研究論文

生命保険契約における転換権のオプション価値評価

門田　伸一*

2006年04月03日投稿
2006年08月28日受理

概要

生命保険会社における ALM を困難なものとする要因として, 保険契約が保険事故に対する保証のみならず潜在的デリバティブを包含していること, しばしば当該デリバティブが無償提供されていることが指摘される. 当該デリバティブの例としては, 計算基礎率の保証価値, 解約権, 配当権, 転換権等が掲げられるが, 本稿では転換権を計算基礎率変更前後における保険契約の公正価値の上に書かれるアメリカン・エクスチェンジ・オプションとみなし, 価値評価を試みた. また, 権利行使により保険契約が消滅しないことから複数回の転換が許容されることに着目し, 転換対象を保険料払込部分に限定すれば, 将来の転換行動が過去のそれに依存しないこと, 下方修正条項付転換社債に準じた多重格子法により多段階オプションとして評価できることを示した.

キーワード： Embedded Derivatives, リスク管理, 保険数理, 非完備市場, Wang 変換

1 序論

国内生命保険市場において販売される定額保険商品は, 被保険者の保険事故に対する保障を提供すると同時に付随的な権利を契約者に対して与えている. 保険契約の構造を振り返ってみれば, それは明らかであろう.

(a) 約款上に基礎率変更権を留保していない限り, 対応する保有資産の運用成果に依存せず保険期間中の計算基礎率は保証される.

(b) 事業年度末決算において剰余が発生した場合には当該金額の一部が配当として分配される.

(c) 契約者は将来に亘り何時でも契約を解除することができる.

(d) 契約者は現契約の責任準備金等を転換価格として, 新規契約に充当することができる.

ここで保険契約を死亡率, 金利の期間構造及び保険会社の保有資産の上に書かれるデリバティブと考えると, 計算基礎率の保証は保険期間に亘るスワップ, 剰余金分配は当該契約に対応する保有資産を原資産, 責任準備金を行使価格, 事業年度決算時点を満期とするヨーロピアン・コール・オプション, 解約権は当該契約の公正価値[*1]を原資産, 約定された解約返戻金額を行使価格とするアメリカン・プット・オプション, 転換権は当該契約における計算基礎率変更前後の公正価値を原資産とするアメリカン・エクスチェンジ・オプションと捉えるこ

* 野村證券株式会社金融経済研究所金融工学研究センター / 筑波大学大学院ビジネス科学研究科企業科学専攻博士後期課程
〒100-8130 東京都千代田区大手町 2-2-2 アーバンネット大手町ビル　E-mail: smonden@ics.hit-u.ac.jp

*1 厳密には公正価値には全てのキャッシュフローが含まれるため, 潜在的デリバティブが含まれなければならない. 然るに, 本稿では当該デリバティブを含まない, オリジナルの契約価値を公正価値とする.

とができる.

これらの Embedded Derivarives（以下では潜在的デリバティブと表現する）に対しては多くの先行研究がなされている．興味深い点は当該デリバティブが保険価格，内部留保水準，リスク管理において無視し得ない存在であるとの指摘が少なくないことである．

例えば，Britt[2001] は伝統的な保険数理では当該デリバティブが評価されない問題を指摘し，Briys and Varenne[1997] では生命保険会社における ALM の失敗を当該デリバティブの無視に求めている．Grosen and Jørgensen[2000][2001] は 1980 年代後半から 1990 年代に日米欧で発生した生命保険会社の破綻について，予定利率管理の失敗，信用リスク管理の失敗等の共通要因を指摘している．

さて，保障内容の見直しに伴い，既契約を解除し新契約を締結するという行動は解約及び転換に共通する．然るに，将来に亘る保障の継続，配当起算日の継承*2，複数権利行使の許容，課税関係等で転換は解約に比較し優遇されている．

加えて，契約者及び営業職員等の利害関係も相違する．営業職員の成績評価が保有契約のみにより行われる環境を仮定しよう．営業職員等にとって契約者の解約は成績評価の低下というペナルティが存在する．すなわち，契約者と営業職員等の利害が対立する*3．

然るに転換については契約者と営業職員等の明白な利害対立は存在しない．例えば適用される計算基礎率の変化が保険料の廉価を伴う，換言すれば保険会社の調達コストが上昇する場合を想定すると明らかであろう．転換により既存契約の増額等が図られるのであれば営業職員の成績評価は向上する．同時に契約者も保障の購入単価を抑制することが可能となり，両者の利害は一致することとなる．

金利上昇局面においては，解約に伴う流動性リスクの顕在化よりも，転換に伴う保有契約の予定利率上昇が生命保険会社経営に重大な影響を及ぼすのではないか．当該疑問が本研究の動機である．

2 評価モデルの概要

2.1 転換制度の概要

転換制度の導入は，昭和 50 年の保険審議会答申において検討を求められたことに対応したものであり，基本要件として次掲のものが要求されている．

(a) 転換の前後を通じて契約者及び被保険者が同一であること．
(b) 有配当契約の場合，契約者配当，特別配当の権利を継承すること．
(c) 契約締結後 2 年以上を継続した後の転換に対しては，元契約の保険金額を限度として告知義務違反を問わないこと．
(d) 責任準備金等を新たな契約の責任準備金等に継承すること*4．

すなわち，転換とは既契約の下取価格*5を評価し，当該価格を新契約に充当するものである．転換価格は普通保険約款上責任準備金と規定され，これに未払いの配当金や据え置かれていた保険金等を含めて構成される．なお，消滅時特別配当金は特別な場合を除いて転換価格には含まれない．

---

*2 ただし，転換の場合には新契約費の償却も継承される．

*3 谷口学史 [2003] は日本の保険市場における主力が保障商品であることから，金利と解約率の相関に疑問を呈している．然るに当該結果については，保険契約者が経済的に合理的な行動を選択しないためであるのか，営業職員の解約防止努力が影響しているのかを検証すべきである．

*4 責任準備金等の適用を要求する背景には，転換を「契約内容の変更」と位置づけ，既契約を解除し新契約を締結する「乗換」とは区別し，課税関係を絶つ目的があったものと金村慶二・浅野淳・千葉雅弘 [2004] は指摘している．

*5 一般に転換価格と称される．

2.2 保険数理による転換制度の記述

2.2.1 転換許容回数を1回とする場合

保険料 $P_{x:\overline{n|}}$, 責任準備金 ${}_{\tau}V_{x:\overline{n|}}$, 給付現価 $A_{x:\overline{n|}}$, 年金現価 $\ddot{a}_{x:\overline{n|}}$ 等, 保険数学上適用される記号の解説は Appendix に示し, 以下では断り無く当該記号を適用する.

年齢 x で加入した保険期間 n, 保険金額1の養老保険を第 τ 保険年度末に同種同保険金額の契約に転換するものとする. このとき, 転換財源は責任準備金額である.

$$
{}_{\tau}V_{x:\overline{n|}} = A_{x+\tau:\overline{n-\tau|}} - P_{x:\overline{n|}}\ddot{a}_{x+\tau:\overline{n-\tau|}} \tag{1}
$$

ただし, $P_{x:\overline{n|}}$ は転換前 (契約時) 保険料 P_0 である.

転換前後の計算基礎率に基づく記号を start, first の添字により区別しよう. 払済保険金額は転換財源を一時払保険料として充当することにより購入できる保険金額, 転換後平準保険金額は当初契約保険金額に対する当該払済保険金額の不足額であるので,

$$
\begin{aligned}
\text{払済 } S_1 &= \frac{{}_{\tau}V_{x:\overline{n|}}^{start}}{A_{x+\tau:\overline{n-\tau|}}^{first}} && (2)\\
\text{平準 } S_1 &= \max(\text{平準 } S_0 - \text{払済 } S_1, 0) && (3)\\
\text{平準 } S_0 &= 1
\end{aligned}
$$

となる. 転換後保険料 P_1 は当該平準保険金額に対して設定すればよい.

$$
\begin{aligned}
P_1 &= \text{平準 } S_1 \frac{A_{x+\tau:\overline{n-\tau|}}^{first}}{\ddot{a}_{x+\tau:\overline{n-\tau|}}^{first}}\\
&= \max(P_{x+\tau:\overline{n-\tau|}}^{first} - \frac{{}_{\tau}V_{x:\overline{n|}}^{start}}{\ddot{a}_{x+\tau:\overline{n-\tau|}}^{first}}, 0) && (4)
\end{aligned}
$$

なお, 第 τ_1 保険年度末で転換した場合の第 τ_2 保険年度末 $(\tau_1 < \tau_2)$ の責任準備金額は次掲のとおりである.

$$
\begin{aligned}
\text{払済部分 } V_{\tau_2} &= \text{払済 } S_1 A_{x+\tau_2:\overline{n-\tau_2|}}^{first} && (5)\\
\text{平準部分 } V_{\tau_2} &= \text{平準 } S_1 {}_{\tau_2-\tau_1}V_{x+\tau_1:\overline{n-\tau_1|}}^{first} && (6)\\
\text{合計 } V_{\tau_2} &= \max(1 - \frac{{}_{\tau_1}V_{x:\overline{n|}}^{start}}{A_{x+\tau_1:\overline{n-\tau_1|}}^{first}}, 0) {}_{\tau_2-\tau_1}V_{x+\tau_1:\overline{n-\tau_1|}}^{first}\\
&\quad + \frac{{}_{\tau_1}V_{x:\overline{n|}}^{start}}{A_{x+\tau_1:\overline{n-\tau_1|}}^{first}} A_{x+\tau_2:\overline{n-\tau_2|}}^{first} && (7)
\end{aligned}
$$

2.2.2 転換許容回数を複数回とする場合

次に τ_2 保険年度末で更に転換を行うことを考える. このとき価格設定には, 平準部分のみを転換するのか, 払済部分までを含めるのか, 転換対象を特定する必要がある.

