G} v_t^{(i)} \geq L_{v,t} \quad (23)$$

という制約式に置き換えれば、 $|G|$ 個の決定変数 $v_t^{(i)}$, ($i \in G$) を 1つの決定変数 v_t^G で表すことができ、さらに問題の規模を縮小させることができる。その場合、(12), (14), (16), (20)式を以下のように書き直す。

$$\sum_{j=1}^n \rho_{j,1}^G z_{j,0} + (1 + r_0) v_0 + D_1^G = \sum_{j=1}^n \rho_{j,1}^G z_{j,1} + v_1^G \quad (24)$$

$$\sum_{j=1}^n \rho_{j,t}^G z_{j,t-1} + (1 + r_{t-1}) v_{t-1}^G + D_t^G = \sum_{j=1}^n \rho_{j,t}^G z_{j,t} + v_t^G, \quad (t = 2, \dots, T-1) \quad (25)$$

$$W_{1,T}^G = \left\{ \sum_{j=1}^n \rho_{j,T}^G z_{j,T-1} + (1 + r_{T-1}^G) v_{T-1}^G \right\} + D_T^G \quad (26)$$

$$v_t^{(i)} \geq L_{v,t}, \quad (t = 1, \dots, T-1; i \notin G) \quad (27)$$

このとき、非負および下限制約式を除く制約式の本数と決定変数の数は以下の通りである。

$$\text{制約式の本数} : T(I - |G| + 1) + 1$$

$$\text{決定変数の数} : T(I - |G| + n + 1) + 3$$

6.3節の数値分析では上記のように金利を一定とし、問題の規模を縮小して分析を行う。

6.2 集合 G の設定方法

集合 G を決めるために、4節で取り扱った世帯の問題に対する最適解の特徴を調べてみよう。リスク資産数は1つである。賃金は確率変動しないと想定しており、死亡事故がない場合には生命保険や遺族年金などは関係なく、消費支出も確率変動しないと想定される。したがって、世帯主が死亡しない場合にはリスク資産収益が最終富に影響を与える主な変動要因と考えられる。そこで、死亡事故が発生しないパスにおける最終富と最終時点でのリスク資産価格の関係を調べると、相関係数は0.987と極めて高く、集合 G にはリスク資産価格の高いパスを含めるとよいと考えられる。リスク資産価格の高いパスの本数をどれだけ含めればよいかを調べるために、最終時点でのリスク資産価格の小さい順にパスを並べた場合のパス数と VaR 以下になるパス数 (CVaR の計算に用いられるパス数) の関係を図20で見てみよう (右図は左図の一部を拡大した図である)。

死亡事故が発生しないパスは、4,492本である。このうち、リスク資産価格の低いパスでは VaR 以下になる可能性が高い。実際、下位1,000本を越えるあたりで VaR 以下になるパスの数は徐々に逓減していき、最終的には1,871本目を越えると VaR 以下になるパスはなくなる。最適化計算後の分析結果であるが、死亡事故が発生しないパスのうち、リスク資産価格の高いパスから数えて2,622 (=4,492 - 1,871 + 1)本は VaR 以下にならないことになり、集合 G の中に含めることができる。

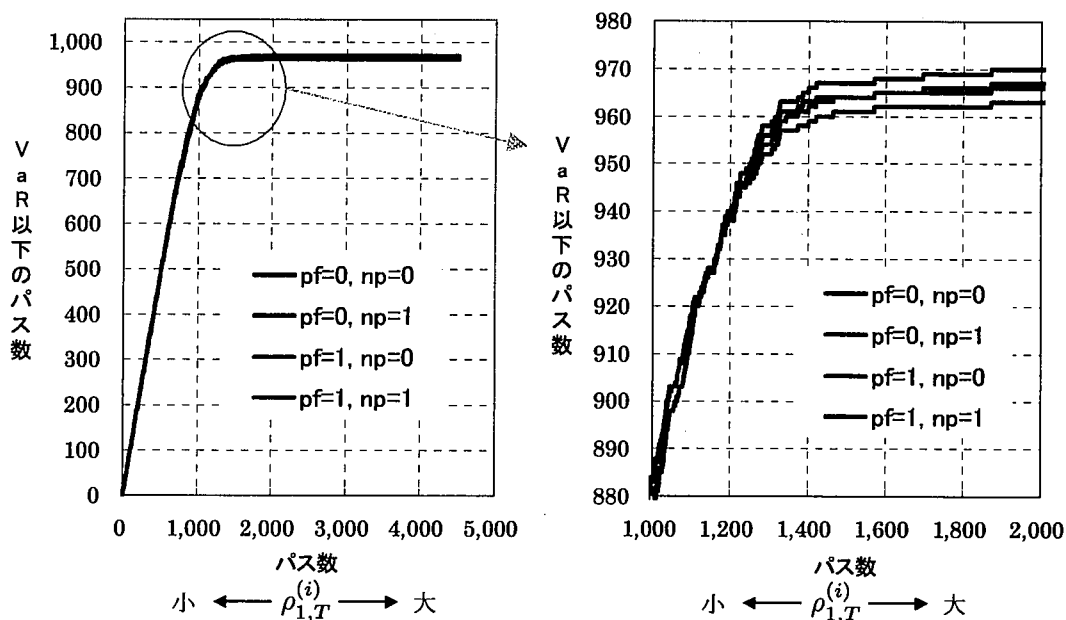


図20 最終時点のリスク資産価格でパスを並べた場合の VaR 以下になるパス数

一方、死亡事故が発生する場合には生命保険や遺族年金が入ってくる代わりに賃金収入がなくなる。4節の分析(図3)から分かるように、世帯主が若いときに死亡すると、生涯賃金収入額も減り、かつ遺族年金額も低いので、年齢が高いときに死亡する場合に比べて最終富は低くなる(世帯主の死亡時点が遅くなるにつ

