研究論文

共働き世帯の投資と消費および生命保険加入に関する最適計画

鈴木 輝好*

2006年3月15日投稿
2006年8月28日受理

概要

世帯主に加えて収入のある配偶者も生命保険に加入する場合が多い．また，一方の死亡は，その後の遺族の収入を変化させ，保険加入や資産運用の戦略を変化させる．本論文では，夫婦の一方が死亡した後の遺族の最適な戦略を考慮に入れた二段階のダイナミック・プログラミングを行う．そして，夫婦の生命保険加入と世帯の消費および資産運用に関する最適戦略を解析的に導出する．簡単な数値例から，いくつか常識と異なる結果を得た．例えば，効用関数の設定に依存するとはいえ夫婦の間に収入差がある場合，相対的に収入の小さい個人はたとえ十分な収入を得ていても生命保険ではなく年金に加入するのが最適であることが分かった．

キーワード： 生命保険，個人年金，消費投資問題

1 はじめに

個人の消費と投資の計画を扱った研究は Marshall (1920) および Fisher (1930) まで遡る．手元にある富について，現時点でいくらを消費し，いくらを投資（ここでは預金）することが最適であるかを一期間モデルを用いて分析した．現時点における追加的な1単位の消費から得られる効用の増加分が，この消費分を貯蓄することにより得られる将来時点の消費の現時点での効用の増加分と等しくなるような消費が最適な政策となることが示された．また，Yaari (1965) は Fisher (1930) および Marshall (1920) の消費計画問題において個人の余命には不確実性があることを考慮に入れ生命保険の存在するモデルを提示した．一方，Markowitz (1959) は，無リスク預金と多種類の株式が存在する市場において投資家はどのような組み合わせを選択すべきか（ポートフォリオ選択問題）を一期間モデルを用いて示した．これと同時期に Tobin (1958) は，最適なリスク資産の選択は投資家の効用によらないとする “mutual fund theorem”（Tobin の分離定理とも呼ばれる）を示しており，後に CAPM として定式化された．すなわち，すべての投資家はリスク資産に関して同じ構成比を持つポートフォリオを保有することが合理的となり，そのポートフォリオは接点ポートフォリオあるいは市場ポートフォリオと呼ばれた．この結果を消費投資計画問題の視点から見ると，消費の量の変化は投資の量には影響を与えるけれども，リスク資産の選択問題には影響を与えないということを意味する．結局，消費投資の選択問題と投資資産の選択問題はある条件の下では個別に扱えば良い．

以上のような考え方は伝統的に存在するフィナンシャルプランナーの存在意義を無くしてしまう．どのような個人投資家もすべからく同じ比率のリスクポートフォリオを保有することが最適だからである．しかし，実際には投資家によりリスク資産の構成は異なり，またそれは，個々人の置かれた状況により異なるはずである．

* 北海道大学大学院経済学研究科 〒060-0809 札幌市北区北9条西7丁目 mail: suzuki@econ.hokudai.ac.jp.

例えば，余命，収入の量，保有する不動産の流動性，資産の量により変化する税制などである．このような考え方を支持する多くの結果が，Merton (1969,1971) により定式化された消費投資問題を基本的な土台として数多く発表された．Merton (1969,1971) は個人の消費とポートフォリオ選択の問題を連続的な多期間の問題として定式化し，最適な消費投資の政策を確率制御問題の解として与えた．その結果得られるリスク資産の保有政策は一期間モデルと同一のものである．しかし，後に Merton (1973) は，現時点と将来で投資機会が異なる場合，最適な資産選択は CAPM の結果とは異なることを示した．個人投資家にとっては，投資資金の最大化ではなく，富を消費することから得られる効用の最大化が目的となる．このことに加えて個人投資家は投資期間が長期になるので，投資機会の変動にさらされる．効用関数を伴う上に数学的な難しさが原因となり，Merton(1969, 1971, 1973) に関する実証的な研究は少ないが，逆に，理論的な研究は数多く進められている．

投資機会の不確実性の一つに金利の不確実性やインフレーションの可能性がある．Munk and Sorensen (2004) は，リスクの市場価格とフォワードレートのボラティリティ関数が確定的であることを条件として，消費投資問題を解いた．消費計画に沿った利付債のポートフォリオを購入することが最適であることを示し，また金利モデルとして Vasicek (1977) およびマルコフ性を仮定した Heath, Jarrow and Morton (1992) の双方を比較することで，最適政策は金利モデルのダイナミクスよりも金利の期間構造の影響を強く受けることを示した．また，Campbell and Viceira (2001) は長期運用を行う投資家にとって，短期債にはロールオーバーリスクがあることに着目し，離散的多期間モデルを用いて消費をともなう長期投資家の最適政策を考察した．長期投資家にとっては，無リスクで消費を賄うインフレ連動債こそが最適であることを主張している．消費を考慮してはいないものの同様の研究に Brennan and Xia (2000) がある．彼らは Canner, Mankiw and Weil (1997) がアセットアロケーションパズルと呼んだ問題[*1]は投資家の投資ホライズンが原因であるとし，また株式と長期債および短期債の投資ミックスに関する解析解を示した．その結果は，Merton (1973) の示したように，短期的な投資家にとっての最適なポートフォリオと異時点間の投資機会の不確実性をリスクヘッジする調整項から成る．

さらに，投資機会の不確実性には労働所得がある．確定的な労働収入のあるケースについては，Merton (1971) が扱っており，将来の労働収入は無リスク資産の保有と同等であることを示した．すなわち，確定的な労働収入はリスク資産の保有割合を増加させる．しかし，一般に労働収入は不確実であり市場リスクと相関する場合もある．さらには取引できないことを前提とする必要があり，リスクヘッジできないケースも存在するであろう．Svensson and Werner (1993) はいくつかの資産が取引できない場合のポートフォリオ選択と価格付け問題について論じた．消費投資問題においては，労働所得が取引できない上に不完全にしかヘッジできないケースについて，解析的な政策を示した．その結果は，Merton (1971) の解に不完全ヘッジの影響からなる項を加えた形式を取った．ただし，投資家の効用として CARA(Constant Absolute Risk Aversion) 型（指数型効用）を仮定しており，これは暗に取引できない資産の価格が富の水準に依存しないことを仮定している．一般にリスク資産の需要は富の水準に依存すると考えられるため，投資消費問題では，CRRA(Constant Relative Risk Aversion) 型（べき型効用）が望ましい．例えば，Koo(1998) は，流動性に制約があり，また労働所得が確率的な場合の投資消費問題を CRRA 型の効用関数の下で扱った．最適な政策の存在を示し，市場が完備である場合に比べて，投資家のリスクトレランスは低下することを示した．また，このタイプの問題に関する解析解は未解決の問題であることを指摘している．Cuoco (1997) は同様の結果をマルチンゲールの表現定理を用いて示している．

労働所得の不確実性に加えて，その柔軟性を考慮した投資消費問題が Bodie, Merton and Samuelson (1992) により提起された．多くの個人は労働時間や副業または退職に関する決定について自らの裁量があること，すなわち，労働供給の柔軟性は資産配分に重大な影響を与えることが示された．労働に関する高い柔軟性はリスク許容度を上昇させる．

[*1] 現実の投資家は Tobin の分離定理とは異なるポートフォリオを保有しており，その原因が説明できないとした．

この他に，投資消費問題において流動性の小さい不動産を保有することの影響を論じたものとして，Brueckiner (1997), Caulet and Pvlov (2005) がある．日本的な慣習の下では大きな問題である．またGrossman and Laroque (1990) は，売買コストのかかる耐久消費財のみを消費の対象とした投資消費問題を分析した．そして，証券と耐久消費財の比率を一定割合に保つ最適戦略を示した．Damgaard, Fuglsbjerg and Munk (2003) は Grossman and Laroque (1990) による結果に非耐久消費財を加える拡張を行い，耐久消費財の取引コストの影響を論じた．そして，取引コストの最適戦略に与える影響は非耐久消費財が存在しない場合に比べて小さくなることを示した．ある条件の下では，コストのかかる耐久消費財の消費がコストのかからない非耐久消費財へ置き換えられるためである．また，生活の最低水準を維持することを前提とした消費投資問題が Rubinstein (1976a,b) において考察されている．そこでは消費と最低生活水準との差に対して効用が定義された．また，Lax (2001) は，Constantinedes (1990) により示された生活水準が過去の消費の平均値に依存するモデルを単純化し，過去の消費に依存して変化する生活水準の下で投資消費問題を扱った．