(7) 式の責任準備金合計を転換対象とすると,

$$
\begin{aligned}
\text{払済 } S_2 &= \max(1 - \frac{{}_{\tau_1}V_{x:\overline{n|}}^{start}}{A_{x+\tau_1:\overline{n-\tau_1|}}^{first}}, 0) \frac{{}_{\tau_2-\tau_1}V_{x+\tau_1:\overline{n-\tau_1|}}^{first}}{A_{x+\tau_2:\overline{n-\tau_2|}}^{second}}\\
&\quad + \frac{{}_{\tau_1}V_{x:\overline{n|}}^{start}}{A_{x+\tau_1:\overline{n-\tau_1|}}^{first}} \frac{A_{x+\tau_2:\overline{n-\tau_2|}}^{first}}{A_{x+\tau_2:\overline{n-\tau_2|}}^{second}} && (8)\\
\text{平準 } S_2 &= \max(1 - \text{払済 } S_2, 0) && (9)\\
& && (10)
\end{aligned}
$$

となる. 一方, (6) 式の平準部分責任準備金のみを転換財源とすると

$$\text{払済 } S_2 = (1 - \frac{{}_{\tau_1}V^{start}_{x:\overline{n|}}}{A^{first}_{x+\tau_1:\overline{n-\tau_1|}}})\frac{{}_{\tau_2-\tau_1}V^{first}_{x+\tau_1:\overline{n-\tau_1|}}}{A^{second}_{x+\tau_2:\overline{n-\tau_2|}}} \tag{11}$$

$$\text{平準 } S_2 = (1 - \frac{{}_{\tau_1}V^{start}_{x:\overline{n|}}}{A^{first}_{x+\tau_1:\overline{n-\tau_1|}}})\max(1 - \frac{{}_{\tau_2-\tau_1}V^{first}_{x+\tau_1:\overline{n-\tau_1|}}}{A^{second}_{x+\tau_2:\overline{n-\tau_2|}}}, 0) \tag{12}$$

である. 結果として 2 回目転換後の平準保険料 P_2 は,

$$P_2 = \text{平準 } S_2 P^{second}_{x+\tau_2:\overline{n-\tau_2|}} \tag{13}$$

により求められる.

2.3 評価モデルの概要

さて, 保険契約者は如何なる状況において転換行動を選択するのであろうか. 第一には保障内容の見直しであろう. 付保対象の拡大や保険金額の増額に伴い, 既契約を下取りに出すという判断は合理的である. 第二には保険価格の見直しであろう. 同種同保険金額の保険契約が現在よりも低廉な価格で購入できるのであれば, 合理的な契約者は転換権の行使により保障の対価, すなわち, 支払うべき保険料を引き下げるものと考えられる.

本稿における評価モデルは後者を再現するものである. すなわち, 計算基礎率, 具体的には予定利率と予定死亡率の変動を想定し, 転換前後の保険契約の公正価値を原資産とする多段階のアメリカン・エクスチェンジ・オプションとして転換権価値を評価する.

2.3.1 死亡率

保険価格設定に際しては死亡率 (生命表) を如何に表現するかが課題となろう. 第一には静態的・動態的の何れにより記述するか, 第二には何れの適用モデルを採用するかである.

静態的な表現を選択する場合には, 死亡率は定数として扱われる. この場合, 価格評価が比較的平易なものとなる長所の一方で, トレンドが反映されないという短所を持つ. 日本国においては死亡率低下が顕著であるが, 当該傾向を無視することは, 生存保障商品にとっては割安な, 一方, 死亡保障商品にとっては割高な評価となる.

なお, 死亡率の設定はテーブルに限定する必要はなく, 年齢の関数として与えることも可能である. 代表的な死亡法則として次掲のモデルが知られている.

表 1 代表的な死亡法則

死亡法則	死力	生存数
De Moivre (1725)	$\mu_x = \frac{1}{\omega - x}$	$l_x = l_0(1 - \frac{x}{\omega})$
Gompertz (1825)	$\mu_x = Bc^x$	$l_x = kg^{c^x}$
Gompertz-Makeham (1860)	$\mu_x = A + Bc^x$	$l_x = ks^x g^{c^x}$

ただし, 小暮厚之・長谷川知弘 [2005] が指摘するように, これらのパラメトリックモデルでは一部の年齢における適合度の犠牲を余儀なくすることに留意が必要である. 当該問題点の解決策として, 例えば荒井昭 [2001] では, 直列ワイブル分布を死力にあてはめることにより, 適合度の向上を試みている.

動態的な表現を選択する場合には, 死亡率を時間の関数として, 更に誤差項を与えることにより, 確率過程として扱うこととなる.

Milvesky and Promislow[2001] では, Gompertz 法則を拡張し, 時点 t, 年齢 x の死力 $\mu_{x,t}$ について, $\mu_{x,t}=\xi_0 e^{\xi_1 x+Y_t}$, $dY_t=-\alpha Y_t dt+\sigma dW_t$ とすることにより平均回帰性を与えている. 山本信一・上田泰三[2003], Dahl[2004] 等では, 金利にならい, 死力をアフィンモデルとして記述している. すなわち, Hull-White モデルの適用により平均回帰性を, 更に Cox-Ingersoll-Ross モデルの適用により非負制約の反映を可能としている.

なお, 死亡率の低下トレンドは世界的に観測される現象である. Lin and Cox[2004a] は死亡率改善予測が困難であることを指摘しているが, 渋谷政昭・華山宣胤 [2004] は極値理論を適用することによる日本人男性寿命分布の上限値を推定しており, 上限値を与えた上での動的死亡率表現等モデルの拡張が期待される.

本稿では, Lee and Carter[1992] の提唱する Lee-Carter モデル*6を採用する. Lee-Carter モデルは前掲死亡法則に依存せず, 時点 t, 年齢 x の死亡率 $q_{x,t}$ の対数値を,

$$\begin{aligned}\ln(q_{x,t}) &= \alpha_x+\sum\beta_x\gamma_t+\varepsilon_{x,t} \\ \sum\beta_x &= 1 \\ \sum\gamma_t &= 0\end{aligned} \tag{14}$$

と分解する手法であり, 誤差項 $\varepsilon_{x,t}$ にあてはめる分布の選択により様々に拡張できる. 例えば, 年齢に依存しない正規分布 $N(0,\sigma^2)$ とすれば, 対数死亡率 $\ln(q_{x,t})$ は正規分布 $N(\alpha_x+\sum\beta_x\gamma_t,\sigma^2)$ に従うこととなる.

2.3.2 測度変換

保険期間 n, 保険金額 1 の養老保険における第 t 保険年度末の責任準備金額公正価値について, リスク中立化法による記述を試みる. 時点 t におけるスポット・レートを r_t, 死力を μ_{x+t} とすると, 連続形では,

$$\begin{aligned}{}_tV^{MV}_{x:\overline{n|}} &= E^Q[A_{x+t:\overline{n-t|}}-P_{x:\overline{n|}}\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}}\mid\mathcal{F}_t] \qquad (15)\\ &= E^Q[\int_t^n e^{-\int_t^s(r_\tau+\mu_{x+\tau})d\tau}\mu_{x+s}ds+e^{-\int_t^n(r_\tau+\mu_{x+\tau})d\tau}\mid\mathcal{F}_t] \\ &\quad -P_{x:\overline{n|}}E^Q[\int_t^n e^{-\int_t^s(r_\tau+\mu_{x+\tau})d\tau}ds\mid\mathcal{F}_t] \qquad (16)\end{aligned}$$

離散形では,

$$\begin{aligned}{}_tV^{MV}_{x:\overline{n|}} = &\sum_{k=0}^{n-t-1}B(t,t+k+1)E^Q[{}_kp_{x+t+k}q_{x+t+k}\mid\mathcal{F}_t] \\ &+B(t,n)E^Q[{}_{n-t}p_{x+t}\mid\mathcal{F}_t] \\ &-P_{x:\overline{n|}}\sum_{k=0}^{n-t-1}B(t,t+k)E^Q[{}_kp_{x+t}\mid\mathcal{F}_t]\end{aligned} \tag{17}$$

となる. ただし, 死亡率とスポット・レートは独立を仮定している.

さて, 式 (17) を評価するためには測度変換された死亡率が必要である. ここで, 留意すべき点は死亡率について市場は非完備ということである.

非完備市場においては, リスク中立確率測度は一意に定まらない. このため, 確率測度の選択手法は森平爽一郎 [2004] に例示されるように複数のものが提唱されている. 具体的な適用例としては, 森平爽一郎 [2003] が Esscher 変換によるイベント発生回数に関するデリバティブ契約の価値, Lin and Cox[2004a][2004b] が Wang 変換による死亡率リンク債券の価格評価, 小島茂 [2005] が Esscher 変換によるストップ・ロス再保険の価格評価を示している. 本稿では Distortion 変換*7に属する Wang 変換*8を採用した.

