研究論文

生命保険会社における死亡リスク・スワップ取引とその価格付けモデル

小島　茂*

2006年6月30日投稿
2006年12月14日受理

概要

本研究は，死亡率が確率過程に従うとして，死亡リスクと生存リスクを生命保険会社間で交換する死亡リスク・スワップ取引とその価格付けモデルを提案するものである．具体的には，死亡率が一定以上上昇すると損失が生じる生命保険会社と死亡率が一定以上低下すると損失が生じる生命保険会社との間で，相互に損失を補填し合う取引モデルを提案する．また，それぞれの支払額をコールオプションとプットオプションのペイオフとみなし，2つのオプションプレミアムが等価となる契約条件をどのように設定するかを示す．

キーワード:リスク管理，死亡リスクと生存リスク，非完備市場，エッシャー変換

1　はじめに

本論文は，生命保険のリスク管理手段の1つとして期待できる死亡リスク・スワップ取引を考察する．具体的には，死亡率が一定以上上昇すると損失が生じる生命保険会社（X社）と死亡率が一定以上低下すると損失が生じる生命保険会社（Y社）との間で，ペイオフを発生させ，期中の死亡率の変動による損失を相互に補う死亡リスク・スワップ取引を扱った．これは，2001年6月に東京ガスと東京電力が行った天候デリバティブを交換する気温リスク・スワップ取引を参考にしたものである．死亡リスク・スワップ取引の価格付けは，取引対象となる2つの異なる被保険者集団に内在する死亡リスクと生存リスクをコールオプションとプットオプションのペイオフとみなし，そのオプションの価格が一致する取引条件（権利行使価格）を設定することで行うこととした．そのオプションの価格は，非完備市場におけるリスク調整済確率測度上のペイオフを無リスク金利で割り引いた現在期待価格として求めた．

先行したリスク・スワップ取引には，気温リスク・スワップ取引がある．2001年6月に気温の低下により減収となる東京電力と逆に，上昇により減収となる東京ガスの間で，気温のリスク・スワップ取引が行われた．相互に減収を補う取引であった．刈屋 et al[2004]，西田[2004]によれば，2001年8月・9月2ヶ月の平均気温が，26度を基準に0.5度を越えて上下すると，取引期間満了時点でペイオフが発生し，0.1度につき4,880万円を，上昇の場合は，東京電力が東京ガスに支払う．低下した場合は，東京ガスが東京電力に支払う取引であった．この取引の価格付けは，夏の平

*東京海上日動フィナンシャル生命保険株式会社
〒150-0012 東京都渋谷区広尾5-6-6 広尾プラザ
email: shigeru.kojima@tmn-financial.co.jp

均気温の正反対の変動による収益変動リスクをコールオプションとプットオプションのペイオフ構造として識別し，2つのオプションプレミアムが等価になるように契約条件（権利行使価格）を設定することで行われた．

本論文は，気温のリスク・スワップ取引を参考に死亡リスク・スワップ取引とその価格付けを考察した．リスクの軽減を図るため，社外へのリスク移転を考慮しなければならない場合に，再保険や死亡リスクの証券化[1]があるが，コストの問題が残る．死亡リスク・スワップ取引は，この問題を解消したリスク管理手段である．今後，リスク管理の重要性が増す中で，死亡リスク・スワップ取引は，生命保険会社のリスク管理の有力な手段となることが期待できる．

参考となる先行研究にLin and Cox[2005a]とCairns et al[2006]がある．ともに死亡リスクに関して，非完備市場におけるリスク調整済確率測度への変換パラメーターを求めたモデルである．

Lin and Cox[2005a]は，35歳加入の死亡保険契約集団と65歳加入の即時払終身年金の契約集団の10年間のペイオフを交換するスワップの価格付けモデルを提案した．その価格付けは，各リスク調整済確率測度上におけるペイオフの期待現在価格が等価となる契約条件を設定することにより行われた．また，このリスク調整済確率測度は，ワン変換を用い，リスク調整済確率測度への変換パラメーターは，期間を通じて一定として米国の保険市場における保険料，および，それぞれの実測死亡率の累積分布関数により求めた．