さて，本研究は，以上のよう進められている投資消費問題の研究に関する一つの拡張であり，生命保険の存在を考慮するものである．先行研究としては Richard (1975) がある．彼は CRRA 型の効用を持ち余命のある投資家の投資消費問題に関する解析解を確定的な労働収入と生命保険の存在の下で示した．また，Purcal and Piggott (2001) は，Richard (1975) を確率的な労働収入を含むモデルへと拡張し，これを数値的に解いた．その際，日本市場における数値例を示した．小守林 (2001) は一時払い定期保険を考慮して Merton (1971) を拡張し，解析解を示した．保険加入戦略が初期時点にのみ許される静的なモデル化を行っており，Richard (1975) や本論文とは異なる．さらに枇々木・小守林・豊田 (2005) は，家計には生命保険や火災保険の支払があることを考慮に入れ，より現実的な投資意思決定問題をシミュレーションにより解いた．

本研究では Richard (1975) のモデルを収入のある二人が形成している世帯へと拡張する．多くの世帯では，収入のある個人が合同の資産形成を行い，両者（あるいは一方）が生命保険へ加入することにより遺産の確保を行っている．また，どちらか一方が死亡した場合には，生命保険金が得られるばかりでは無く，残された遺族の収入プロファイルが変化する場合が多い．たとえば，遺族年金の受け取り，共同で営む事業の縮小，子育てに関する費用発生に伴う実質的な収入の減少がそれである．したがって，一方が死亡した時点で遺族は，残された期間に関する消費と投資および生命保険加入の最適計画の見直す必要がある．本論文では，遺族の最適計画をも含めた現時点での世帯にとっての最適な消費投資保険計画を導出する．ただし，労働収入については確定的であると仮定する．これは本研究の目的が生命保険の最適な加入戦略の導出であり，収入が死亡により突如途絶えるリスクにのみ着目しているためである．また，Campbell and Viceira (2002) は労働収入の不確実性が資本市場の不確実性に比べて低い場合，労働収入の不確実性が消費投資問題に与える影響は小さいことを指摘している．

本論文の構成は次の通りである．まず，2 章において本研究の基礎となる Richard(1975) の結果を示し，その後これを夫婦（世帯）の問題に拡張する．3 章においては数値例を用いて最適な保険加入に関する議論を進める．最後に 4 章で結論を述べる．

2 モデル

2.1 設定

モデルの基本的な仮定は Richard (1975) を踏襲する．市場には無リスク預金とリスクのある株式が一種類だけ存在すると仮定する．無リスク預金は確率微分方程式

$$dS_0(t) = rS_0(t)dt, \quad t < T$$

に従い，また株式は

$$dS(t) = \alpha S(t)dt + \sigma S(t)dB(t), \quad t < T$$

に従うとする．ただし，$T < \infty$ は死亡時刻の上限である．また $B(t)$ は実確率測度 P の下での標準ブラウン運動である．以下では全ての議論を実確率測度 P の下で行う．

まず，個人の予算制約を示す．個人は無リスク預金に $1 - w(t)$, 株式に $w(t)$ の割合で投資するとする．また，時刻 t における消費を $C(t)$，個人の収入を $Y(t)$ とし，個人の支払う生命保険料を $P(t)$ とする．本論文で扱う生命保険は単年度更新型の団体定期保険を単純化したものである．保険期間は瞬間的な微少時間であり，加入者は連続的に加入できる．また，被保険者の死亡時刻 τ は，ポアソン過程 $N(t)$ による最初のイベントにおいて発生するものとし，そのときの保険金を $\theta(t)$ とする．ただしポアソン過程 $N(t)$ とブラウン運動 $B(t)$ は互いに独立であると仮定する．

このようにすると，個人の富 $W(t)$ は確率微分方程式

$$dW(t) = \Big(- C(t) - P(t) + Y(t) + rW(t) + w(t)(\alpha - r)W(t) \Big) dt + \sigma w(t)W(t)dB(t) + \theta(t)dN(t),$$
$$t < T, W(0) = W_0 \tag{1}$$

に従う．ここで保険料について補足しておく．一般に保険料は正であるが，本論文では保険料が負値となることを許容する．保険料が負となる場合は，定期保険の売りポジションすなわち生存保険契約を表す．被保険者が生存する限りにおいて家計は正のキャッシュフロー $(-P(t))$ を受け取り，死亡時に $\theta(t)$ を支払う．いま，この契約は連続的に締結されるので，家計はあらかじめ保険会社に年金原資 $\theta(t)$ を預けておき，生存する限りにおいて年金 $P(t)$ を受け取ると捉えても良い．すなわち年金保険料 $\theta(t)$，加入年金額 $P(t)$ の年金保険と解釈できる．

次に生命保険契約のリスクプレミアムについて示す．保険加入者が現在時刻 t において生存していることを条件として次の微小期間において死亡する率，すなわち保険加入者のハザード率（死力）を $\lambda(t)$ と表すことにする．このとき，保険加入者の生存関数 $G(t)$ は

$$G(t) = P\{\tau > t\} = \exp\left\{ - \int_t^T \lambda(u)du \right\}$$

により表される．ここで，生命保険の瞬間的なリスクプレミアムを $\eta(t)$ とすると，保険金額 $\theta(t)$ と保険料 $P(t)$ は次の式

$$\theta(t) = \frac{P(t)}{\mu(t)}$$

を満たす．ただし

$$\mu(t) = \lambda(t) + \eta(t)$$

とした．また，累積リスクプレミアム $H(t)$ として

$$H(t) = \int_t^T \eta(u)du$$

を定義しておく．

2.2 基本モデル (Richard (1975))

以上のような設定の下で Richard (1975) は個人の消費と投資および生命保険加入に関する最適制御問題を次のように定式化した．

$$\max_{C(t),P(t),w(t),0\le t\le T} E_0 \left[\int_0^\tau U(C(s), s)ds + B(Z(\tau), \tau) \right] \tag{2}$$

ここで，E_t は時刻 t を条件とする期待値を表す．また，$U(C(t),t)$ は消費に関する効用関数であり，$Z(t)$ は遺産，$B(Z(t),t)$ は遺産に関する効用関数を表す．ただし $U(C(t),t)$ は $C(t)$ に関して凹関数であり，また $B(Z(t),t)$ は $Z(t)$ に関して凹関数であると仮定する．

最適制御問題 (2) の焦点は，現時点から死亡時点 τ までの消費額と死亡時点 τ における遺産との最適なバランスを見つけることである．そして，そのバランスは各々の効用の大きさ $\int_0^\tau U(C(s),s)ds$ と $B(Z(\tau),\tau)$ とによって計測される．したがって，実務上の最も大きな問題は，消費と遺産に対する効用関数の設定である．この点については 3.1 節において詳しく述べる．

さて，最適制御問題 (2) は Merton (1969) と同様に解析的に解くことができる．以下に効用関数 C,B を次の式

$$U(C(t),t)=\frac{h(t)}{\gamma}C(t)^\gamma,\quad B(Z(t),t)=\frac{m(t)}{\gamma}Z(t)^\gamma$$

に設定した場合の Richard (1975) の結果を示す．

まず，最適制御問題 (2) を予算制約 (1) の下で解くために，最適値関数

$$J(W(t),t)=\max_{C(t),P(t),w(t),t\le\tau}E_t\left[\int_t^\tau U(C(s),s)ds+B(Z(\tau),\tau)\right] \tag{3}$$

を導入する．するとダイナミックプログラミングの原理から $J(W(t),t)$ は次のハミルトン・ヤコビ・ベルマン方程式（以下 HJB 方程式）

$$\begin{aligned}0=\max_{C(t),w(t),P(t)}&\Bigg[\lambda(t)(B(Z(t),t)-J(W(t),t))+U(C(t),t)\\&+\Big(rW(t)-C(t)-P(t)+Y(t)+w(\alpha-r)W(t))\Big)\frac{\partial J}{\partial W}+\frac{1}{2}\sigma^2w(t)^2W(t)^2\frac{\partial^2 J}{\partial W^2}+\frac{\partial J}{\partial t}\Bigg]\end{aligned}$$

を満たす．ここで，

$$\begin{aligned}\phi(C(t),w(t),P(t);W(t),t)=&\lambda(t)(B(Z(t),t)-J(W(t),t))+U(C(t),t)\\&+\Big(rW-C(t)-P(t)+Y(t)+w(\alpha-r)W(t))\Big)\frac{\partial J}{\partial W}\\&+\frac{1}{2}\sigma^2w(t)^2W(t)^2\frac{\partial^2 J}{\partial W^2}+\frac{\partial J}{\partial t}\end{aligned}$$

とすると，式 (3) は次の式

$$\max_{C(t),w(t),P(t)}\phi(C(t),w(t),P(t);W(t),t)=0$$

ように書き直すことができる． 次に，上式の 1 階の条件を示すと

$$\phi_C=U_C(C,t)-\frac{\partial J}{\partial W}=0 \tag{4}$$

$$\phi_w=(\alpha-r)W\frac{\partial J}{\partial W}+\sigma^2W^2w\frac{\partial^2 J}{\partial W^2}=0 \tag{5}$$

$$\phi_P=\frac{\lambda}{\mu}B_W(W+\frac{P}{\mu},t)-\frac{\partial J}{\partial W}=0 \tag{6}$$