*6 国立社会保障・人口問題研究所 [2002] では, 修正 Lee-Carter モデルが適用されている.
*7 Distortion 変換については, McLeish, D. L. and R. Mark Ressor[2003] に詳しい.
*8 Wang 変換の詳細については Wang[2002][2003][2004] を参照されたい.

Wang 変換では, 死亡率 $q_{x,t}$ の分布関数 $F(\cdot)$ を次式により変換する.

$$F^Q(q_{x,t}) = \Phi[\Phi^{-1}[F^P\{q_{x,t})\} - \lambda] \tag{18}$$

従って,

$$\frac{dQ}{dP}|_{\mathcal{F}_t} = \frac{\phi[\Phi^{-1}\{F(q_{x,t})\} - \lambda]}{\phi[\Phi^{-1}\{F(q_{x,t})\}]} \tag{19}$$

となる. ただし, $\phi(\cdot)$ は標準正規分布の確率密度関数, $\Phi(\cdot)$ は分布関数である.

P 測度下において, (14) 式は

$$\ln(q_{x,t}) = \alpha_x + \sum \beta_x \gamma_t + \varepsilon_{x,t} \sim N(\alpha_x + \sum \beta_x \gamma_t, \sigma^2) \tag{20}$$

であるので,

$$F(q_{x,t}) = \Phi[\frac{\ln(q_{x,t}) - (\alpha_x + \sum \beta_x \gamma_t)}{\sigma}] \tag{21}$$

$$\frac{dQ}{dP}|_{\mathcal{F}_t} = \exp[-\frac{1}{2}\{\lambda^2 - 2\lambda \frac{\ln(q_{x,t}) - (\alpha_x + \sum \beta_x \gamma_t)}{\sigma}\}] \tag{22}$$

を得る. 従って,Q 測度下における (14) 式は

$$\ln(q_{x,t}) = \alpha_x + \sum \beta_x \gamma_t + \lambda\sigma + \varepsilon_{x,t} \sim N(\alpha_x + \sum \beta_x \gamma_t + \lambda\sigma, \sigma^2) \tag{23}$$

となる.

Distortion 関数が凹関数であれば, Distortion Risk Measure は, Artzner et al.[1999] の提唱する"Coherent Risk Measure"となることが知られている. Wang 変換は Coherent 性を有しているため, Risk Measure としての保険料は Coherent となる. より大きなリスクに対して高い保険料を賦課する単調性 (monotonicity) は当然であり, 例えば生存保障と死亡保障を同時に販売する場合のリスク分散を考慮する劣加法性 (Sub-additivity) も合理的である. 正の一次同次性 (positive homogeneity) は, 引受リスクに対する保険料の線形性を保証するものであるが, これは同一のリスクに対しては同一の保険料を賦課することに他ならない.*9.

また, Normal Distortion においては, Distortion 関数と Dual Distortion 関数がリスクの市場価格 λ の正負を逆転するだけで同一の関数形を持つ. これは, 資産と負債, 収益と損失を整合して扱えることを意味している*10. 加えて, 正規 Copulas を導入すれば, 多変量への拡張も容易である*11.

本稿では死亡率に対数正規過程を適用しているため, 式 (23) のとおり解析解が得られるが, 正規分布及び対数正規分布を除く変換対象の場合には解析解の導出は困難である. 然るに, 変換対象のサンプル・パス, 標準正規分布関数及び逆関数が用意されていることを前提として数値解析が容易である. 更に, 変換に際しては積率の存在を要求しない. 以上が Wang 変換の望ましい性質の一部である*12.

2.3.3 転換権の価値 (転換許容回数を 1 回とする場合)

年齢 x で加入した保険期間 n, 保険金額 1 の養老保険を第 τ 保険年度末に同種同保険金額の契約に転換するとき, 転換後の責任準備金公正価値は次のように表現できる.

$$\begin{aligned} {}_0V^{first,MV}_{x+\tau:\overline{n-\tau|}} &= \max(\frac{{}_\tau V^{start}_{x:\overline{n|}}}{A^{first}_{x+\tau:\overline{n-\tau|}}}, 1) A^{MV}_{x+\tau:\overline{n-\tau|}} \\ &\quad - \max(1 - \frac{{}_\tau V^{start}_{x:\overline{n|}}}{A^{first}_{x+\tau:\overline{n-\tau|}}}, 0) P^{MV}_{x+\tau:\overline{n-\tau|}} \ddot{a}^{MV}_{x+\tau:\overline{n-\tau|}} \end{aligned} \tag{24}$$

*9 Esscher 変換は正の一次同次性を満足せず, Coherent ではない. 詳細については Wang[2003] を参照されたい.

*10 Wang[1996] で提唱した Proportional Hazard Ditortion は Distortion 関数と Dual Distortion 関数の関数形が異なる.

*11 多変量の Esscher 変換及び Wang 変換については, Kijima[2006] を参照されたい.

*12 Hamada and Sherris[2003] は Wang 変換の欠点についても示している.

転換権価値は転換前後の公正価値を原資産とするアメリカン・エクスチェンジ・オプションとして評価すればよい．転換権の行使により得られるペイオフは

$$Payoff(\tau) = \max({}_0V^{first,MV}_{x+\tau:\overline{n-\tau}|} - {}_\tau V^{start,MV}_{x:\overline{n}|}, 0) \tag{25}$$

であるので，時点 t における転換権の価値は

$$ConvertibleValue_1 = \sup_\tau E^Q[e^{-\int_t^\tau r_u du} Payoff(\tau) \mid \mathcal{F}_t] \tag{26}$$

により求められる．

2.3.4 転換権の価値 (転換許容回数を複数回とする場合)

次に 2 回の転換権行使を許容される場合を考える．この場合には 1 回目の権利行使により 2 回目の転換権を得られるものとして評価すればよい．ただし，既に示したように，転換対象の範囲により権利行使後の保険金額構成，保険料が異なることに留意が必要である．

τ_1 時点で 1 回目の権利行使後，τ_2 時点で 2 回目の権利行使を行うものとすると，払済部分を含む全ての責任準備金を転換財源とする場合には，式 (8) 及び (9) より，2 回目転換後の払済保険金額，平準保険金額は契約締結時，1 回目権利行使時，2 回目権利行使時の計算基礎率に基づき決定されることが確認できる．すなわち，2 回目転換権行使判定は契約締結時及び 1 回目権利行使時の意思決定に依存する．

一方，転換財源を払済部分を除く保険料払込部分の責任準備金に限定すると，2 回目転換権行使後の保険料払込部分の責任準備金公正価値は

$$\begin{aligned}{}_0V^{MV}_{x+\tau_2:\overline{n-\tau_2}|} &= \left(1 - \frac{{}_{\tau_1}V^{start}_{x:\overline{n}|}}{A^{first}_{x+\tau_1:\overline{n-\tau_1}|}}\right) \\ &\quad \times\left[\max\left(\frac{{}_{\tau_2-\tau_1}V^{first}_{x+\tau_1:\overline{n-\tau_1}|}}{A^{second}_{x+\tau_2:\overline{n-\tau_2}|}}, 1\right) A^{MV}_{x+\tau_2:\overline{n-\tau_2}|} - P_2 \ddot{a}^{MV}_{x+\tau_2:\overline{n-\tau_2}|}\right]\end{aligned} \tag{27}$$

$$P_2 = \max\left(1 - \frac{{}_{\tau_2-\tau_1}V^{first}_{x+\tau_1:\overline{n-\tau_1}|}}{A^{second}_{x+\tau_2:\overline{n-\tau_2}|}}, 0\right) P^{second}_{x+\tau_2:\overline{n-\tau_2}|} \tag{28}$$

となる．当該部分の 2 回目転換権行使前の責任準備金公正価値は

$${}_{\tau_2-\tau_1}V^{MV}_{x+\tau_1:\overline{n-\tau_1}|} = \left(1 - \frac{{}_{\tau_1}V^{start}_{x:\overline{n}|}}{A^{first}_{x+\tau_1:\overline{n-\tau_1}|}}\right)\left[A^{MV}_{x+\tau_2:\overline{n-\tau_2}|} - P^{first}_{x+\tau_1:\overline{n-\tau_1}|}\ddot{a}^{MV}_{x+\tau_2:\overline{n-\tau_2}|}\right]$$

であるので，2 回目転換権行使のペイオフは

$$\begin{aligned}Payoff(\tau_2) &= \left(1 - \frac{{}_{\tau_1}V^{start}_{x:\overline{n}|}}{A^{first}_{x+\tau_1:\overline{n-\tau_1}|}}\right) f(\tau_1, \tau_2) \\ f(\tau_1, \tau_2) &= \max\left[\max\left(\frac{{}_{\tau_2-\tau_1}V^{first}_{x+\tau_1:\overline{n-\tau_1}|}}{A^{second}_{x+\tau_2:\overline{n-\tau_2}|}} - 1, 0\right) A^{MV}_{x+\tau_2:\overline{n-\tau_2}|}\right. \\ &\quad \left. + (P^{first}_{x+\tau_1:\overline{n-\tau_1}|} - P_2)\ddot{a}^{MV}_{x+\tau_2:\overline{n-\tau_2}|}, 0\right]\end{aligned} \tag{29}$$