れて期待最終富は増加する). 図20と同様に, 世帯主の死亡時点順(同時点の中ではリスク資産価格の低い順)にパスを並べた場合のパス数と VaR 以下になるパス数(CVaR の計算に用いられるパス数)の関係を図21で見てみよう(右図は左図の一部を拡大した図である).

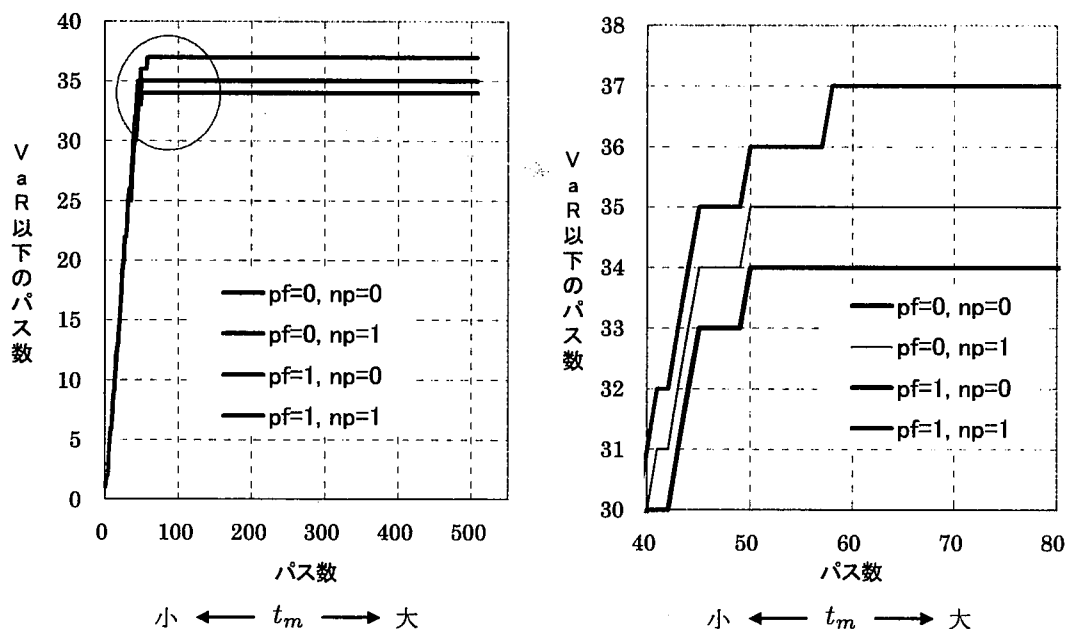


図 21 最終富と死亡事故の関係

世帯主の死亡時点が早いパスでは VaR 以下になる可能性が高いことがわかる. 下位 40 本を越えるあたりで VaR 以下になるパスの数は徐々に遞減していき, 最終的には 60~90 本目を越えると VaR 以下になるパスはなくなる. この数値計算例の場合, 死亡事故の発生件数は 508 本なので, 最適化計算後の分析結果であるが, $t_m = 10, 11$ 以降に死亡する場合には VaR 以下にならないことになり, 集合 G の中に含めることができる¹².

これらの特徴から以下のような手続きで集合 G を決め, パラメータ k_1, k_2 の組み合わせによる計算精度への影響を様々な β に対して調べる¹³.

- ① $t = T_0, T_0 + 1, \dots, T$ の範囲で $\tau_{1,t}^{(i)} = 1$ となるパス i を集合 G に含める. パス数を $|G|_2$ とする. ただし, $T_0 = [(1 - k_2\beta)T + 1]$, $[a]$ は a を超えない最大の整数とする.
- ② さらに, $\tau_{1,t}^{(i)} = 0$ という条件のもとで, $\rho_T^{(i)}$ の大きい i から $|G|_1 = k_1\beta I - |G|_2$ 本を G に含める. k_1 は βI 本の中で G に含める, すなわちリスク尺度の計算から取り除く比率を表す. ただし,

$$\rho_T^{(i)} = \sum_{j=1}^n w_j \rho_{j,T}^{(i)}$$

¹²VaR 以下になるパスの数, それに達するパス数および時点を以下に示す.

pf	np	VaR 以下パス数	達成パス数	達成時点
0	0	34	50	10
0	1	35	50	10
1	0	37	58	11
1	1	37	58	11

¹³ β が大きいほど, 集合 G に含めることができるパスは増加すると考えられるので, 集合 G の決定方法を β に依存させる.