となる．2 階の条件については，

$$\phi_{CC}=U_{CC}<0 \tag{7}$$

$$\phi_{ww}=\sigma W^2\frac{\partial^2 J}{\partial W^2} \tag{8}$$

$$\phi_{PP}=\frac{\lambda}{\mu^2}B_{ZZ}<0 \tag{9}$$

となる．ここで式 (7) および式 (9) は効用関数の凹性の仮定から満たされる．結局，式 (4), (5), (6), (8) を満たす $J(W(t),t)$ に関して次の定理が得られる．

定理 1 (Richard (1975)) 収入のある個人が，消費と投資および生命保険加入に関する動的な最適制御を行った場合，最適値関数は

$$J(W(t),t) = \frac{a(t)}{\gamma}\Big(W(t)+b(t)\Big)^{\gamma}$$

により与えられる．ここで

$$a(t) = \left\{\int_t^T k(s)\frac{G(s)}{G(t)}\left[\frac{\gamma}{1-\gamma}\Big((\nu+r)(s-t)+H(t)-H(s)\Big)\right]ds\right\}^{1-\gamma},$$

とする．ただし，

$$k(t) = \mu(t)^{\frac{-\gamma}{1-\gamma}}\{\lambda(t)m(t)\}^{\frac{1}{1-\gamma}} + h(t)^{\frac{1}{1-\gamma}}, \quad \nu = \frac{(\alpha-r)^2}{2\delta\sigma^2}$$

とし[*2]，また

$$b(t) = \int_t^T Y(s)\exp\left[-r(s-t)-\int_t^s \mu(u)du\right]ds$$

とする．このとき最適制御 $C^*(t), w^*(t), P^*(t)$ は式

$$C^*(W(t),t) = \left(\frac{h(t)}{a(t)}\right)^{\frac{1}{1-\gamma}}\Big(W(t)+b(t)\Big) \tag{10}$$

$$w^*(W(t),t) = \frac{\alpha-r}{\delta\sigma^2 W}\Big(W(t)+b(t)\Big) \tag{11}$$

$$\frac{P^*(W(t),t)}{\mu(t)} = \left(\frac{m(t)\lambda(t)}{a(t)\mu(t)}\right)^{\frac{1}{1-\gamma}}\Big(W(t)+b(t)\Big) - W(t) \tag{12}$$

により与えられる．

項 $b(t)$ は，時刻 t において個人が生存していることを条件とした時刻 t から死亡時刻 τ までの収入の現在価値（人的資本）を表している．式 (10), (11), (12) から最適な戦略は収入が無い場合に比べて初期資産を $b(t)$ だけ増やしたケースに相当する．特にリスク資産へのウエートは死亡リスク調整後の将来収入を考慮して上昇する．

定理 1 から，ただちに次の系を導くことができる．

系 1 最適な遺産 $Z^*(t)$ と最適な消費 $C^*(t)$ との関係について

$$Z^*(t) = W(t) + \frac{P^*(W(t),t)}{\mu(t)} = \left(\frac{m(t)\lambda(t)}{h(t)\mu(t)}\right)^{\frac{1}{1-\gamma}} C^*(t) \tag{13}$$

が成立する．

遺産と消費の交換は消費効用を決定する関数 $h(t)$ と遺産効用を決定する関数 $m(t)$ の比に依存することが分かった．この関係式は実際に関数 $m(t)$ を設定する上で重要な役割を果たす．

2.3 世帯モデル

世帯を形成する二人の個人をそれぞれ F, M とし，各々の死亡時刻を確率変数 τ_F, τ_M で表す．また，τ_F, τ_M はそれぞれポアソン過程 $N_F(t), N_M(t)$ に従う最初のイベントの発生時刻とし，$N_F(t), N_M(t), B(t)$ は互いに独立であると仮定する．ここで $Y_F(t), Y_M(t)$ を両者の収入とし，

$$Y_F(t) = \begin{cases} y_{f2}(t) & t \le \tau_M \\ y_{f1}(t) & t > \tau_M \end{cases}, Y_M(t) = \begin{cases} y_{m2}(t) & t \le \tau_F \\ y_{m1}(t) & t > \tau_F \end{cases}$$

[*2] Richard (1975) における式 (39) には $k(t)$ に関する誤植がある．

とする．確定的関数 $y_{f2}(t), y_{m2}(t)$ は夫婦のどちらもが生存している場合の収入を表し，確定的関数 $y_{f1}(t), y_{m1}(t)$ は夫婦のどちらかが死亡した場合の収入を表す．一方の死亡により遺族の収入を変化させることができる．また，個人 $i = F, M$ による消費を $C_i(t)$，加入している生命保険の保険料を $P_i(t)$ とする．さらに，死亡に関するハザード率を $\lambda_i(t)$ とし生命保険料に関する割引率を

$$\mu_i(t) = \lambda_i(t) + \eta_i(t), \quad i = F, M$$

とする．前節と同様に

$$G_i(t) = P\{\tau_i > t\} = \exp\left\{-\int_t^T \lambda_i(u)du\right\}, \quad H_i(t) = \int_t^T \eta_i(u)du$$

を定義しておく．すると世帯の資産に関する制約式は

$$\begin{aligned} dW(t) = \Big(Y_F(t) + Y_M(t) - C_F(t) - C_M(t) - P_F(t) - P_M(t)\Big)dt + \Big(rW(t) + w(t)(\alpha - r)W(t)\Big)dt \\ +\sigma w(t)W(t)dB(t) + \theta_F(t)dN_F(t) + \theta_M(t)dN_M(t), \quad t < \tau, W(0) = W_0 \end{aligned}$$

となる．ただし，τ は世帯の一員のどちらか一方が死亡した時刻

$$\tau = \tau_F \wedge \tau_M = \min(\tau_F, \tau_M)$$

とする．確率変数 τ は平均 $1/\big(\lambda_F(t) + \lambda_M(t)\big)$ の指数分布に従う．ここで消費に関する効用関数をそれぞれ $U_F(C_F(t), t), U_M(C_M(t), t)$ とし，二人が共に生存する場合の世帯の効用関数を

$$U(C_F(t), C_M(t), t) = U_F(C_F(t), t) + U_M(C_M(t), t)$$

とする[*3]．このとき，世帯の投資と消費および生命保険加入に関する最適制御を次の最大化問題

$$\begin{aligned} \max_{C_F(t), C_M(t), P_F(t), P_M(t), w(t)} E_0\Bigg[\int_0^\tau U(C_F(s), C_M(s), s)ds \\ +\mathbf{1}_{\{\tau_F < \tau_M\}}\left\{\int_\tau^{\tau_M} U_M(C_M(s), s)ds + B(Z(\tau_M), \tau_M)\right\} \\ +\mathbf{1}_{\{\tau_F \geq \tau_M\}}\left\{\int_\tau^{\tau_F} U_F(C_F(s), s)ds + B(Z(\tau_F), \tau_F)\right\}\Bigg] \end{aligned} \tag{14}$$

を解くことで与える．この問題は共同で生活している期間と一人になってから自分が死亡するまでの期間の双方を含めた計画問題である．夫婦のうち残された一人は，自分の死亡時点における遺産とそれまでの消費をいかにバランスさせるかという最適制御問題 (2) を行う．そのために必要な夫婦の最適な保険と最適な消費はいかにあるべきかが，最適制御問題 (14) の焦点である．すなわち遺族の最適制御を考慮した夫婦の最適制御問題が式 (14) である．最適性の原理から，二人ともが死亡する時刻までの最適政策は，どちらか一方が死亡するまでの最適政策を含む．時刻 τ 以降の最適政策については定理 1 を用いることができるので，これを利用して現時点から時刻 τ までの最適政策を導出すれば良い[*4]．ただし，時刻 τ には，生命保険金が給付されることおよび一人になった場合に収入が変化することを考慮しなくてはならない．結局，式 (14) を最適値関数 $J(W(t), t)$ で置き換えると $J(W(t), t)$ が満たすべき HJB 方程式に関して次の補題を得る．

補題 1 収入のある二人の個人が世帯を形成する際の，投資と消費および生命保険加入の最適制御に関する最適値関数 $J(W(t), t)$ は次の HJB 方程式

$$0 = \max_{C_F(t), C_M(t), P_F(t), P_M(t), w(t)} \Bigg[U_F(C_F(t), t) + U_M(C_M(t), t)$$