となる．従って，時点 τ_1 における 2 回目転換権の価値は

$$\begin{aligned}ConvertibleValue_2 &= \sup_{\tau_2} E^Q[e^{-\int_{\tau_1}^{\tau_2} r_u du} Payoff(\tau_2) \mid \mathcal{F}_{\tau_1}] \\ &= \left(1 - \frac{{}_{\tau_1}V^{start}_{x:\overline{n}|}}{A^{first}_{x+\tau_1:\overline{n-\tau_1}|}}\right) \sup_{\tau_2} E^Q[e^{-\int_{\tau_1}^{\tau_2} r_u du} f(\tau_1, \tau_2) \mid \mathcal{F}_{\tau_1}]\end{aligned} \tag{30}$$

と定義できる．すなわち，2 回目転換権行使判定は，時点 τ_1 において年齢 $x+\tau_1$ で締結する保険期間 $n-\tau_1$，保険金額 1 の保険契約のそれに一致し，契約締結時の影響から開放される．

2 回目転換権は 1 回目転換権行使により得られるものであるため，式 (25) で定義される 1 回目転換権行使のペイオフは次掲のように変化する．

$$Payoff(\tau_1) = \max\{({}_0V^{first,MV}_{x+\tau:\overline{n-\tau|}} + ConvertibleValue_2) -_\tau V^{start,MV}_{x:\overline{n|}}, 0\}$$

同様の処理を反復することにより，転換許容回数を更に増やすことが可能である．

3 数値解析結果

3.1 Lee-Carter モデルのパラメータ推定

1987 年から 2004 年における簡易生命表の男性死亡率を入力情報とし，式 (14) のパラメータ推定を行う．このためには，

$$\begin{aligned} minimize \quad & \sum_{x=0}^{\omega}\sum_{t=1}^{T}\{\ln(q_{x,t}) - (\alpha_x + \sum^{n}\beta_x\gamma_t)\}^2 \\ & \equiv L_1[\alpha_0,\cdots,\alpha_\omega;\beta_0,\cdots,\beta_\omega;\gamma_1,\cdots,\gamma_T] \\ subject \quad to \quad & \sum_{x=0}^{\omega}\beta_x = 1 \\ & \sum_{t=1}^{T}\gamma_t = 0 \end{aligned} \tag{31}$$

を解けばよい．ただし，観測期間 T は 17 年，最終年齢 ω は 95 歳である．

α_x は，次により求められる．

$$\frac{\partial}{\partial\alpha_x}L_1 = -2\sum_{t=1}^{T}\{\ln(q_{x,t}) - (\alpha_x + \sum^{n}\beta_x\gamma_t)\} \to 0$$

$$\therefore \hat{\alpha_x} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\ln(q_{x,t}) \tag{32}$$

然るに，同様の処理により β_x 及び γ_t を求めることはできない．従って，次の段階では $z_{x,t} = \ln(q_{x,t}) - \hat{\alpha_x}$ に対する最小二乗解を特異値分解 (Singular Value Decomposition) により確保する．

$$minimize \quad L_2 = \sum_{x=0}^{\omega}\sum_{t=1}^{T}(z_{x,t} - \sum^{n}\beta_x\gamma_t)^2$$

$$z_{x,t} - \sum^{n}\beta_x\gamma_t \to Y = \begin{pmatrix} y_{0,1} & \cdots & y_{0,T} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{\omega,1} & \ddots & y_{\omega,T} \end{pmatrix}$$

$$SVD[Y] = U\Delta V^{transpose}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} u_{0,0} & \cdots & u_{0,\omega} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{\omega,0} & \ddots & u_{\omega,\omega} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_{0,1} & \cdots & \delta_{0,T} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{\omega,1} & \ddots & \delta_{\omega,T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{1,1} & \cdots & v_{1,T} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{\omega,1} & \ddots & v_{\omega,T} \end{pmatrix}^{transpose}$$

β_x^i は行列 U の第 i 列に対応する．ただし，$\sum_{x=0}^{\omega}u_{x,i} = 1$ を満足しなければならない．従って，

$$[\beta_0{}^i,\cdots,\beta_\omega{}^i] = \frac{1}{\sum_{x=0}^{\omega}u_{x,i}}[u_{0,i},\cdots,u_{\omega,i}] \tag{33}$$

となる．同様にして $\gamma_t{}^i$ を求めればよい．すなわち，$\Delta V^{transpose}$ の第 i 列に $\sum_{x=0}^{\omega} u_{x,i}$ を乗じた結果を $\gamma_t{}^i$ とする．推定結果は次掲のとおりである．

第三段階では β_x 及び γ_t の次数 n をどこまで採用するかを検討する．本稿では前掲簡易生命表に対し主成分分析を行い，累積寄与率が概ね 95% となる 4 次までを採用した．将来予測に際しては各 γ_t に ARIMA をあてはめ，当該結果を適用することになる．

最終段階では誤差項にあてはめる分布を選択する．本稿では年齢及び時点に依存しない正規分布 $N(0,\sigma^2)$ を適用し，σ の推定結果として 0.00149 を得た．

表 2　Lee-Carter Model におけるパラメータ (1)

年齢	α	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5
0	△ 5.4932	0.02067	△ 0.01217	△ 0.04985	0.47915	0.02630
10	△ 8.9780	0.02219	△ 0.04788	0.22055	△ 1.03350	0.00849
20	△ 7.2589	0.01616	0.02327	△ 0.06210	△ 0.29423	△ 0.04909
30	△ 7.1808	0.00138	0.01721	0.07566	0.15400	△ 0.01684
40	△ 6.5067	0.00281	0.05987	0.01385	0.32720	△ 0.01871
50	△ 5.5183	0.00518	0.01304	0.04723	0.17475	0.04182
60	△ 4.5861	0.01028	△ 0.01153	△ 0.06784	△ 0.03978	0.00455
70	△ 3.6874	0.00776	△ 0.00050	0.01293	△ 0.06100	0.03239
80	△ 2.6437	0.01286	0.00392	△ 0.01724	△ 0.04706	0.04091
90	△ 1.6767	0.01075	0.00257	△ 0.03173	△ 0.36357	0.05747

表 3　Lee-Carter Model におけるパラメータ (2)

年数	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4	γ_5
1987	10.9930	1.04740	0.21985	0.07425	△ 0.02321
1988	11.1220	0.96440	0.10072	△ 0.02998	0.11545
1989	9.4493	0.46233	△ 0.01672	△ 0.03977	△ 0.20229
1990	9.1697	0.15540	△ 0.34793	0.03163	0.05120
1991	6.5778	0.07883	△ 0.34420	△ 0.04820	△ 0.02340
1992	7.0943	△ 0.22545	△ 0.32324	△ 0.01383	0.03723
1993	5.0005	△ 0.54156	△ 0.24794	△ 0.00144	0.00071
1994	3.5914	△ 0.91913	0.05398	0.04822	△ 0.01821
1995	6.3160	△ 1.02910	0.52879	△ 0.01497	△ 0.24019
1996	△ 1.1721	△ 0.75564	△ 0.10336	0.02317	0.25460
1997	△ 3.2624	△ 0.67724	△ 0.07379	△ 0.02387	0.26931
1998	△ 1.1708	△ 0.08486	0.24269	0.00710	△ 0.32878
1999	△ 3.1981	0.22370	0.58683	△ 0.04590	0.33654
2000	△ 7.1602	△ 0.00319	△ 0.05802	0.04098	0.08766
2001	△ 10.5570	0.33745	△ 0.05826	△ 0.00909	△ 0.01648
2002	△ 12.9070	0.32620	△ 0.23081	△ 0.01587	△ 0.22669
2003	△ 14.3970	0.68441	0.00354	0.02031	0.12825
2004	△ 15.2890	△ 0.04395	△ 0.04816	△ 0.00275	△ 0.20172

表 4　主成分分析の結果

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	…
固有値	74.63300	11.46900	2.87600	1.28070	0.83828	…
寄与率	78.98%	12.14%	3.04%	1.36%	0.89%	…
累積寄与率	78.98%	91.12%	94.16%	95.51%	96.40%	…