とする。ここでは簡単のため、 $w_j = 1$ とする¹⁴。

この方法により、 $k_1\beta I$ 本のパスが集合 G に含まれる。また、 $k_1 = 0, k_2 = 0$ がグループ・パスを生成しない場合に相当する。

6.3 数値分析

4種類の $\beta (= 0.80, 0.85, 0.90, 0.95)$ 、7種類の $k_1 (= 0, 60, 0.70, 0.75, 0.80, 0.85, 0.90, 0.95)$ に対して問題を解き、最適解を比較する。ここで、 $k_2 = 0.5$ とする。表3に問題の規模を示す。

表3 問題の規模

β	k_1	G	$ G _1$	$ G _2$	制約式		決定変数		
0.80	0.60	2,400	2,043	357	78,031	(52.0%)	78,092	(52.0%)	
	0.70	2,800	2,443	357	66,031	(44.0%)	66,092	(44.0%)	
	0.75	3,000	2,643	357	60,031	(40.0%)	60,092	(40.0%)	*
	0.80	3,200	2,843	357	54,031	(36.0%)	54,092	(36.0%)	*
	0.85	3,400	3,043	357	48,031	(32.0%)	48,092	(32.0%)	*
	0.90	3,600	3,243	357	42,031	(28.0%)	42,092	(28.0%)	*
	0.95	3,800	3,443	357	36,031	(24.0%)	36,092	(24.1%)	*
0.85	0.60	2,550	2,178	372	73,531	(49.0%)	73,592	(49.0%)	
	0.70	2,975	2,603	372	60,781	(40.5%)	60,842	(40.5%)	
	0.75	3,188	2,816	372	54,406	(36.3%)	54,467	(36.3%)	
	0.80	3,400	3,028	372	48,031	(32.0%)	48,092	(32.0%)	
	0.85	3,613	3,241	372	41,656	(27.8%)	41,717	(27.8%)	*
	0.90	3,825	3,453	372	35,281	(23.5%)	35,342	(23.6%)	*
	0.95	4,038	3,666	372	28,906	(19.3%)	28,967	(19.3%)	*
0.90	0.60	2,700	2,328	372	69,031	(46.0%)	69,092	(46.0%)	
	0.70	3,150	2,778	372	55,531	(37.0%)	55,592	(37.0%)	
	0.75	3,375	3,003	372	48,781	(32.5%)	48,842	(32.5%)	
	0.80	3,600	3,228	372	42,031	(28.0%)	42,092	(28.0%)	
	0.85	3,825	3,453	372	35,281	(23.5%)	35,342	(23.6%)	
	0.90	4,050	3,678	372	28,531	(19.0%)	28,592	(19.1%)	*
	0.95	4,275	3,903	372	21,781	(14.5%)	21,842	(14.6%)	*
0.95	0.60	2,850	2,463	387	64,531	(43.0%)	64,592	(43.0%)	
	0.70	3,325	2,938	387	50,281	(33.5%)	50,342	(33.5%)	
	0.75	3,563	3,176	387	43,156	(28.8%)	43,217	(28.8%)	
	0.80	3,800	3,413	387	36,031	(24.0%)	36,092	(24.1%)	
	0.85	4,038	3,651	387	28,906	(19.3%)	28,967	(19.3%)	
	0.90	4,275	3,888	387	21,781	(14.5%)	21,842	(14.6%)	*
	0.95	4,513	4,126	387	14,656	(9.8%)	14,717	(9.8%)	*

※ 制約式と決定変数のかつこ内はオリジナル問題に対する比率を表す

オリジナルの問題が解かれた結果、 $\beta = 0.80$ では $|G|_1$ が 2,622 本、 $\beta = 0.85$ では $|G|_1$ が 3,165 本、 $\beta = 0.90$ では $|G|_1$ が 3,499 本、 $\beta = 0.95$ では $|G|_1$ が 3,694 本を越えるとリスク尺度の計算に使われな

¹⁴数値計算例では $n = 1$ なので、 $\rho_T^{(i)} = \rho_{1,T}^{(i)}$ である。

ればならないパスが集合 G に含まれることが分かっている。該当するケースの最右列に * を付与している。
 $\beta = 0.8$ に対する結果を図 22 に示す。左図は目的関数値 (CVaR)、右図は計算時間である。 $k_1 = 0$ の値はオリジナル問題の最適解を表す。 $k_1 = 0.6, 0.7$ の場合にはオリジナル問題の最適解を得ることができる。

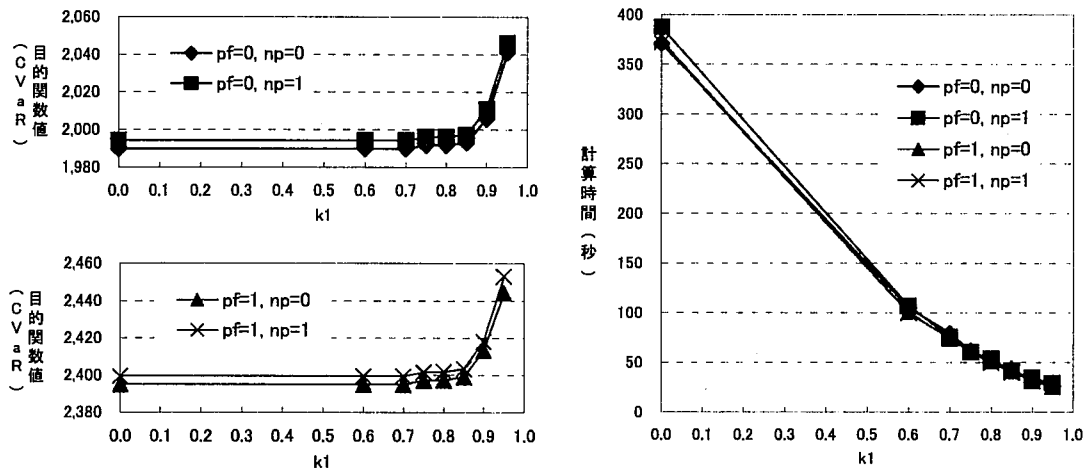


図 22 目的関数値と計算時間 ($\beta = 0.8$)