[*3] 一般に 2 者の効用関数を加えることはできないが，ここでは簡単化のために，相手の効用を自分の効用と感じる世帯を考える．

[*4] このような 2 段階のダイナミックプログラミングは小守林 (2001) に見られた．

$$
+\lambda_M(t)\left\{J_F\left(W(t)+\frac{P_M(t)}{\mu_M(t)},t\right)-J\right\}+\lambda_F(t)\left\{J_M\left(W(t)+\frac{P_F(t)}{\mu_F(t)},t\right)-J\right\}
$$
$$
+\Big(-C_F(t)-C_M(t)-P_F(t)-P_M(t)+y_{f2}(t)+y_{m2}(t)\Big)\frac{\partial J}{\partial W}
$$
$$
\Big(rW(t)+w(\alpha-r)W(t)\Big)\frac{\partial J}{\partial W}+\frac{\partial J}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2 w(t)^2 W(t)^2\frac{\partial^2 J}{\partial W^2}\Bigg]
$$

を満たす．ここで $J_i(W(t),t)$ は遺族となった個人 F あるいは M が行う投資と消費および生命保険加入に関する最適計画の最適値関数であり，次の式

$$
J_i(W(t),t)=\frac{a_i(t)}{\gamma}\Big(W(t)+b_i(t)\Big)^{\gamma},\quad i=F,M
$$

で与えられる．ただし

$$
a_i(t)=\left\{\int_t^T k_i(s)\frac{G_i(s)}{G_i(t)}\left[\frac{\gamma}{1-\gamma}\Big((\nu+r)(s-t)+H_i(t)-H_i(s)\Big)\right]ds\right\}^{1-\gamma},
$$
$$
k_i(t)=\mu_i(t)^{\frac{-\gamma}{1-\gamma}}\{\lambda_i(t)m_i(t)\}^{\frac{1}{1-\gamma}}+h_i(t)^{\frac{1}{1-\gamma}}
$$

とし，また

$$
b_i(t)=\int_t^T Y_{i1}(s)\exp\left[-r(s-t)-\int_t^s\mu_i(u)du\right]ds
$$

とする．ここで $h_i(t),m_i(t)$ は，個人 i の効用関数を

$$
U_i(C_i(t),t)=\frac{h_i(t)}{\gamma}C_i(t)^{\gamma},\quad i=F,M
$$
$$
B_i(Z(t),t)=\frac{m_i(t)}{\gamma}Z(t)^{\gamma},\quad i=F,M
$$

のように定義する確定的な関数である．

証明：付録参照

関数 $b_i(t)$ は個人 $j\neq i$ 死亡後の個人 i の死亡リスクを考慮した個人 i の期待将来総収入である．次に，HJB 方程式 (15) を解き，世帯の最適な投資と消費および生命保険加入の最適な計画を示す．まずは，最大化の対象を関数

$$
\phi\Big(C_F(t),C_M(t),w(t),P_F(t),P_M(t);W(t),t\Big)=
$$
$$
U_F(C_F(t),t)+U_M(C_M(t),t)
$$
$$
+\lambda_M\left\{J_F\left(W(t)+\frac{P_M(t)}{\mu_M(t)},t\right)-J\right\}+\lambda_F\left\{J_M\left(W(t)+\frac{P_F(t)}{\mu_F(t)},t\right)-J\right\}
$$
$$
+\Big(Y_{F2}(t)+Y_{M2}(t)-C_F(t)-C_M(t)-P_F(t)-P_M(t)\Big)\frac{\partial J}{\partial W}
$$
$$
\Big(rW(t)+w(\alpha-r)W(t)\Big)\frac{\partial J}{\partial W}+\frac{\partial J}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2 w(t)^2W(t)^2\frac{\partial^2 J}{\partial W^2}
$$

と書くことにする．すると，1 階の条件は

$$
\phi_{C_F}=\frac{\partial U_F(C_F(t),t)}{\partial C_F}-\frac{\partial J}{\partial W}=0 \tag{15}
$$

$$
\phi_{C_M}=\frac{\partial U_M(C_M(t),t)}{\partial C_M}-\frac{\partial J}{\partial W}=0 \tag{16}
$$

$$\phi_w = (\alpha - r)W\frac{\partial J}{\partial W} + \sigma^2 W^2 w \frac{\partial^2 J}{\partial W^2} = 0 \tag{17}$$

$$\phi_{P_F} = \frac{\lambda_F}{\mu_M}\frac{\partial J_M}{\partial W}\left(W(t) + \frac{P_F(t)}{\mu_F(t)}, t\right) - \frac{\partial J}{\partial W} = 0 \tag{18}$$

$$\phi_{P_M} = \frac{\lambda_M}{\mu_F}\frac{\partial J_F}{\partial W}\left(W(t) + \frac{P_M(t)}{\mu_M(t)}, t\right) - \frac{\partial J}{\partial W} = 0 \tag{19}$$

となる．また 2 階の条件は

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial {C_F}^2} = \frac{\partial^2 U_F}{\partial {C_F}^2} < 0 \tag{20}$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial {C_M}^2} = \frac{\partial^2 U_M}{\partial {C_M}^2} < 0 \tag{21}$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial w^2} = \sigma W^2 \frac{\partial^2 J}{\partial W^2} \tag{22}$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial {P_F}^2} = \frac{\lambda_F}{\mu_M^2}\frac{\partial^2 J_M}{\partial W^2} < 0 \tag{23}$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial {P_M}^2} = \frac{\lambda_M}{\mu_F^2}\frac{\partial^2 J_F}{\partial W^2} < 0 \tag{24}$$

となる．式 (20) と式 (21) は効用関数の凹性の仮定から，式 (23) と (24) は定理 1 から満たされる．

最後に式 (15) から式 (19) および式 (22) を満たす $J(W(t), t)$ を示す．本論文の主要な結果である．

命題 1 収入のある二人の個人 F, M が世帯を形成する際の，投資と消費および生命保険加入の最適制御に関する最適値関数 $J(W(t), t)$ は次の方程式

$$J(W(t), t) = \frac{a^*(t)}{\gamma}\Big(W(t) + b^*(t)\Big)^{\gamma}$$

により与えられる．ここで

$$a^*(t) = \left\{\int_t^T k^*(s)\frac{G^*(s)}{G^*(t)}\left[\frac{\gamma}{1-\gamma}\Big((\nu + r)(s-t) + H(t) - H(s)\Big)\right] ds\right\}^{1-\gamma},$$

とする．ただし，

$$k^*(t) = h_F(t)^{\frac{1}{1-\gamma}} + h_M(t)^{\frac{1}{1-\gamma}} + \lambda_M\left(\frac{\lambda_F}{\mu_M}\right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} a_F(t)^{\frac{1}{1-\gamma}} + \lambda_F\left(\frac{\lambda_M}{\mu_F}\right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} a_M(t)^{\frac{1}{1-\gamma}},$$

$$G^*(t) = \exp\left[-\int_t^T \{\lambda_F(s) + \lambda_M(s)\}\, ds\right]$$

$$H^*(t) = \int_t^T \{\eta_F(u) + \eta_M(u)\}\, du$$

とし，また

$$b^*(t) = \int_t^T \Big\{y_{f2}(u) + y_{m2}(u) + \mu_F(u)b_M(u) + \mu_M b_F(u)\Big\} \exp\left[-r(u-t) - \int_t^u \{\mu_F(s) + \mu_M(s)\}ds\right]du$$

とする．

証明：付録参照

関数 $b^*(t)$ は，一方の死亡によりその後の収入が変化することを考慮にいれた現時点から世帯の消滅時刻までの世帯収入の現在価値を表す．命題 1 から，世帯の最適制御に関して直ちに次の系を得る．

系 2 収入のある二人の個人 F, M が世帯を形成する際の，投資と消費および生命保険加入の最適制御は

$$
\begin{aligned}
C_F^*(W(t),t) &= \left(\frac{h_F(t)}{a^*(t)}\right)^{\frac{1}{1-\gamma}}\Big(W(t)+b^*(t)\Big)\\
C_M^*(W(t),t) &= \left(\frac{h_M(t)}{a^*(t)}\right)^{\frac{1}{1-\gamma}}\Big(W(t)+b^*(t)\Big)\\
w^*(W(t),t) &= \frac{\alpha-r}{\delta\sigma^2 W}\Big(W(t)+b^*(t)\Big)\\
\frac{P_F^*(W(t),t)}{\mu_F(t)} &= \left(\frac{a_M(t)\lambda_F(t)}{a^*(t)\mu_F(t)}\right)^{\frac{1}{1-\gamma}}\Big(W(t)+b^*(t)\Big)-b_M(t)-W(t)\\
\frac{P_M^*(W(t),t)}{\mu_M(t)} &= \left(\frac{a_F(t)\lambda_M(t)}{a^*(t)\mu_M(t)}\right)^{\frac{1}{1-\gamma}}\Big(W(t)+b^*(t)\Big)-b_F(t)-W(t)
\end{aligned}
$$