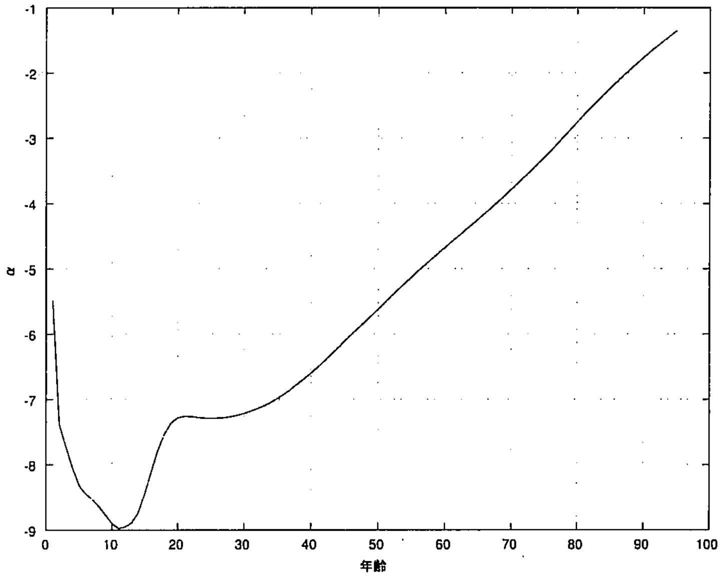

図 1　Lee-Carter Model におけるパラメータ α

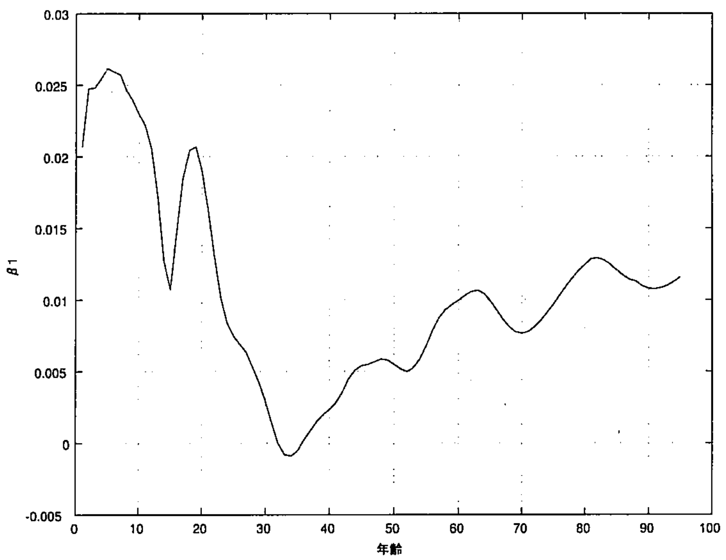

図 2　Lee-Carter Model におけるパラメータ β

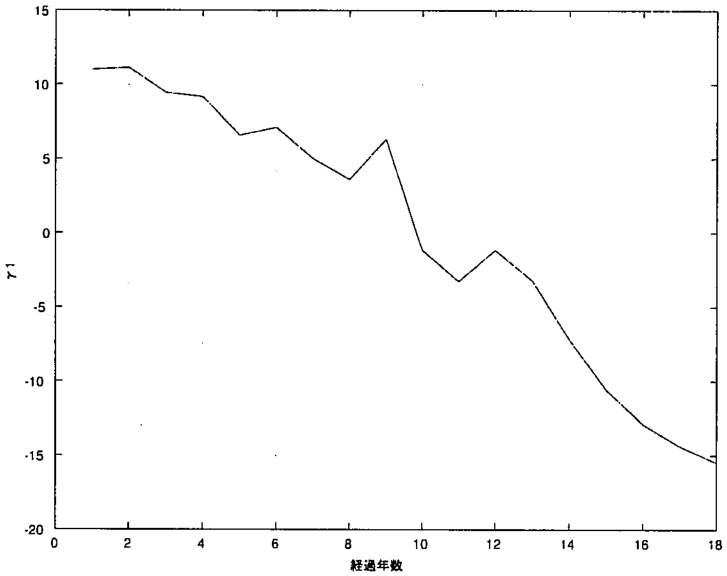

図 3　Lee-Carter Model におけるパラメータ γ

3.2 Wang 変換のパラメータ推定

予定利率 1.5%, 生保標準生命表 1996(死亡保険用) により評価される自然保険料と整合するように, すなわち,

$$
\begin{aligned}
&E^{Q}[e^{-\int_0^1 r(u)du} {q_x}^{LeeCarter} \mid \mathcal{F}_0] = vq_x^{\text{標準生命表}} \\
&\Rightarrow \lambda = \frac{1}{\sigma}[\ln \frac{vq_x^{\text{標準生命表}}}{B(0,1)} - (\alpha_x + \sum \beta_x \gamma_t + \frac{\sigma^2}{2})]
\end{aligned}
\tag{34}
$$

により, Wang 変換のパラメータ λ を決定した. 結果は次掲のとおりである. なお, 数値解析において λ は時系列で変化しないものと仮定している.

表 5　Wang 変換におけるパラメータ λ

年齢	λ	変換前死亡率	変換後死亡率
0	△ 630.846	0.00277	0.00108
10	406.187	0.00008	0.00015
20	525.369	0.00051	0.00112
30	80.858	0.00073	0.00083
40	63.093	0.00140	0.00154
50	23.707	0.00361	0.00373
60	121.595	0.00841	0.01007
70	93.309	0.02150	0.02469
80	160.375	0.05538	0.07027
90	187.225	0.15199	0.20073

(注) 変換前死亡率は 2005 年の予測結果である.

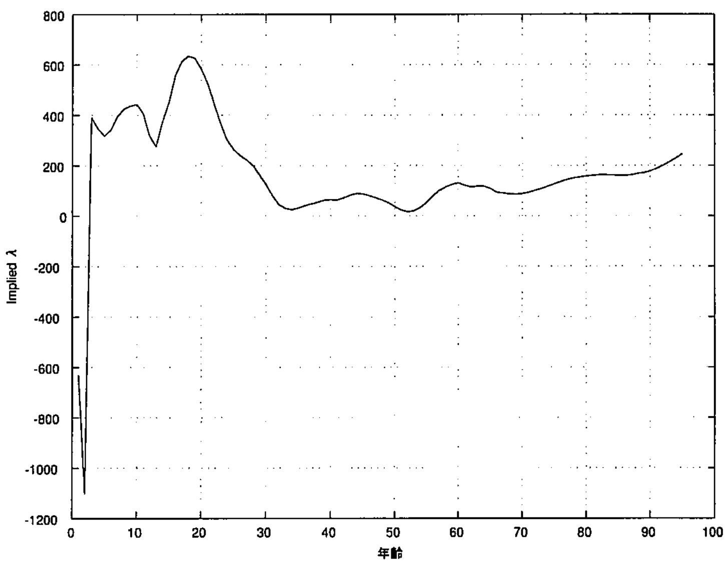

図 4　Wang 変換におけるパラメータ λ

3.3 Hull-White Model のパラメータ推定

スポット・レートモデルには

$$dr = [\theta(t) - \alpha r]dt + \sigma W_t$$

を採用し, 2005 年 8 月 17 日の金利・債券データによりパラメータ推定を行った. 結果として α に 0.06155, σ に 0.00767 を得た.

3.4 転換権の価値

Lee-Carter モデルに基づく粗製死亡率を 2 項格子, Hull-White モデルに基づくスポットレートを 3 項格子にあてはめ, 死亡率と金利の上に書かれるデリバティブとして保険契約を評価する*13. 対象とする保険商品は保険期間 10 年の定期保険及び養老保険である.

権利行使 1 回の場合は, 式 (25) 式に定義されるペイオフを持つプレーンなエクスチェンジ・オプションである. これを格子法で解くには以下のようにすればよい.

第 1 ステップ 転換前契約の公正価値に基づく格子を張る.

第 2 ステップ 死亡率及び金利の時点及び状態の異なる各グリッドポイントに対して, 転換後契約の公正価値を設定する.

第 3 ステップ 契約満期の 1 時点幅 (Δt) 前よりペイオフと継続価値を比較し, 権利行使判定を行う. 前者が後者より大きければ権利行使が行われる.

第 4 ステップ 第 3 ステップの処理を, 0 時点まで後進帰納的に反復する.

一方, 権利行使複数の場合に定義されるペイオフは式 (31), (29) のとおりである. 時点 τ_2 における権利行使は過去の行動に, 時点 τ_1 の権利行使は将来の行動に影響を受けるという経路依存性を有している. ただし, これは格子を多重化し, 正副構造を与えてやれば経路依存性を排除できる. 交換の対象は転換後公正価値唯一であり, 権利行使の方向が限定されているためである. 当該手法の代表例は, 下方修正条項付転換社債 (Moving Strike Convertible Bond) の価値評価に見ることができる*14.

保険数理において適用する死亡率は粗製死亡率に対し安全割増を計上した数値, リスク中立化法において適用する死亡率は粗製死亡率を測度変換した数値である. ここで, 安全割増は生保標準生命表 1996 より 2004 年簡易生命表を控除した年齢毎の率を時点に依存しないものとし, 以降の期間においてそのまま適用した. また, 将来における予定利率は各グリッド・ポイントにおける 10 年利付債券のパー・クーポンとしている*15.

数値解析に際し, オプションとしての転換権価値 $V(r,q,t)$ に加え, 転換権の死亡率に対する感応度 $\frac{\partial}{\partial q}V(r,q,t)$ 及び金利に対する感応度 $\frac{\partial}{\partial r}V(r,q,t)$ を評価している. 感応度分析を実施する動機の一つは, リスク管理上の要請である.

例えば, 死亡率及び金利の上に書かれるデリバティブ $V(r,q,t)$ 及び $V_1(r,q,t)$, 金利の上に書かれるデリバティブ $V_2(r,t)$ が存在し, 且つ, 市場での売買は無制約に実施可能とする. このとき, $V(r,q,t)$ の有する不確実性を消去するためには, 1 単位の $V(r,q,t)$ に対し, $-\frac{\frac{\partial}{\partial q}V}{\frac{\partial}{\partial q}V_1}$ の $V_1(r,q,t)$, $\frac{\frac{\partial}{\partial r}V_1 \cdot \frac{\partial}{\partial q}V - \frac{\partial}{\partial r}V \cdot \frac{\partial}{\partial q}V_1}{\frac{\partial}{\partial q}V_1 \cdot \frac{\partial}{\partial r}V_2}$ の $V_2(r,t)$ を保有すればよい*16. これは, デルタ・ヘッジとして知られており, 他商品及び債券等金利派生商品の保有量を調整

*13 格子法については, Clewlow and Christrickland[1998], 小田信之 [2001], 木島正明・長山いづみ・近江義行 [1996] に詳しい

*14 MSCB の評価については, 井上学 [2004], 勝田尚毅 [2004] を参照されたい. また, 格子法を適用したリアルオプション評価例については, Johnathan Mun[2002], 今井潤一 [2004] に詳しい.