$k_1 = 0.75, 0.80, 0.85$ の場合、オリジナル問題と最適解は異なるが、目的関数値はほとんど変わらない。しかし、 $k_1 = 0.90, 0.95$ の場合には明らかに目的関数値は上昇し、過大評価をすることになる。この理由は表 3 から分かるように、 $k_1 = 0.75$ 以上ではリスク尺度の計算に影響を与えるパスを集合 G の中に含むからである。一方、計算時間は k_1 の大きさに比例して削減している。オリジナル問題の計算時間はおよそ 370 秒であるが、 $k_1 = 0.7$ の場合にはおよそ 75 秒と、20% に削減される。

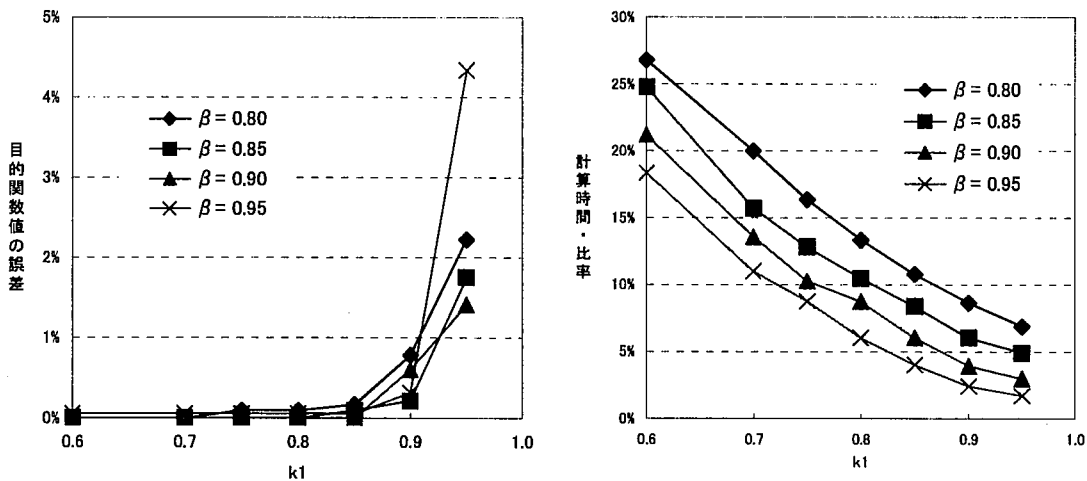


図 23 目的関数値の誤差および計算時間の比率

次に、 $pf = 1, np = 1$ の場合の 4 種類の β に対する結果を図 23 に示す。左図はオリジナル問題に対する目的関数値 (CVaR) の誤差、右図は計算時間の比率を示す。 $\beta = 0.95$ のとき、 $k_1 = 0.6$ でも 0.055% の誤差が生じている。この理由は、リスク尺度の計算に影響を与えるパスを集合 G の中に含むからではなく、(20) 式の $i \in G$ に関して、(23) 式に変更したことによるものである。具体的にはオリジナル問題の最適解が $v_t^{(i)*} = L_{v,t}$ となるパス i が集合 G の中に含まれた結果、誤差が生じている¹⁵。一方、計算時間は β が