のように与えられる．

世帯が収入のある二人で構成される場合に加入すべき生命保険の保険金額を表したのが $\{P_F^*/\mu_F(t)\}$ および $\{P_M^*/\mu_M(t)\}$ である．例えば $\{P_M^*/\mu_M(t)\}$ をみると，もし，個人 M が死亡した後の遺族 F の総収入 $b_F(t)$ がある程度大きければ，M にかける保険金は少なくてよいことが分かる．また，基本モデルと同様に初期資産額（貯蓄）$W(t)$ が多ければ保険金額は小さくなる．一方，基本モデルの最適保険金額 (12) と比較すると，世帯モデルでは遺産に対する効用関数を定義する関数 $m(t)$ が個人 M 死亡後の最適値関数を定義する関数 $a_F(t)$ に替わっており，個人 M の死亡時における遺産への効用は個人 F の最適値関数として定義されることが確認できる．

系 2 から，ただちに次の関係式を導くことができる．

系 3 一方が死亡した場合の遺産と遺族の人的資本との和は，その時点の遺族の消費を用いて

$$
\begin{aligned}
W(t)+\frac{P_M^*(W(t),t)}{\mu_M(t)}+b_F(t) &= \left(\frac{a_F(t)\lambda_M(t)}{h_F(t)\mu_M(t)}\right)^{\frac{1}{1-\gamma}}C_F^*(t) \qquad (25)\\
W(t)+\frac{P_F^*(W(t),t)}{\mu_F(t)}+b_M(t) &= \left(\frac{a_M(t)\lambda_F(t)}{h_M(t)\mu_F(t)}\right)^{\frac{1}{1-\gamma}}C_M^*(t)
\end{aligned}
$$

のように表現できる．

系 1 では，基本モデルにおける遺産は，消費効用を決定する関数 $h(t)$ と遺産効用を決定する関数 $m(t)$ との比 $m(t)/h(t)$ に依存することを示した．系 3 では，この比が $a_F(t)/h_F(t)$ になり，遺族としての消費投資問題の最適値関数を規定する $a_F(t)$ が表れた．系 3 は実際に $m_F(t), m_M(t)$ を設定する上で重要な役割を果たす．また，式 (25) から，妻が多く消費する場合，妻の収入が少ない場合，貯蓄が少ない場合に夫はより高額の保険に入る必要があることが分かる．

3 数値例

3.1 基本モデル

世帯モデルについて示す前に，Richard (1975) による基本モデルの性質を明らかにしておく[*5]．そのために，(i) 初期資産,(ii) 収入,(iii) リスク許容度の違いにより，資産選択および加入保険料と必要な保険金がどの

[*5] Richard (1975) は生命保険が存在する条件下での分離定理の証明に力点をおいており，数値例が全くない．

ように変化するかを見る．以下では，死亡率については小守林 (2001) による推定結果を利用し

$$\lambda(t) = k\ell \exp(\ell t), k = 0.001301, \ell = 0.073736$$

とする．またリスクプレミアムとして $\eta(t) = \frac{1}{10}\lambda(t)$ を仮定する．さらに，消費に対する割引関数について $h(t) = \exp(-\rho t)$ を仮定する．遺産に対する割引関数 $m(t)$ の設定は重要である．加入すべき生命保険金額に重大な影響を与えるためである．本論文ではこれを次のように定める．

個人の目的は式 (2) で表されているように，消費効用と遺産効用の和を最大化することである．この問題は解析解を持ち，系 1 から最適な消費と最適な遺産の交換関係が $h(t)/m(t)$ に依存することが分かった．つまり，与えられた $h(t)$ の下で，遺産額の決定を消費をベースとして行えば，経済的な意味づけを持った $m(t)$ を設定できる．本論文では，現在から年齢が $\tilde{T}$ になるまでの間，現在の消費レベルの一部分を維持することを目標にし，遺産として

$$\beta C^*(t) \int_{\min(t, t+\tilde{T}-T_0)}^{t+\tilde{T}-T_0} e^{-rs} ds := \psi(t) C^*(t)$$

を残すようにする．ただし T_0 を現時点における個人の年齢とする．年齢が $\tilde{T}$ に達する時刻 $t+\tilde{T}-T_0$ 以降は遺産を残さない．このとき，式 (13) から $m(t)$ を

$$m(t) = h(t)\frac{\mu(t)}{\lambda(t)}\psi(t)^{1-\gamma}, \quad t < \tilde{T} - T_0$$

のように設定すれば良い．ただし，$m(t) = 0, t \geq \tilde{T} - T_0$ である．以下では，共通するパラメーター設定として $\alpha = 0.03, r = 0.01, \sigma = 0.20, T = 60, \tilde{T} = 80, \beta = 0.8$ を与え，定年 T までの収入は一定とし，定年以降の収入をゼロとする．

まずは，初期資産が $W(0) = 500$(万円) の場合と $W(0) = 5000$（万円）の違いにより，リスク資産の保有ウエイト w（%）がどのように変化するかを図 1(a) に描いた．横軸は時点 0 における年齢である．後に説明するように，このモデルでは人的資本 $b(0)$ は仮想的な無リスク資産として扱われる．このため，$W(0)$ が小さいと，実際の無リスク資産に対するリスク資産の投資割合は必然的に高くなる．次に支払い保険料および加入保険金を見てみよう（図 1(d),(e)）．貯蓄が多い場合は加入すべき保険金額は低くなる．収入が途絶えても貯蓄を取り崩して消費できるからである．ここで，負の支払い保険料は加入年金額を，負の保険金額は支払い年金保険料を表すことに注意する．また，一時払い保険料を支払い，生存していれば年金と保険料の払い戻しがある生存保険と解釈しても良い．死亡した場合には保険料の全額を失う．図 1(d),(e) を見ると，初期に貯蓄がある場合，定年を前に保険加入から年金加入に切り替わる．これは保険加入の目的を消費ベースで捉えた収入のヘッジとしたからである．保険加入の必要がなくなると，目的は死亡時刻までの最大限の消費となる．例えば，80 歳以降は，遺産を残す必要が無いので資産全額を一時払い年金保険に掛けている．また，初期の貯蓄が多い場合，多額の年金保険料を支払うことが可能なため，大きな年金保険に加入することができる．消費量については，図 1(c) に示すように貯蓄が多いほど多額となる．また，定年以降に消費量が増えているのは生存保険の存在が原因である．いつ来るか分からない死亡時刻までになるべく多くの消費を行おうとするからである．

次に収入の違いが最適戦略に与える影響を見よう．$Y(t) = 500$ と $Y(t) = 2000$ の 2 つのケースを比較する．図 2(a) には収入の違いがリスク資産への配分割合へ与える影響を描いた．Merton (1971) は確定的な労働収入は無リスク資産であり，収入があるとリスク資産への配分割合は増加することを指摘している．Richard (1975) による保険モデルでも同じ結果を得る．30 歳で年収 2000 万円の場合，将来収入の 5 億円程度は無リスク資産としてみなされ，リスク資産への投資額は現在の貯蓄の 100 倍程度のレバレッジを持つことになる．図 2(d),(e) には，支払い保険料と加入保険金について示した．収入が多い場合，加入保険金は増える．また，60 歳以降は定年しており収入がゼロとなり戦略は同一となる．これは，図 2(c) に示した消費量も同様である．図 2(b) には収入の違いによる人的資本の差を示した．

最後にリスク回避度の違いによる戦略の差を見てみよう．$\gamma = 1/2$ のケースとよりリスク回避的な $\gamma = -4$ の 2 つのケースを比較する．図 3(a) を見ると，リスク資産への配分割合はリスク選好の影響を強く受けることが分かる．さらに，保険料と保険金額を見ると（図 3(d),(e)）リスク回避度が高い程，多額の保険に加入することが分かる．結局，リスク回避度が高い場合，リスク資産への配分を減らし高額の保険に入り多額の消費を行う．

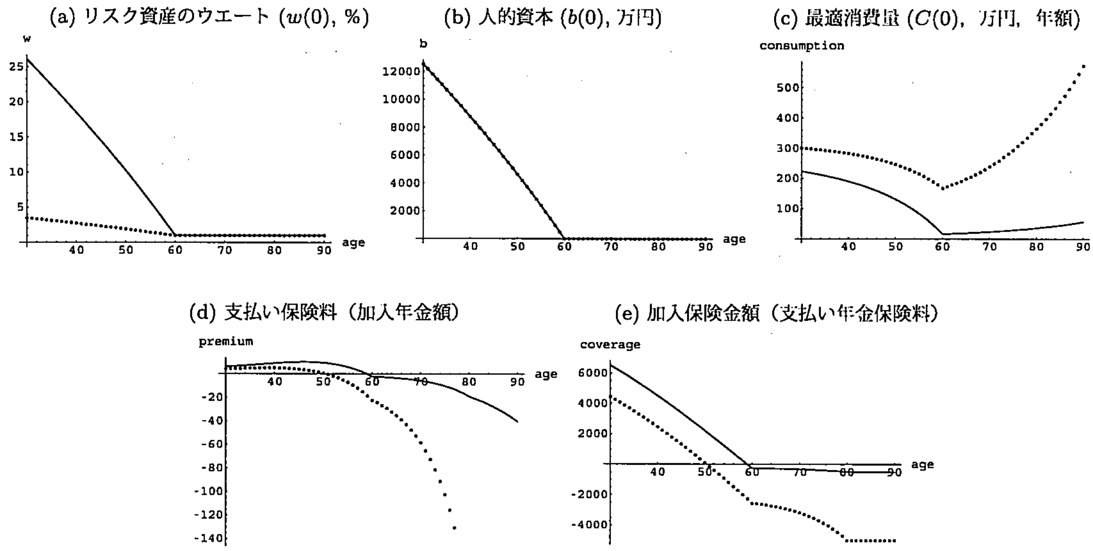

図 1　初期資産の影響（基本モデル）

実線:$W(0) = 500$（万円）, 点線:$W(0) = 5000$（万円）, $Y(t) = 500, T = 60, \tilde{T} = 80, \gamma = 1/2, \alpha = 0.3, r = 0.01, \sigma = 0.20, \rho = 0.01$. 負の支払い保険料 (premium) は加入年金額（年額）を表す．また負の加入保険金額 (coverage) は支払年金保険料（年額）を表す．