*15 当該決定基準に基づく予定死亡率及び予定利率は大蔵省告示第 48 号「標準責任準備金の積立方式及び計算基礎率を定める件」とは異なるものである.

*16 証明は Appendix に示す.

することによる, 任意の商品における潜在的デリバティブのヘッジ可能性を示すものである. これはサープラス型 ALM の基本的な発想であるが, 特にデリバティブを用いる場合には LDI(Liability Driven Investment) と呼称を変化させる例も見られる.

定期保険, 養老保険ともに死亡保障を行う商品であるため, 死亡率の上昇は保険料の上昇を連鎖する. 将来法責任準備金額は給付現価より収入現価を控除することにより評価されるため, 保険金額が同一であれば保険料の上昇は公正価値を低下させる. 転換権行使は, 金利及び死亡率の状態変化に伴う当該契約の公正価値低下を保全するように行われるため, 転換権の死亡率に対する感応度は負値をとることとなる. すなわち, 死亡率が低下傾向にあれば, 転換権という潜在デリバティブの価値は上昇する. なお, 若齢部よりも高齢部において感応度の水準が大きくなることは, 前者に比較し後者のキャッシュ・バリュー (満期保険金及び責任準備金) の水準が高くなるためと解釈できる. ただし, 死亡率の上昇は生存保障部分 (満期保険金) の価値を減ずるため, 養老保険の死亡率感応度水準は定期保険のそれよりも抑制されている. これは, 先に示した契約保有構造による潜在的デリバティブのヘッジ可能性を示す結果である.

本稿においては予定利率が市場金利に連動するものと仮定している. 従って, 金利上昇により予定利率は上昇する. 予定利率の上昇は保険料の低下を連鎖するため公正価値を上昇させる. このため, 転換権の金利に対する感応度は正値をとる. これは金利感応度が負値をとる単純な債券保有では, 転換権の金利感応度を中和することができないことを意味している. 望ましい投資行動の一例は先に示したデルタ・ヘッジ*17であろう. 定期保険と養老保険を対比すると, 後者の権利価値及び金利感応度が高くなっている. これは同一保険期間の場合には, 満期保険金の存在により後者のキャッシュ・バリューが高くなるためと解釈できる. また, これは後者における予定利率管理の重要性が, 前者に比較しより高いことを示している.

死亡率及び金利感応度のいずれも転換許容回数, すなわち, 権利行使可能回数の増加は当然に転換権価値の上昇を連鎖する.

*17 デルタ・ヘッジの数学的解説については, Wilmott and Howison and Dewynne[1995], Stampfli and Goodman[2000], Neftci[2000] を参照されたい.

表6　1回目転換権価値と金利感応度・死亡率感応度

年齢	定期保険			養老保険		
	権利価値	感応度		権利価値	感応度	
		金利	死亡率		金利	死亡率
0	0.00018	△ 0.00228	△ 0.00091	0.04346	2.43363	△ 0.00014
10	0.00052	0.00324	△ 0.00114	0.04345	2.43379	△ 0.00026
20	0.00027	0.00235	△ 0.00385	0.04331	2.41989	△ 0.00064
30	0.00024	0.00613	△ 0.00516	0.04325	2.41724	△ 0.00101
40	0.00120	0.01202	△ 0.01135	0.04305	2.39370	△ 0.00222
50	0.00462	0.01740	△ 0.02535	0.04259	2.33599	△ 0.00535
60	0.00858	0.05572	△ 0.06384	0.04111	2.20468	△ 0.01269
70	0.02918	0.03817	△ 0.12612	0.03922	1.97475	△ 0.02809
80	0.06162	0.06033	△ 0.25082	0.03887	1.60652	△ 0.07711

表7　2回目転換権価値と金利感応度・死亡率感応度

年齢	定期保険			養老保険		
	権利価値	感応度		権利価値	感応度	
		金利	死亡率		金利	死亡率
0	0.00028	△ 0.00320	△ 0.00136	0.04831	2.67076	△ 0.00036
10	0.00055	0.00439	△ 0.00127	0.04829	2.66992	△ 0.00045
20	0.00036	0.00222	△ 0.00432	0.04807	2.65123	△ 0.00131
30	0.00029	0.00779	△ 0.00585	0.04798	2.64804	△ 0.00201
40	0.00139	0.01601	△ 0.01374	0.04767	2.62016	△ 0.00428
50	0.00519	0.02458	△ 0.02938	0.04699	2.55340	△ 0.01077
60	0.00976	0.07637	△ 0.07055	0.04501	2.39785	△ 0.02233
70	0.03150	0.06866	△ 0.13740	0.04301	2.11751	△ 0.03903
80	0.06454	0.10356	△ 0.26943	0.04235	1.66005	△ 0.10319

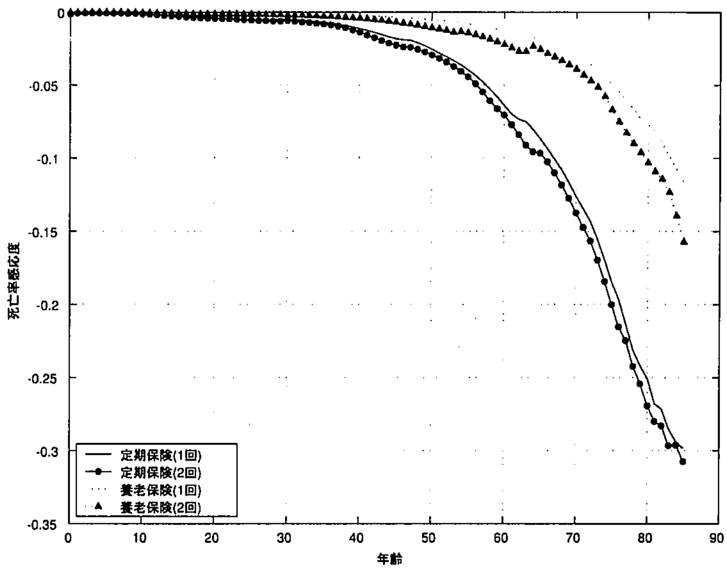

図 5　死亡率感応度の比較

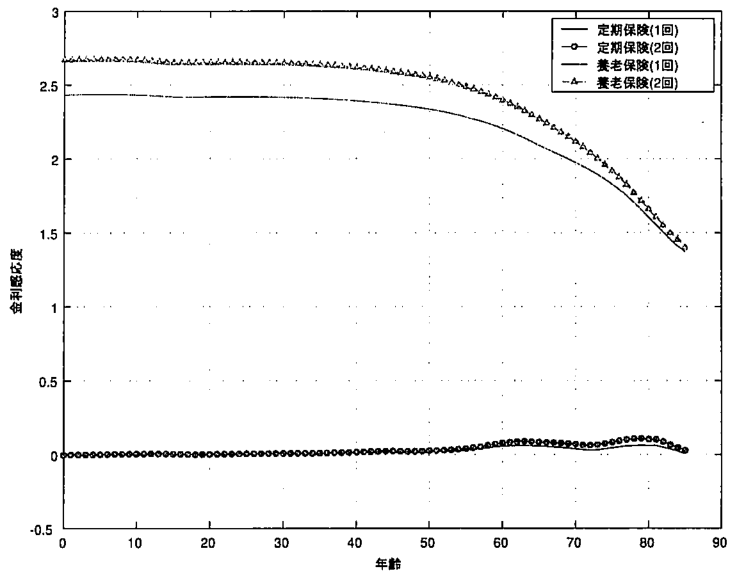

図 6　金利感応度の比較

4　結論

適用される計算基礎率の変化が保険料の廉価を伴う場合には，転換権の当該基礎率に対する感応度が正値をとることが確認された．当該結果は計算基礎率の不確実性を想定せずに資産保有を行えば，潜在的デリバティブの権利行使により負債からの要求収益率を確保できなくなる可能性を示唆している．

当該事態の回避策としては，ストックとフローによる対応が考えられる．ストックによる対応とは，伝統的な内部留保の蓄積である．ただし，保険事故発生に起因する損失と潜在的デリバティブに起因する損失は本質的に異なることに留意しなければならない．すなわち，後者には同時発現性が想定されることである．

同時発現性を有するとき，標本数を集めることによるリスク分散策は機能しない．むしろリスクは集積することとなる．従って，平均値の内部留保では損失実現に備える引当として不十分と考えられる．このためフローによる対応，すなわち，潜在的デリバティブの複製を併用することとなる．複製ポートフォリオの構築法 (デルタ・ヘッジ) について示しているが，複製可能性，会計との整合性等に留意が必要である．死亡率にリンクする証券，あらゆる年限に対応する金利派生商品の存在等，解決すべき課題は少なくないが，一方で享受できる効果も少なくない．

ストックとフローによるリスク対応策を堤防の嵩上げ，放水路の設置と治水に置換して考えれば理解しやすいであろう．前者はリスクの全てを保険会社自らが引受けることに対し，後者ではリスクの全て若しくは一部を市場に転嫁する．換言すれば，前者では自己再保険機能の財源を自らの保有するソルベンシーマージンに限定するが，後者では連結された資本市場のリスクテイカーに拡大することが可能となる．いずれが大きいかは言及するまでもないだろう．