¹⁵制約式を変更しなければ、同じ最適解が得られるが、問題の規模が大きくなる。

大きくなるにつれて、集合 G に含まれるパスの数が増えるため、計算時間の削減効果が大きくなる。

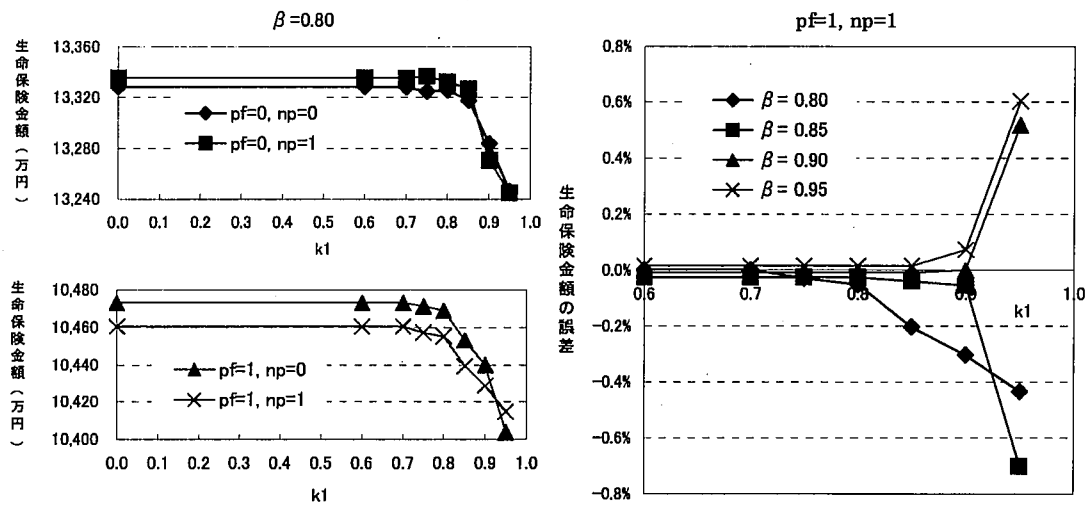


図 24 最適生命保険金額

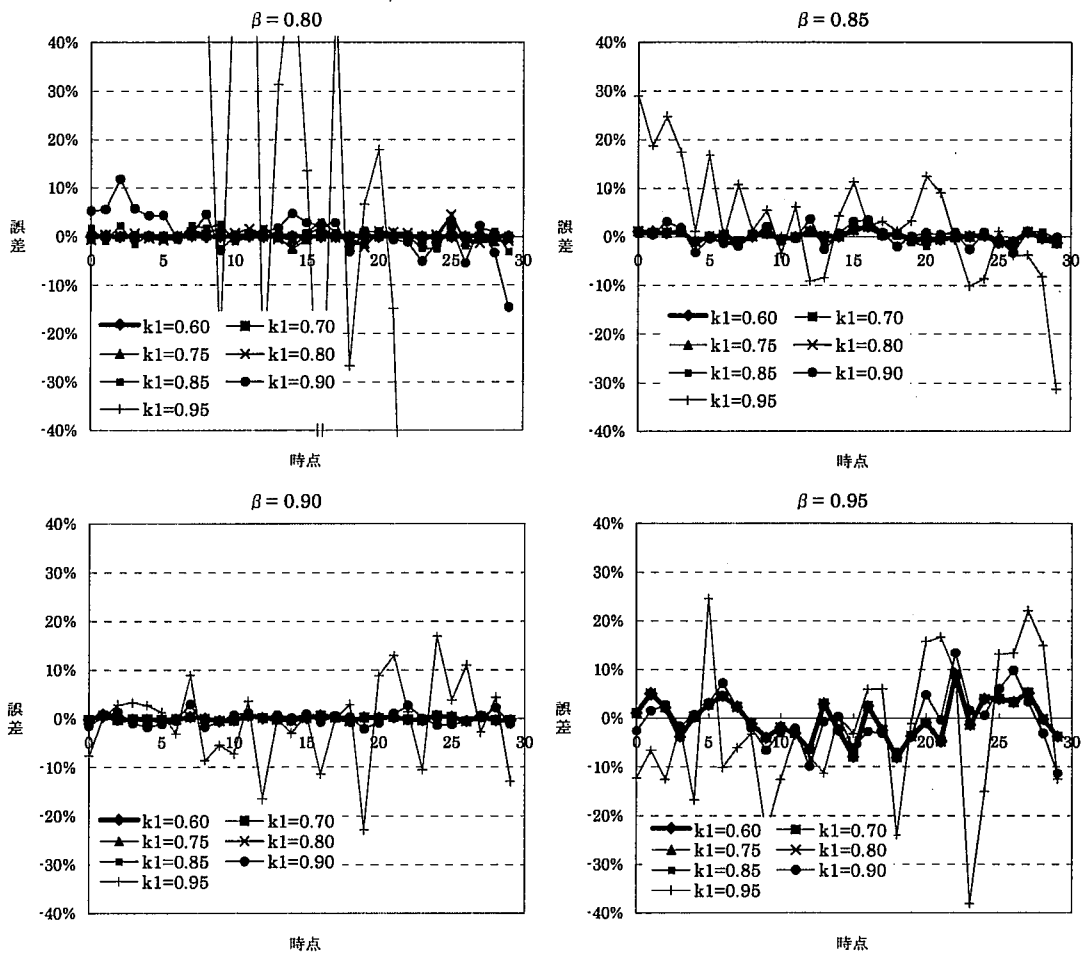


図 25 リスク資産・投資単位数の誤差 ($pf = 1, np = 1$)

最適生命保険金額を図24に示す。左図は $\beta = 0.8$ に対する最適金額，右図は $pf = 1, np = 1$ の場合の4種類の β に対する誤差を表す。目的関数値(CVaR)と同様に， $k_1 = 0.90, 0.95$ のときに大きな誤差が生じているが， $\pm 1\%$ の範囲に収まっている。

4種類の β に対するリスク資産の投資単位数の誤差を図25に示す。目的関数値(CVaR)や生命保険金額と同様に， $k_1 = 0.90, 0.95$ のときに大きな誤差が生じている。 $\beta = 0.80$ で， $k = 0.95$ のときは極めて大きな誤差となり， $\beta = 0.95$ の場合には，全体的に10%程度の誤差が生じる。