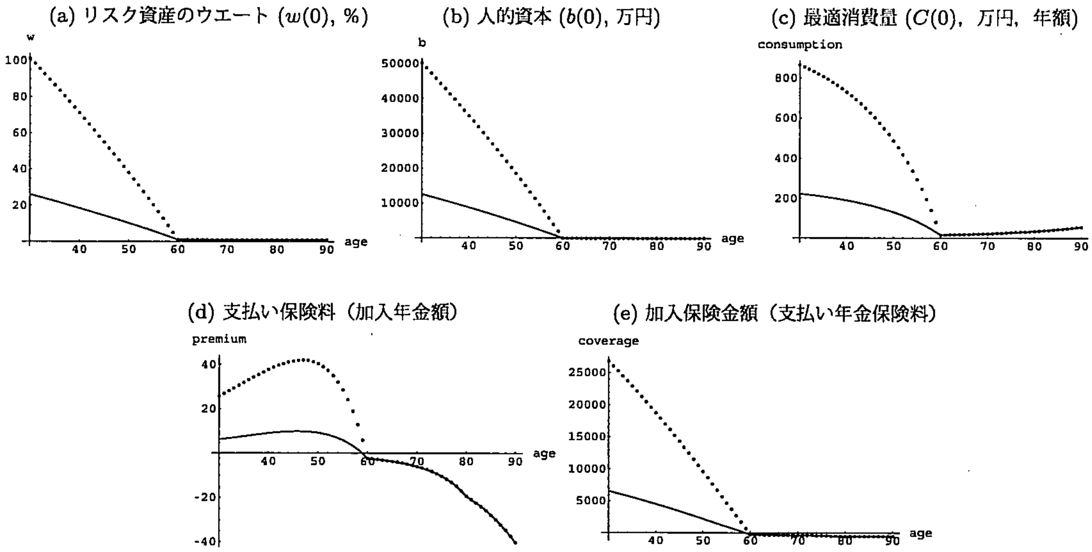

図 2　収入の影響（基本モデル）

実線:$Y(t) = 500$（万円）, 点線:$Y(t) = 2000$（万円）, $W(t) = 500, T = 60, \tilde{T} = 80, \gamma = 1/2, \alpha = 0.3, r = 0.01, \sigma = 0.20, \rho = 0.01$. 負の支払い保険料 (premium) は加入年金額（年額）を表す．また負の加入保険金額 (coverage) は支払年金保険料（年額）を表す．

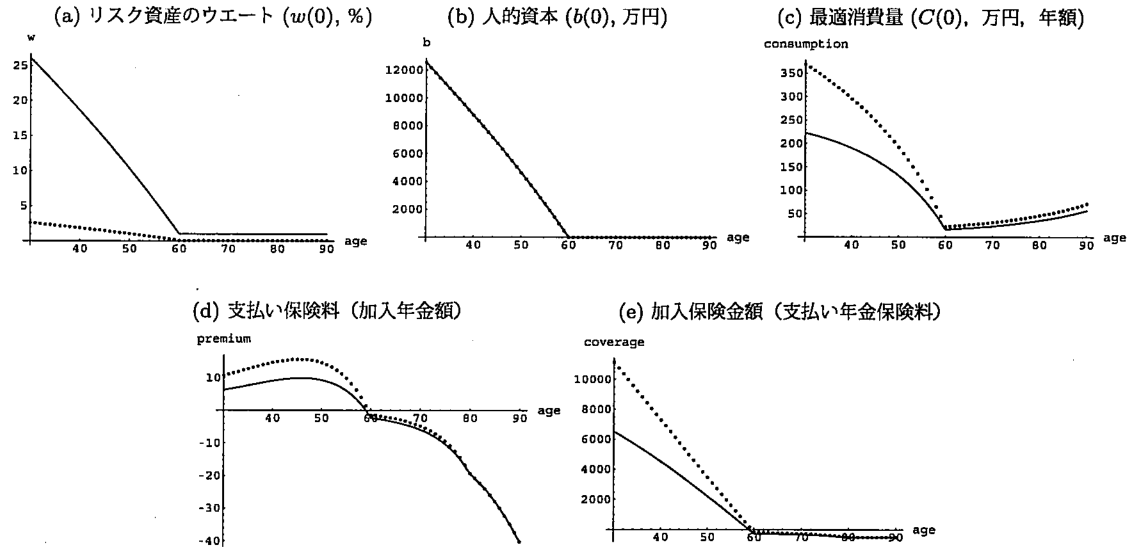

図 3　リスク選好の影響（基本モデル）

実線:$\gamma=0.5$, 点線:$\gamma=-4$ $W(t)=500, Y(t)=500, T=60, \tilde{T}=80, \alpha=0.03, r=0.01, \sigma=0.20, \rho=0.01$. 負の支払い保険料 (premium) は加入年金額（年額）を表す．また負の加入保険金額 (coverage) は支払年金保険料（年額）を表す．

3.2　世帯モデル

収入のある二人（女性と男性）が世帯を形成する場合の最適な保険加入戦略について数値例と共に考察する．二人とも定年を 60 歳 ($T=60$) とし収入は一定と仮定する．また消費効用を定義する関数については前節の設定を踏襲し，

$$h_F(t)=h_M(t)=h(t)=e^{-\rho t} \tag{26}$$

とする．死亡率についても前節と同様とし，女性の死亡率については男性と同じ数値を用いる．その他の共通するパラメータについても前節と同様に $\alpha=0.03, r=0.01, \sigma=0.20, \rho=0.01, \gamma=0.5, W(t)=500, T=60$ とする．また遺産関数の設定は次のように行う．

夫婦の一方が死亡しても，生活水準が下がらないような保険加入を考えて遺産関数の設定を行う．式 (26) および系 2 から $C_M(t)=C_F(t)$ であるので，時刻 t における夫婦の消費がそれぞれ年齢 $\tilde{T}_F, \tilde{T}_M$ に達するまで続いた場合の総消費の現在価値の一定割合 β を

$$\beta C_F^*(t)\int_{\min(t,t+\tilde{T}_F-T_{F0})}^{t+\tilde{T}_F-T_{F0}} e^{-rs}ds+\beta C_M^*(t)\int_{\min(t,t+\tilde{T}_M-T_{M0})}^{t+\tilde{T}_M-T_{M0}} e^{-rs}ds:=\Big(\psi_F(t)+\psi_M(t)\Big)C_F^*(t)$$

と書くことができる．ただし，T_{F0}, T_{M0} は妻，夫のそれぞれの現時点における年齢とし，以下の数値例では $\tilde{T}_F=\tilde{T}_M=80$ とする．ここで，系 3 を用いて，夫が死亡した場合に残る遺産および妻の人的資本の和を，将来において世帯が消費するであろう額を一致させて $a_F(t)$ を決定できる．結局，$a_M(t)$ についても同様に考えて

$$a_F(t)=h(t)\frac{\mu_M(t)}{\lambda_M(t)}\Big(\psi_F(t)+\psi_M(t)\Big)^{1-\gamma},\quad a_M(t)=h(t)\frac{\mu_F(t)}{\lambda_F(t)}\Big(\psi_F(t)+\psi_M(t)\Big)^{1-\gamma} \tag{27}$$

となる．このようにすると，世帯の各人の死亡により世帯の消費レベルは下がらないような遺産を残すことができる．例えば，遺族としての妻に収入があり生計に困らなくとも，夫の死亡後も夫の保険金により生活水準（消費レベル）を維持できる．また，$\mu_M(t)=\mu_F(t)$ の場合，$a_M(t)=a_F(t)$ となるので，結果的に相続にお