第二の要素は，状態変数の変化に対する剰余の安定性である．状態変数の感応度を調整することはサープラス型 ALM の基本的な発想であり，経済環境及び経営環境の変化が想定される状態ではとりわけ有効な戦略となる．企業価値向上には必要な施策であろう．

謝辞

本研究は京都大学における公的年金調査プロジェクトの研究内容より派生したものである．刈屋武昭教授 (明治大学)，森平爽一郎教授 (慶応大学)，佐伯親良 (九州大学) をはじめとする関係者に敬意を表するとともに，参加の機会を得られたことを感謝したい．

日本金融・証券計量・工学学会 2005 年冬季大会において田中周二氏 (ニッセイ基礎研究所) 及び鈴木輝好助教授 (北海道大学) より，投稿に際して匿名の査読者より有益なコメントを，多段階オプションの評価方法に関しては大本隆氏 (野村證券)，内山朋規氏 (野村證券・UCLA 客員研究員) よりアドバイスを戴いた．また，研究に際して山田雄二助教授 (筑波大学)，牧本直樹助教授 (筑波大学) にご指導いただいた．記して謝意を表したい．

A Appendices

A.1 保険数学における記号の説明

年齢 x の生存者数を l_x, 死亡者数を d_x とする. 任意の時点 t において, 生存者数と死亡者数の関係は次掲のとおりとなる.

$$l_{x+t} - d_{x+t} = l_{x+t+1} \tag{35}$$

年齢 x の被保険者に対する保険金額 1, 保険期間 n, 年払の養老保険の保険料 $P_{x:\overline{n|}}$ は, 次の手順により求めることができる.

給付現価 養老保険とは保険事故発生時 (死亡時) 及び保険事故未発生下での満期時に保険金額を給付する保険商品である. 従って, 給付額の現在価値 S_x は, 保険金を期末払, 予定利率を i とすると次式により定義される.

$$\begin{aligned} S_x &= \frac{1}{l_x}\sum_{u=0}^{n-1}\frac{d_{x+u}}{(1+i)^{u+1}} + \frac{l_{x+n}}{l_x(1+i)^n} \\ &= \sum_{u=0}^{n-1}(\frac{1}{1+i})^{u+1}\frac{l_{x+u}}{l_x}\frac{d_{x+u}}{l_{x+u}} + (\frac{1}{1+i})^n\frac{l_{x+n}}{l_x} \end{aligned} \tag{36}$$

ここで, $v = \frac{1}{1+i}$, $\frac{l_{x-t}}{l_x} = {}_t p_x$, $\frac{d_x}{l_x} = q_x$, $D_x = v^x l_x$, $C_x = v^{x+1} d_x$ とすると, 式 (36) は

$$S_x = \sum_{u=0}^{n-1} v^{u+1}{}_u p_x q_{x+u} + v^n {}_n p_x \tag{37}$$

$$= \sum_{u=0}^{n-1}\frac{C_{x+u}}{D_x} + \frac{D_{x+n}}{D_x} \tag{38}$$

となる. 更に, $N_x = \sum_{u=0}^{\infty} D_{x+u}$, $M_x = \sum_{u=0}^{\infty} C_{x+u}$, とすれば,

$$S_x = \frac{(Mx - M_{x+n}) + D_{x+n}}{D_x} := A_{x:\overline{n|}} \tag{39}$$

と記述できる.

収入現価 同様にして保険料の収入現価 G_x を求められる. 保険料拠出が平準的に行われるものとすれば,

$$G_x = P_{x:\overline{n|}} \cdot \frac{1}{l_x}\sum_{u=0}^{n-1}\frac{l_{x+u}}{(1+i)^u} \tag{40}$$

$$= P_{x:\overline{n|}} \cdot \sum_{u=0}^{n-1} v^u {}_u p_x \tag{41}$$

$$= P_{x:\overline{n|}} \cdot \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} := P_{x:\overline{n|}} \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n|}} \tag{42}$$

保険料の決定 給付現価と収入現価が等価となるように, すなわち, 収支相当の原則に則り, 保険料を決定すればよい.

$$P_{x:\overline{n|}} \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n|}} = A_{x:\overline{n|}} \tag{43}$$

$$\therefore P_{x:\overline{n|}} = \frac{A_{x:\overline{n|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}} := \frac{(Mx - M_{x+n}) + D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} \tag{44}$$

責任準備金　責任準備金は将来法若しくは過去法により評価される．将来法では「将来の給付を賄うために現時点で留保しておくべき金額」として，過去法では「これまでに収受された保険料から支払われた給付金額を控除した残額」として責任準備金が評価される．第 t 時点の責任準備金 ${}_tV_{x:\overline{n|}}$ を将来法により記述すれば，

$$
\begin{aligned}
S_{x+t} &= A_{x+t:\overline{n-t|}} &(45)\\
&= \frac{(M_{x+t}-M_{x+n})+D_{x+n}}{D_{x+t}} &(46)\\
G_{x+t} &= P_{x:\overline{n|}}\cdot \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}} &(47)\\
&= P_{x:\overline{n|}}\cdot \frac{N_{x+t}-N_{x+n}}{D_{x+t}} &(48)\\
\therefore {}_tV_{x:\overline{n|}} &= S_{x+t}-G_{x+t} &(49)\\
&:= A_{x+t:\overline{n-t|}} - P_{x:\overline{n|}}\cdot \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}} &(50)
\end{aligned}
$$

となる．

ファクラーの再帰式　x 歳契約の任意の保険契約について，第 t 時点の責任準備金を V_t, 保険料を P とする．第 $t+1$ 時点の責任準備金は，第 t 時点の責任準備金及び拠出保険料に 1 期間付利し，期末に当該年度に発生する給付金を控除すればよいので，次掲のように記述される．

$$l_{x+t+1}V_{t+1} = l_{x+t}(V_t+P)(1+i)-d_{x+t} \qquad (51)$$

ただし，ここでは期中での解約を想定していない．

さて，式 (51) の両辺に v^{x+t+1} を乗ずれば，

$$D_{x+t+1}V_{t+1} = D_{x+t}(V_t+P)-C_{x+t} \qquad (52)$$

を得る．$t=0\sim(n-1)$ まで辺々加えれば，

$$
\begin{aligned}
D_{x+n}V_n &= D_xV_0 + P\sum_{t=0}^{n-1}D_{x+t} - \sum_{t=0}^{n-1}C_{x+t}\\
\therefore\ P &= \frac{D_{x+n}V_n - D_xV_0 + (M_x - M_{x+n})}{N_x - N_{x+n}} \qquad (53)
\end{aligned}
$$

契約時責任準備金 (V_0) を 0, 満期時責任準備金 (V_n) を定期保険については 0, 養老保険については 1 とすれば保険料が得られる．

同様にして，$t=0\sim(t-1)$ まで辺々加えれば過去法責任準備金が，$t=t\sim(n-1)$ まで辺々加えれば将来法責任準備金が得られる．

A.2　複製ポートフォリオの構築

死亡率及び金利の上に書かれるデリバティブ $V(r,q,t)$ 及び $V_1(r,q,t)$, 金利の上に書かれるデリバティブ $V_2(r,t)$ が存在し，且つ，市場での売買は無制約に実施可能とする．ここで，

$$\Pi = V(r,q,t)+\Delta_1V_1(r,q,t)+\Delta_2V_2(r,t) \qquad (54)$$

なるポートフォリオを考える．

ただし，死亡率及び金利の確率微分方程式を

$$
\begin{gathered}
dr = \mu(r,t)dt + \sigma(r,t)dW_t^r\\
dq = \mu(q,t)dt + \sigma(q,t)dW_t^q\\
dW_t^r\cdot dW_t^q = \rho dt
\end{gathered}
$$

とする.

式 (54) より,

$$d\Pi = dV(r,q,t) + \Delta_1 dV_1(r,q,t) + \Delta_2 dV_2(r,t) \tag{55}$$

伊藤の補題により,

$$\begin{aligned}
dV &= \frac{\partial}{\partial r}V\cdot dr + \frac{\partial}{\partial q}V\cdot dq + \frac{\partial}{\partial t}V\cdot dt \\
&\quad + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial r^2}V\cdot(dr)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial q^2}V\cdot(dq)^2 + \frac{\partial^2}{\partial r\partial q}V\cdot dr\cdot dq \\
dV_1 &= \frac{\partial}{\partial r}V_1\cdot dr + \frac{\partial}{\partial q}V_1\cdot dq + \frac{\partial}{\partial t}V_1\cdot dt \\
&\quad + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial r^2}V_1\cdot(dr)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial q^2}V_1\cdot(dq)^2 + \frac{\partial^2}{\partial r\partial q}V_1\cdot dr\cdot dq \\
dV_2 &= \frac{\partial}{\partial r}V_2\cdot dr + \frac{\partial}{\partial t}V_2\cdot dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial r^2}V_2\cdot(dr)^2
\end{aligned}$$

を得るので, 式 (55) に代入すると,

$$d\Pi = (\frac{\partial}{\partial r}V + \Delta_1\frac{\partial}{\partial r}V_1 + \Delta_2\frac{\partial}{\partial r}V_2)dr + (\frac{\partial}{\partial q}V + \Delta_1\frac{\partial}{\partial q}V_1)dq + (\cdots)dt$$

となる. 従って,

$$\frac{\partial}{\partial r}V + \Delta_1\frac{\partial}{\partial r}V_1 + \Delta_2\frac{\partial}{\partial r}V_2 = 0 \tag{56}$$

$$\frac{\partial}{\partial q}V + \Delta_1\frac{\partial}{\partial q}V_1 = 0 \tag{57}$$

を満足するように Δ_1 及び Δ_2 を設定すれば死亡率及び金利の不確実性が消去され,

$$d\Pi = r\Pi dt$$

を得る.