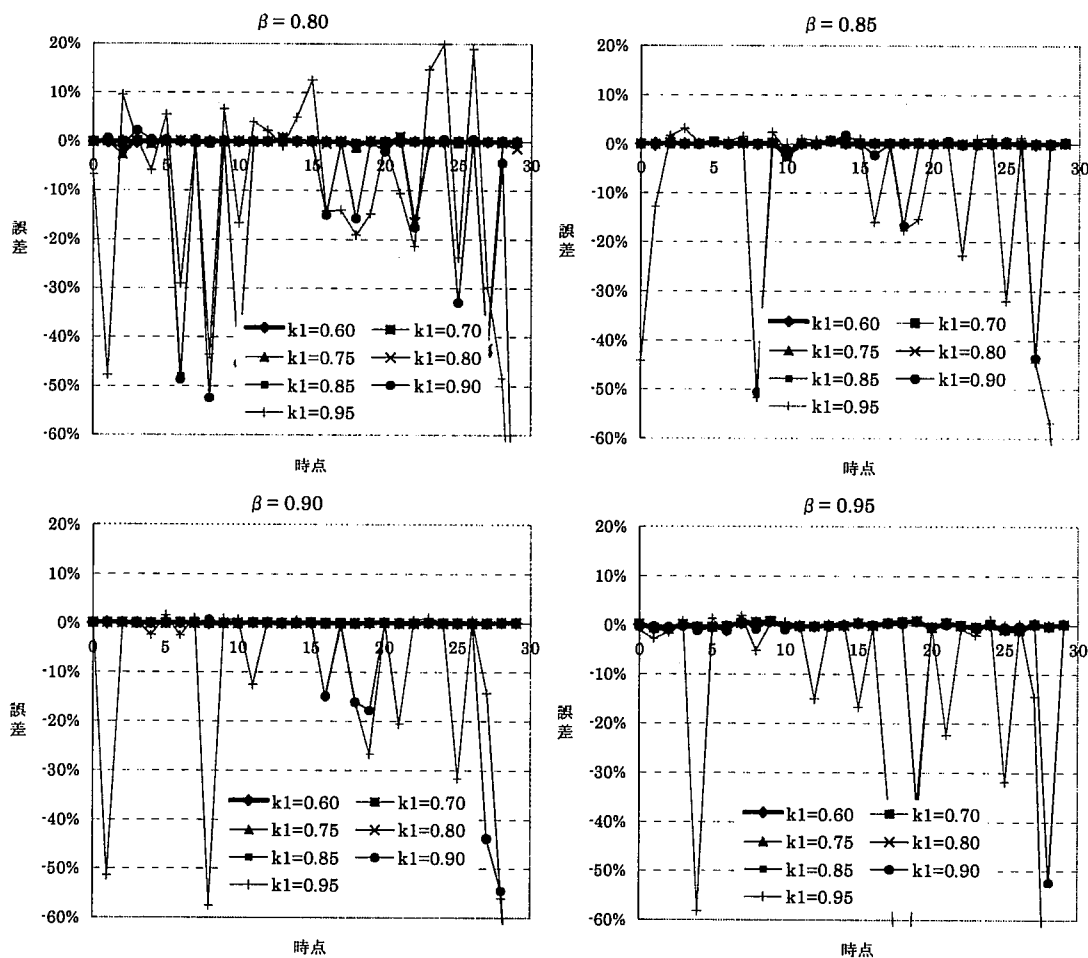


図26 火災保険金額の誤差($pf = 1, np = 1$)

図26によって，火災保険金額の誤差を調べると， $\beta = 0.80$ のとき， $k_1 = 0.75$ 以上で $t = 27$ において約 -40% の誤差が生じ， $k_1 = 0.85$ 以上で $t = 29$ において -100% の誤差が生じている。リスク尺度の計算に影響を与えるパスが集合 G の中に含んだとしても，それほど目的関数値や生命保険金額に影響は与えないが，火災保険金額には大きな影響を与えることが分かる。

そこで，最適火災保険金額はほぼ非金融資産保有額の α 倍となるという関係を利用して($u_{F,t} = \alpha W_{2,t}$ として問題を解いて)，目的関数値を悪くすることなく，この誤差をなくすことを考えよう。目的関数値，生命保険金額の誤差を図27に，リスク資産の投資単位数の誤差を図28に示す。