ける最適値関数のレベルの違いについて公平性が保たれた．このままでは，遺産関数 $m_F(t), m_M(t)$ が特定されていないが，系 2 から戦略の決定には，これらは関数 $a_F(t), a_M(t)$ に含まれた形でしか表れないので，あえて特定する必要がない．結局，外生的に関数 $a_F(t), a_M(t)$ を式 (27) により与えるだけで良い．

まず，収入の差が保険加入戦略に与える影響を見よう．系 2 から分かるように最適な保険金額は，相手が死亡した時点において自分がどれだけの収入を定年までの間に得られるかに依存する．人的資本の少ないほうが相対的に小さな保険金額になることが予想される．年齢を同じくし，女性の年収を 1000 万円，男性の収入を 500 万円と設定し，加入すべき保険の保険料と保険金を年齢別に描いた（図 4(a),(b)）．収入の多い女性が世帯主の役目を果たし保険に加入するのが最適である．収入の低い男性は年金に加入し消費を増やすことに貢献する．特筆すべきは，本論文の設定では，保険加入は世帯の将来消費をヘッジするためのものであり，生活水準を下げないためであった．それにもかかわらず，相対的に収入の少ない男性は年金加入への需要が高いことが示された．

次に，女性と男性の年齢の差が保険加入戦略に与える影響を見てみよう．女性が男性よりも１０歳若く，収入が共通のケースを考える．図 5(a),(b) に加入すべき保険の保険料と保険金を年齢別に描いた．ここでも，人的資本の少ない男性は，定年よりはるかに前の年金加入が最適であることが示された．世帯の保険加入問題においては，必ずしも両者が保険に入る必要は無く，むしろ年金に加入して消費を増やす方が効用が高いのである．本論文の主要な結論の一つである．

最後に女性がパート収入を持ち 5 歳若いという標準的なケースを図 6 示す．男性が大きな保険に入る戦略が最適であり，このとき女性は若いときから年金に加入するのが最適となる．男性が定年する 60 歳以降女性が定年するまでの 5 年間に世帯主としての役割を果たすがやはり年金加入が最適となる．

ここまでに，相対的に人的資本が大きい個人は保険に加入すべきであり，一方で，相対的に人的資本の低い個人は，たとえ定年前であっても年金（生存保険）に加入する方が良い場合があることを示した．また，貯蓄の大きさに応じて保険から年金へとシフトする時期が早まることを示し，ときには定年よりもはるかに前に年金に加入するべきであることが分かった．

(a) 支払い保険料（加入年金額）　(b) 加入保険金額（支払い年金保険料）　(c) 人的資本

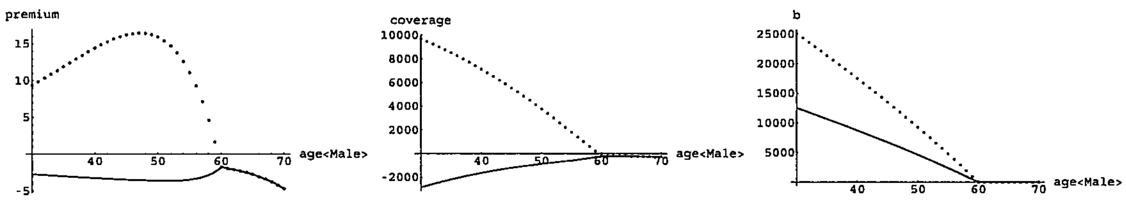

図 4　収入差の影響（世帯モデル）

点線：女性，実線：男性，年齢差なし，女性が高収入（$Y_F(t) = 1000, Y_M(t) = 500$），横軸は男性の年齢．負の支払い保険料 (premium) は加入年金額（年額）を表す．また負の加入保険金額 (coverage) は支払年金保険料（年額）を表す．$\alpha = 0.3, r = 0.01, \sigma = 0.20, \rho = 0.01, \gamma = 0.5, W(t) = 500, T = 60, \tilde{T}_M = \tilde{T}_F = 80$.

4　結論

本論文では，収入のある二人が世帯を形成する場合の消費とポートフォリオ選択および生命保険加入に関する最適な戦略を導出した．その結果，相対的に人的資本の低い（年齢が高いあるいは収入が低い）個人には，たとえ年齢が若くとも年金保険（生存保険）に需要があることが示された．たとえばパート収入のある主婦が該当するが，常識と異なり年金受給を早期に始めなければならない．

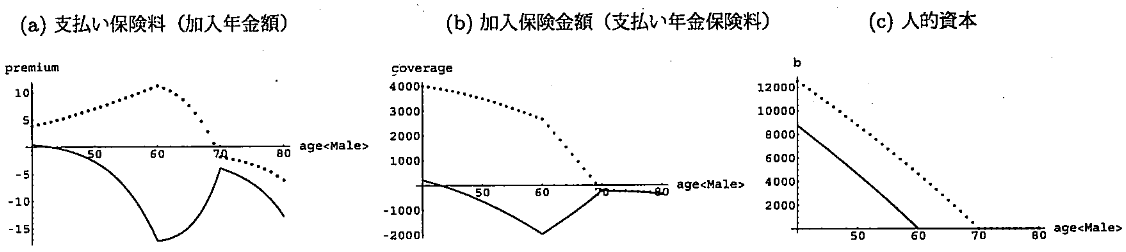

図 5　年齢差の影響（世帯モデル）

点線：女性，実線：男性，女性は男性より 10 歳若く，収入は共通（$Y_F(t) = Y_M(t) = 500$），横軸は男性の年齢．負の支払い保険料 (premium) は加入年金額（年額）を表す．また負の加入保険金額 (coverage) は支払年金保険料（年額）を表す．$\alpha = 0.3, r = 0.01, \sigma = 0.20, \rho = 0.01, \gamma = 0.5, W(t) = 500, T = 60, \tilde{T}_M = \tilde{T}_F = 80$.

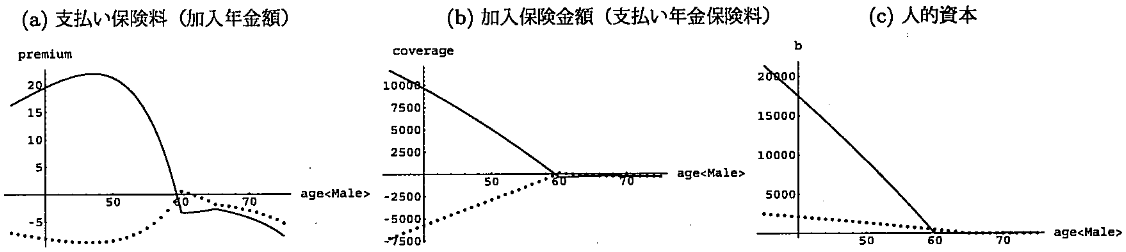

図 6　標準ケース（世帯モデル）

点線：女性，実線：男性，女性は 5 歳若くパート収入のみ（$Y_F(t) = 100, Y_M(t) = 1000$），横軸は男性の年齢．負の支払い保険料 (premium) は加入年金額（年額）を表す．また負の加入保険金額 (coverage) は支払年金保険料（年額）を表す．$\alpha = 0.3, r = 0.01, \sigma = 0.20, \rho = 0.01, \gamma = 0.5, W(t) = 500, T = 60, \tilde{T}_M = \tilde{T}_F = 80$.

本研究にはいくつかの課題がある．まず収入の不確実性を考慮していない点である．消費投資問題において，収入を確率過程とすると解析解が求められないと予想されており，また数値計算も容易ではない．この点については，昨今，盛んに研究が進められている[*6]．最適な生命保険金額を導出する上では収入の不確実性を考慮することは望ましい拡張であろう．また本論文では生命保険を摩擦なしに取引可能な資産と同様に扱った．しかし，実際には保険を解約する上では手数料と解約控除という広い意味での取引コストが存在する．取引コストが存在する消費投資問題に関する研究には一定の蓄積があるものの[*7]，生命保険契約の取引コストは経過期間により異なるので取り扱いがより難しい．取引コストの存在を考慮すると，解約および新契約は抑制され，保険需要の増加は安全資産の増加で賄われるであろう．今後の課題とする．さらに，保険種類の問題が存在する．個人保険では，１０年以上の保険期間がある定期保険や終身保険が一般的である．このような保険商品を扱うためには，まず預金の満期について整理しておく必要がある． Brennan and Xia (2002) は，株式ポートフォリオと長期債・短期債の最適なミックスを導出するモデルを提示しており，その拡張が課題となる．最後の課題は，解析解導出のため世帯に借り入れ制約を課していない点である．本論文における年金とは完全な生存保険であり，図 6 における点線（女性）の原点を例にするならば，この女性は 10 万円弱の生存保険金を得るために，6000 万円弱の一時払い保険料を払っていることになる．この保険料は生存している限りにおいて返還され，死亡時には返還されない．また，パートナーと自分の将来収入を担保としたものであるため，手元流動性以上となる場合がある．

[*6] 例えば Cuoco (1997), Koo (1998), Viceira (2001).