参考文献

[1] 荒井昭 [2001], 『生命表に関する一考察-生命関数の数式近似-』, 社団法人日本アクチュアリー会会報, 第54号, 第2分冊, 2002年3月12日, 85-122頁.

[2] 今井潤一 [2004], 『リアルオプション』, 中央経済社, 2004年10月25日.

[3] 小田信之 [2001], 『金融デリバティブズ』, 朝倉書店, 2001年3月20日.

[4] 井上学 [2004], 『最小二乗モンテカルロ法による下方修正条項付転換社債のプライシングモデル』, 一橋大学大学院国際企業戦略研究科修士論文, 2004年2月.

[5] 勝田尚毅 [2004], 『下方修正条項付転換社債の価格アルゴリズム構築と早期行使に対する考察』, 筑波大学大学院ビジネス科学研究科経営システム科学専攻修士論文, 2005年2月.

[6] 金村慶二・浅野淳・千葉雅弘 [2004], 『保険1(生命保険) 第2章 解約返戻金』, 社団法人日本アクチュアリー会, 2004年4月.

[7] 木島正明・長山いづみ・近江義行 [1996], 『ファイナンス工学入門　第Ⅲ部　数値計算法』, 日科技連, 1996年2月23日.

[8] 小暮厚之・長谷川知弘 [2005], 「将来生命表の統計モデリング:Lee-Carter法とその拡張 -ヒューマン・セキュリティへの基盤研究-」, 『総合政策学ワーキングペーパーシリーズ No.71』, 2005年4月.

[9] 小島茂 [2005], 「生命保険の証券化とその証券化商品の価格付け」, 『リスクと保険』, Volume 1, 2005 年 3 月, 41-52 頁.

[10] 国立社会保障・人口問題研究所 [2002], 『日本の将来推計人口 (平成 14 年 1 月推計)』, 2002 年 1 月.

[11] 渋谷政昭・華山宣胤 [2004], 「年齢時代区分データによる超高齢者寿命分布の推測」, 『統計数理』, 第 52 巻第 1 号, 117-134 頁.

[12] 谷口学史 [2003], 「生命保険における金利と解約率の相関関係における一考察」, 『日本アクチュアリー会会報』, 第 56 号第 1 分冊, 2003 年 8 月 26 日, 233-251 頁.

[13] 森平爽一郎 [2003], 「イベントリスクに対するデリバティブズ契約」, 『総合政策学ワーキングペーパーシリーズ No. 4』, 2003 年 11 月.

[14] 森平爽一郎 [2004], 「保険価格決定理論 保険数理とファイナンス理論の融合」, アクチュアリージャーナル, 第 54 号, 2004 年 10 月, 5-66 頁.

[15] 山本信一・上田泰三 [2003], 『数理ファイナンスを応用した更新型定期保険の価格設定 (米国のデータに基づいた考察)』, 社団法人日本アクチュアリー会会報, 第 56 号, 第 2 分冊, 2003 年 10 月 31 日, 109-126 頁.

[16] Artzner, P. and Freddy Delbaen and Jean Marc Eber and David Heath[1999], *"Coherent Measures of Risk", Mathematical Finance,* 9(3), 203-228.

[17] Babbel, D. F. and Craig Merrill[1998], *"Economic Valuation Models for Insurers", North Actuarial American Journal,* Vol.2 No.3, July 1998, P1-17.

[18] Britt, S.[2001], *"Risk-Neutral Pricing for Insurance Contracts", Risk Rewards,* No.36, February 2001, P16-17.

[19] Briys, E. and François de Varenne[1997], *"On the Risk of Life Insurance Liabilities: Debunking Some Common Pitfalls", Journal of Risk and Insurance,* December 1997.

[20] Cairns, A. J. G. and David Blake and Paul Dawson and Kevin Dowd[2005], *"Pricing the Risk on Longevity Bonds", Working Paper,* 22th February 2005.

[21] Clewlow, L. and Christrickland[1998], *"Implementing DerivativesModels",* [訳] あさひ銀行金融基礎研究所, [監訳] 葛山康典, 『金融工学プログラミング』, エコノミスト社, 2002 年 4 月 10 日.

[22] Dahl, M.[2004], *"Stochastic mortality in life insurance: market reserves and mortality-linked insurance contracts", Insurance: Mathematics and Economics,* 35, 2004, P113-136.

[23] Girard, L. N.[2000], *"Market Value of Insurance Liabilities: Reconciling the Actuarial Appraisal and Option Pricing Methods", North American Actuarial Journal,* Vol.4 No.1, January 2000, P31-62.

[24] Grosen, A. and Peter Løchte Jørgensen[2000], *"Fair Valueation of Life Insurance Liabilities: The Impact of Interest Rate Guarantees, Surreder Options, and Bonus Policies", Insurance: Mathematics and Economics,* 26, 2000, P37-57.

[25] Grosen, A. and Peter Løchte Jørgensen[2001], *"Life Insurance Liabilities at Market Value: An Analysis of Insolvency Risk, Bonus Policy, and Regulatory Intervention Rules in a Barrier Option Framework",* University of Aarhus, Aarhus School of Business, CAF's working paper No.95, June 1st 2001.

[26] Hamada, M. and Michael Sherris[2003], *"Contingent Claim Pricing using Probability Distortion Operators: Methods from Insurance Risk Pricing and their Relationship to Financial Theory", Applied Mathematical Finance,* 2003, Vol.10, issue1, P19-47.

[27] Johnathan C. Mun[2002], *"Real Options Analysis",* [訳] 構造計画研究所, [監訳] 川口有一郎, 『実践 リアルオプションのすべて』, ダイアモンド社, 2003 年 6 月 12 日.

[28] Masaaki Kijima[2006], *"PA Multivariate Extension of Equilibrium Pricing Transforms: The Multivariate Esscher and Wang Transforms for Pricing Financial and Insurance Risks", Astin Bulletin,* Vol.36, No.1, May 2006, P269-283.

[29] Lee, R. D. and Lawrence R. Carter[1992], *"Modeling and Forecasting U.S. Mortality", Journal of the American Statistical Association,* Vol87, No.419, P659-671.

[30] Lin, Y. and Samuel H. Cox[2004a], *"Securitization of Mortality Risks in Life Annuities",* Georgia state University Working Paper, No.03-3, 6th April 2004.

[31] Lin, Y. and Samuel H. Cox[2004b], *"Natural Hedging of Life and Annuity Mortality Risks",* Georgia state University Working Paper, No.04-8, 24th August 2004.

[32] McLeish, D. L. and R. Mark Ressor[2003], *"Risk, Entropy, and the Trasformation of Distributions", North American Actuarial Journal,* Vol.7 No.2, April 2003, P128-144.

[33] Milvesky, M. A. and S. David Promislow[2001], *"Mortality derivatives and the option to annuitise", Insurance: Mathematics and Economics,* 29, 2001, P299-318.

[34] Neftci, S. N.[2000], *"An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives",* [訳] 投資工学研究会「ファイナンスへの数学【第二版】, 朝倉書店, 2002 年 8 月 20 日.

[35] Press, W. H. and Saul A. Teukolsky and William T. Vetterling and Brian P. Flannery[1996], *"Numerical Recipes in Fortran 90",* Cambridge University Press.

[36] Stampfli, J. and Victor Goodman[2000], *"The Mathematics of Finance, Modeling and Hedging",* [訳] 半村浩・神山直樹・桑原善太「ファイナンス数学入門 モデリングとヘッジング」, 朝倉書店, 2003 年 1 月 25 日.

[37] Strommen, S. J.[2001], *"Beyond the Bullet GIC", Risk Rewards,* No.36, February 2001, P1-10.

[38] Wang, S. S.[1996], *"Premium calculation by trasforming the layer premium", Astin Bulletin,* Vol.26, No.1, 1996, P71-92.

[39] Wang, S. S.[2002], *"A Universal Framework for Pricing Financial and Insurance Risks", Astin Bulletin,* Vol.32, No.2, 2002, P213-234.

[40] Wang, S. S.[2003], *"Equilibrium Pricing Transforms: New Results using Bühlmann's 1980 Economic Model", Astin Bulletin,* Vol.33, No.1, 2002, P57-73.

[41] Wang, S. S.[2004], *"Cat bond pricing using probability transforms", Insurance and the State of the Art in Cat Bond Pricing,* , No.278, January 2004, P19-29.

[42] Wilmott, P. and Sam Howison and Jeff Dewynne[1995], *"The Mathematics of Financial Derivatives: A Student Introduction",Cambridge University Press,* [訳] 伊藤幹夫・戸瀬信之,「デリバティブの数学入門」, 共立出版, 2002 年 7 月 25 日.