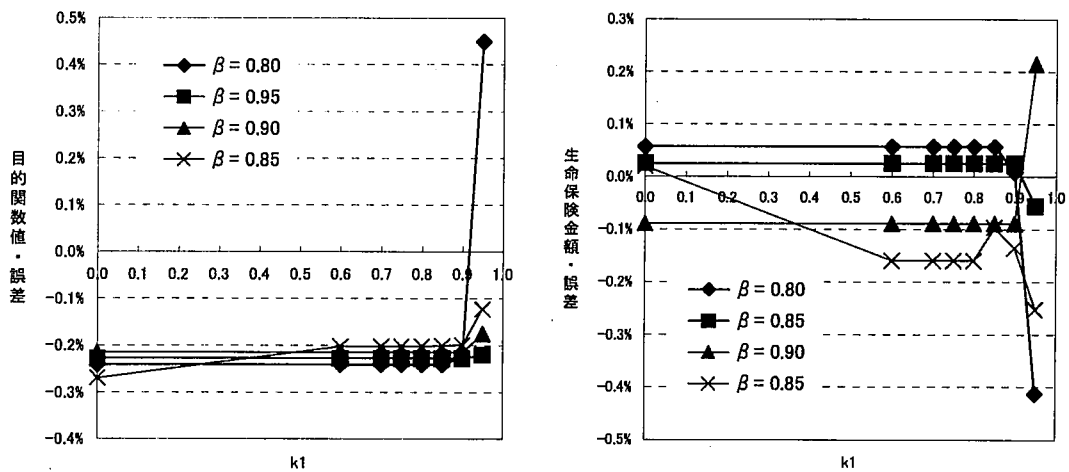


図 27 目的関数値および最適生命保険金額の誤差

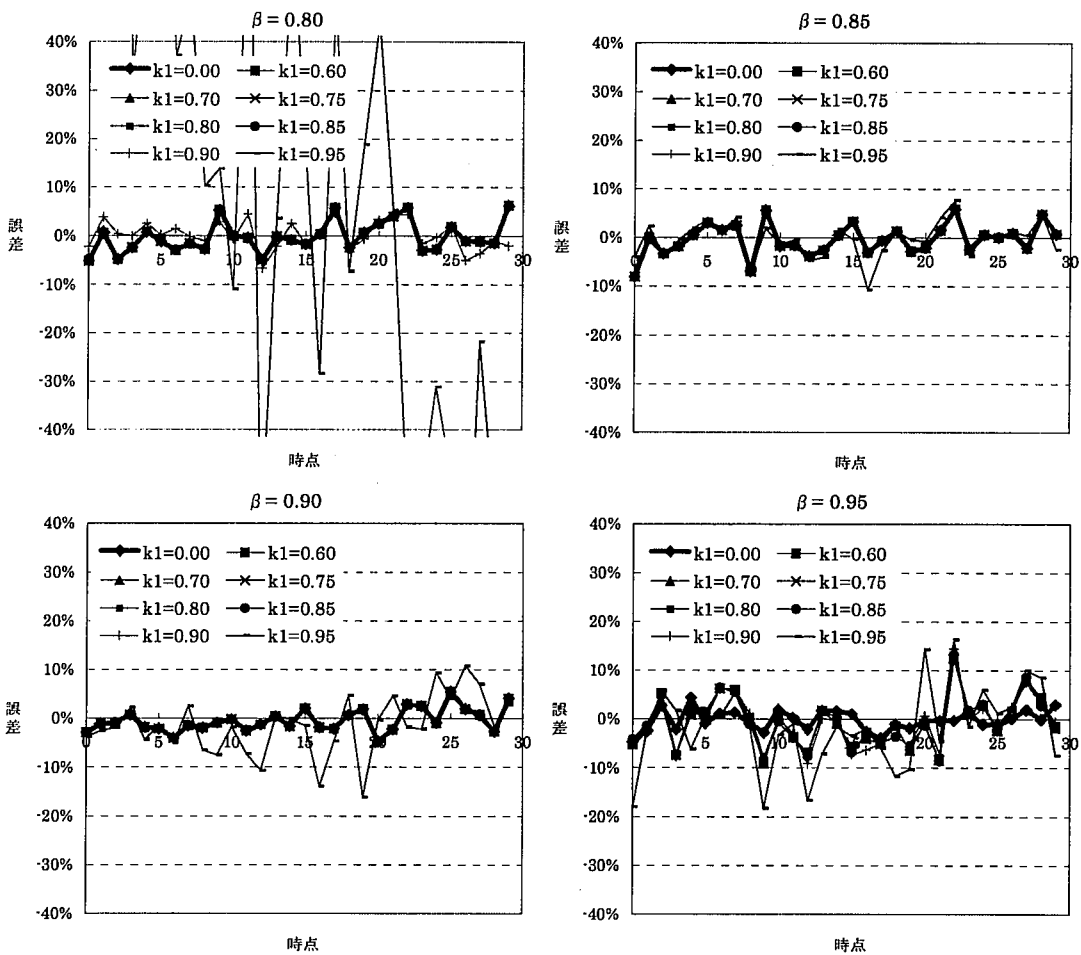


図 28 リスク資産・投資単位数の誤差 ($pf = 1, np = 1$)

目的関数値、生命保険金額の誤差は $\pm 0.5\%$ 以内である。リスク資産の投資単位数の誤差も全体的には増加しているが、最大誤差は減少している。

7 おわりに

本研究では枇々木, 小守林, 豊田 (2005) の多期間最適資産形成モデルに対するより実践的なモデルを構築するために, モデルの拡張および数値分析を行った。

世帯主の死亡に伴い, 世帯の収入と支出の構造は大きく変化する。より現実的なキャッシュ・フローのもとで分析するために, ① 遺族年金の受け取り, ② 住宅ローンの返済免除, ③ 生活レベルの変更, の3点を加えたモデル化の方法を示した。遺族年金を受け取ることができれば, 生命保険加入金額を低く抑えることができる一方で, 住宅ローンの返済免除は目的関数値や生命保険加入金額にほとんど影響を与えなかった。この理由は住宅購入前に世帯主が死亡してしまうと, 住宅ローンは返済免除にならないからである。ただし, 住宅ローンの返済免除を受けた場合には最終時点での富は改善される。また, 生活レベル(消費水準)を下げると, 目的関数が改善するとともに生命保険加入金額も低く抑えることができる。生命保険の主な機能は貸金収入に対するリスクヘッジであり, この一部が, 消費を抑えることで代替可能だからである。このように本研究で追加した要因は資産形成に大きな影響を与え, モデル構築に重要な要因であることが分かる。