[*7] Shreve and Soner (1994) など.

本論文では，保険金額を消費とのバランスにおいて決定したが，保険金額が何らかの理由であらかじめ決定された状況下における投資・消費問題も興味深い．富裕層向けのコンサルティングあるいは保険をいつ解約するかといった現実的な問題に応えられる可能性が高いからである．

付録

証明（補題 1）

定理 1 から最適値関数について

$$
\begin{aligned}
J(W(t),t) &= \max_{C_F(t),C_M(t),P_F(t),P_M(t),w(t)} E_t\Bigg[\int_0^{\tau} U(C_F(s),C_M(s),s)ds \\
&\qquad +\mathbf{1}_{\{\tau_F<\tau_M\}}J_M\left(W(\tau)+\frac{P_F(\tau)}{\mu_F(\tau)},\tau\right)+\mathbf{1}_{\{\tau_F\geq\tau_M\}}J_F\left(W(\tau)+\frac{P_M(\tau)}{\mu_M(\tau)},\tau\right)\Bigg] \\
&= \max_{C_F(t),C_M(t),P_F(t),P_M(t),w(t)} E_t\Bigg[\int_0^{\tau} U(C_F(s),C_M(s),s)ds \\
&\qquad +E_\tau\left[\mathbf{1}_{\{\tau_F<\tau_M\}}J_M\left(W(\tau)+\frac{P_F(\tau)}{\mu_F(\tau)},\tau\right)+\mathbf{1}_{\{\tau_F\geq\tau_M\}}J_F\left(W(\tau)+\frac{P_M(\tau)}{\mu_M(\tau)},\tau\right)\right]\Bigg] \\
&= \max_{C_F(t),C_M(t),P_F(t),P_M(t),w(t)} E_t\Bigg[\int_0^{\tau} U(C_F(s),C_M(s),s)ds \\
&\qquad +\frac{\lambda_F}{\lambda_F+\lambda_M}J_M\left(W(\tau)+\frac{P_F(\tau)}{\mu_F(\tau)},\tau\right)+\frac{\lambda_M}{\lambda_F+\lambda_M}J_F\left(W(\tau)+\frac{P_M(\tau)}{\mu_M(\tau)},\tau\right)\Bigg]
\end{aligned}
$$

を導出できる．ここで τ はパラメータ $(\lambda_F(t)+\lambda_M)$ のポアソン過程に従うことから，補題 1 を得る．

証明（命題 1）

1 階の条件 (15), (15), (16), (17), (18), (19) を整理し関数 ϕ に代入すると偏微分方程式

$$
\begin{aligned}
&\frac{1-\gamma}{\gamma}k^*(t)\{J_W\}^{\frac{-\gamma}{1-\gamma}}+J_t+\bigg\{(r+\mu_F(t)+\mu_M(t))W(t) \\
&+y_{f2}(t)+y_{m2}(t)+\mu_F(t)b_M(t)+\mu_M(t)b_F(t)\bigg\}J_W-\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha-r}{\sigma}\right)^2\frac{J_W}{J_WW}=0
\end{aligned}
$$

が得られる．ここで解の候補として

$$
f(W(t),t)=\frac{a_0(t)}{\gamma}\Big(W(t)+b_0(t)\Big)^{\gamma}
$$

を考えて，上式へ代入し W に関する恒等式とすると，$a_0(t),b_0(t)$ に関する微分方程式が得られる．これらを解くと $a_0(t)=a^*(t),b_0(t)=b^*(t)$ が得られる．また，このとき十分条件 (22) が満たされていることが確認できる．

謝辞

JAFEE (2005) 冬季大会において，一橋大学の三浦良造氏，東京工業大学の中川秀敏氏，ニッセイ基礎研究所の田中周二氏，電気通信大学の宮崎浩一氏から貴重なコメントを頂いた．また，慶応義塾大学・政策 COE 主催「保険・年金リスク研究報告会」において，慶応義塾大学の森平爽一郎氏と小暮厚之氏および報告会参加者から本論文を改善するための有用なコメントを頂いた．匿名の 2 人のレフリーからは有益かつ建設的な意見を頂き本論文の完成度を高めることができた．ここに感謝の意を記したい．なお本研究を実施するにあたり平成 16 年度簡易保険文化財団調査研究に対する助成および文部科学省科学研究費補助金 (課題番号:17710123) による助成を受けた．

参考文献

[1] 小守林克哉 (2001),「世帯における生命保険のモデル化と最適保険金額」,『日本ファイナンス学会第９回大会予稿集』, 419-433.

[2] 枇々木則雄, 小守林克哉, 豊田暢子 (2005),「多期間最適化手法を用いた世帯の資産形成モデル」,『ジャリップジャーナル』, **1**, 45-68.

[3] Abel, A. B. and J. C. Eberly (1997), "An exact solution for the investment and value of a firm facing uncertainty, adjustment costs, and irreversibility," *Journal of Economic Dynamics and Control*, **21**, 831–852.

[4] Bodi, Z, R. C. Merton and W. Samuelson (1992), "Labor supply flexibility and portfolio choice in a life cycle model," *Journal of Economic Dynamics and Control*, **16**, 427–449.

[5] Brennan, M. J. and Y. Xia (2000), "Stochastic interest rates and the bond-stock mix," *European Finance Reivew*, **4**, 197–210.

[6] Brennan, M. J. and Y. Xia (2002), "Dynamic asset allocation under inflation," *Journal of Finance*, **57**, 1201–1238.

[7] Campbell, Y. and L. M. Viceira (2001), "Who should buy long-term bonds?," *The American Economic Review*, **91**, 99–127.

[8] Constantinides, , G. M. (1990), "Habit formation: aresolution of the equity premium puzzle," *Journal of Political Economy*, **98**, 519–543.

[9] Cuoco, D. (1997), "Optimal consumption and equilibrium prices with portfolio constraints and stochastic income," *Journal of Economic Theory*, **72**, 33–73.

[10] Damgaard, A., B. Fuglsbjergt and C. Munk (2003), "Optimal consumption and investment strategies with a perichable and an indivisible deurable consumption good," *Journal of Economic Dynamics and Control*, **28**, 209–253.

[11] Dixit, A. and R. S. Pindyck (1994), "*Investment under uncertainty,*" Princeton.

[12] Fisher, I. (1930), "*The theory of interest,*" Macmillan.

[13] Fischer, S. (1973), "A life cycle model of life insurance purchases," *International Economics Review*, **14**, 132–152.

[14] Grosmann, S. J. and G. Laroque (1990), "Asset pricing and optimal portfolio choice in the presence of illiquied durable consumption goods," *Econometorica*, **58**, 25–51.

[15] Heath, D., R. Jarrow, and A. Morton (1992), "Bond pricing and the term structure of interest rate: a new methodology for contingent claims valuation," *Econometorica*, **60**, 77–105.

[16] Koo, H. K. (1998), "Consumption and portfolio selection with labor income: a continuous time approach," *Mathematical Finance*, **8**, 49–65.

[17] Lax, Y. (2001), "Habit formation and lifetime portfolio selection," working paper, University of Pennsylvania.

[18] Marshall, A. (1920), "*Principles of economics,*" Macmillan.

[19] Merton, R. C. (1969), "Lifetime portfolio selection under uncertainty: the continuous time case," *Review of Economic Studies*, **32**, 137–150.

[20] Merton, R. C. (1971), "Optimal consumption and portfolio rules in a continuous-time model," *Journal of Economic Theory*, **3**, 373–413.

[21] Merton, R. C. (1973), "An intertemporal capital asset pricing model," *Econometorica*, **41**, 867–887.

[22] Munk, C and C Sorensen (2004), "Optimal consumption and investment strategies with stochastic interest rates," *Journal of Banking and Finance*, **28**, 1987–2013.

[23] Richard, S. F. (1975), "Optimal consumption, portfolio and life insurance rules for an uncertain lived induvidual in a continous time model," *Journal of Financial Economics*, **2**, 187–203.

[24] Shreve, S. and M. Soner (1994), "Optimal investment and consumption with transaction cost," *Annals of Applied Probability*, **4**, 609–692.

[25] Svensson, L.E.O. and I. M. Werner (1993), "Nontraded assets in incomplete markets: pricing and portfolio choice," *European Economic Reivew*, **37**, 1149–1168.

[26] Tobin, J. (1958), "Liquidity preference as behavior towards risk," *Review of Economic Studies*, **25**, 68–85.

[27] Vasicek, O. A. (1977), "An equilibrium characterization of the term structure," *Journal of Financial Economics*, **5**, 177–188.

[28] Viceira, L. M. (2001), "Optimal portfolio choice for long-horizon investors with nontradable lablr income," *Journal of Finance*, **56**, 433–470.

[29] Yaari, M. E. (1965), " Uncertain lifetime, life insurance, and the theory of the consumer," *Review of Economic Studies*, **32**, 137–150.