世帯主が死亡すると死亡保険金が現金で入ってくるので, 条件付きの資産運用に変えた方がより現実的な意思決定が行えると考えられる。そこで, 世帯主が死亡してからの経過時間に依存して運用を行う方法を示し, 数値分析によってこの効果を検証した。死亡時には, 受け取った多額の生命保険金(現金)の一部をより多くのリスク資産へ投資する一方, 生存時には現金を受け取ることができないので, 死亡時に比べてリスク資産へ投資しないという意思決定をするという直感に合う結果が得られた。この結果はより現実的な運用方法であると考えられ, 従来のシミュレーション型モデルに新たな条件付き意思決定の枠組みを入れることによって, より適切な意思決定を行えることが分かった。

住宅を購入することは世帯にとって大きな買い物であり, 一大イベントである。これらに関するパラメータである住宅購入時点, 頭金, 住宅ローン金利, 借入期間の条件を変更したときの影響を調べるために, 感度分析を行った。これらの条件も最適解に大きな影響を与えることが分かった。

さらに, 最適化問題を高速に解くために, グループ・パスを用いたモデルの定式化を示すとともにグループ化の方法も提案し, 数値分析を行った。ほとんど最適解を劣化させることなく5倍程度, 最大で10倍程度は高速化できることを示した。

数値分析に用いた世帯は現実的な世帯であり, 得られた結果も現実的な感覚と一致する結果である。拡張されたモデルは従来のモデル以上に, より適切に最適な保険加入戦略や投資戦略を求めることができ, ファイナンシャル・コンサルティング実務へ適用することができるであろう。また, 計算を高速化させることによって, 顧客のリクエストに即座に対応するコンサルティングを行うことも期待できる。

参考文献

- [1] 枇々木規雄(2001a), 「金融工学と最適化」, 朝倉書店。
- [2] 枇々木規雄(2001b), 「戦略的資産配分問題に対する多期間確率計画モデル」, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, Vol.44, No.2, pp.169-193.
- [3] 枇々木規雄, 小守林克哉, 豊田暢子(2005), 「多期間最適化手法を用いた世帯の資産形成モデル」, *JARIP ジャーナル*, Vol.1, No.1, pp.45-68.
- [4] 吉田靖, 山田泰之, 枇々木規雄(2002), 「家計の金融資産配分問題に対する多期間最適化モデル」, 慶應義塾大学理工学部管理工学科 テクニカルレポート, No.02-003.
- [5] 金融広報中央委員会(2003), 「家計の金融資産に関する世論調査」, <http://www.saveinfo.or.jp/kinyu/yoron/2003/03yoron.html> .

- [6] 厚生労働省 (2003), 「賃金構造基本統計調査 (平成 15 年)」,
<http://www.dbtk.mhlw.go.jp/toukei/kouhyo/indexk-roudou.html> .
- [7] 社団法人日本アクチュアリー会 (1996), 「生保標準生命表 (1996) の作成過程」 .
- [8] 総務省 (2000), 「全国消費実態調査 (平成 11 年)」,
<http://www.stat.go.jp/data/zensho/1999/021index.htm> .
- [9] 文部科学省 (2003), 「こどもの学習費調査 (平成 14 年)」,
http://www.mext.go.jp/b_menu/toukei/001/006/03121101.htm .
- [10] 文部科学省 (2003), 「学生生活調査 (平成 14 年)」,
http://www.mext.go.jp/b_menu/houdou/16/04/04040702.htm .
- [11] Bodie, Z. and D.B. Crane (1997), “Personal Investing: Advice, Theory, and Evidence”, *Financial Analyst Journal*, Vol.53, No.6, pp.13–23.
- [12] Bodie, Z., R.C. Merton and W. Samuelson (1992), “Labor Supply Flexibility and Portfolio Choice in a Life-Cycle Model”, *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol.16, No.3-4, pp.427–449.
- [13] Chen, P., R.G. Ibbotson, M.A. Milevsky, and K.X. Zhu (2006), Human capital, asset allocation, and life insurance, *Financial Analysts Journal*, Vol.62, No.1, pp.97–109.
- [14] Merton, R.C. (1969), “Lifetime Portfolio Selection Under Uncertainty: The Continuous-Time Case”, *Review of Economics and Statistics*, Vol.51, No.3, pp.247–257.
- [15] Merton, R.C. (1971), “Optimum Consumption and Portfolio Rules in a Continuous-Time Model”, *Journal of Economic Theory*, Vol.3, No.4, pp.373–413.
- [16] Samuelson, P.A. (1969), “Lifetime Portfolio Selection by Dynamic Stochastic Programming”, *Review of Economics and Statistics*, Vol.51, No.3, pp.239–246.
- [17] Rockafellar R,T and S.Uryasev (2000) “Optimization of conditional value-at-risk”, *Journal of Risk*, Vol.2, No.3, pp.21–41.
- [18] Ziemba, W.T. and J.M. Mulvey (1998), “Worldwide Asset and Liability Modeling”, Cambridge University Press.