さらに，リスク調整済確率測度への変換パラメーターを保険市場ではなく，資本市場から求めたのがCairns et al[2006]である．Cairns et al[2006]は，2004年11月にＥＩＢ(欧州投資銀行)が発行した長寿リスク債の価格によりリスク調整済確率測度への変換パラメーターを求めた．具体的には，長寿リスク債のイールドスプレッドが20ベーシスポイントであることに基づき，リスク調整済確率測度への変換パラメーターを期間を通じて一定として求めた．

以上の先行研究を参考に本論文は，死亡リスク・スワップ取引とその価格付けモデルを提案した．

死亡リスク・スワップ取引のモデルは，市場参加者を生命保険会社とし，死亡率が一定以上上昇すると損失が生じる定期保険を販売する生命保険会社（X社）と死亡率が一定以上低下すると損失が生じる生命年金保険を販売する生命保険会社（Y社）との間で，ペイオフを発生させ，期中の死亡率の変動による損失を相互に補う取引とした．具体的には，同一到達年齢の2つの被保険者集団を対象に，以降一定期間について，X社の被保険者集団に係る死亡数が一定人数を超えた場合に超えた人数に対し1人当たり約定金額（Hとする）を満了時点で，X社がY社から得る．一方，X社と取引時点で同数の被保険者数を対象とするY社の被保険者集団に係る死亡数が一定人数を下回った場合に下回った人数に対し1人当たりHをY社がX社から得る取引とした．取引対象となるX社の被保険者集団とY社の被保険者集団は，保険加入ニーズの違いから異質集団と仮定する．また，X社の被保険者集団にかかわるペイオフは，X社の死亡数を原資産とするコールオプションのペイオフとみなし，一方，Y社の被保険者集団にかかわるペイオフは，Y社の死亡数を原資産とするプットオプションのペイオフとみなす．つまり，X社の死亡数とY社の死亡数は，オプション理論における2つの異なる原資産とする．この死亡リスク・スワップの価格付けは，それぞれのコールオプションの価格とプットオプションの価格が一致する取引条件（権利行使価格）を設定することで行うこととした．原資産となる死亡数は，確率変動するため，確率過程に従う．そこで，同時出生の25年分の簡易生命表を用いて時系列分析により確率過程の数式化を行い，確率過程のパラメーターは，X社，Y社の経験値を用いて求めるものとした．さらに，コールオプション価格とプットオプション価格は，それぞれのリスク調整済確率測度上のペイオフを無リスク金利で割り引いた現在期待価格として求めた．したがって，それぞれの実確率測度上の死亡数の確率過程をリスク調整済確

[1]生命保険の証券化の研究については，Lin and Cox[2005b]と小島[2005]を参照されたい．

率測度上の確率過程に変換する必要がある．この変換手法は，非完備市場取引を前提にGerber and Shiu[1994]のリスク中立エッシャー変換理論に基づき，Lin and Cox[2005a]とCairns et al[2006]を参考にリスク調整済確確率測度パラメーターを求めることにより行った．このリスク調整済確率測度への変換パラメーターは，期間を通じて一定と仮定して，定期保険と生命年金保険のそれぞれの代表的な基礎率に基づく生命純保険料から求めた．最後に，それぞれのリスク調整済確率測度のもとで，コールオプションプレミアムとプットオプションプレミアムを求め，各々の価格が等しくなる契約条件（権利行使価格：支払条件となる死亡数の境界値）の設定方法を提案した．

本論文は，以下のような構成になっている．2章で死亡リスク・スワップ取引の価格付けに関する先行研究を紹介する．3章では，本研究の死亡リスク・スワップの取引モデルを示す．また，4章では，死亡数の確率過程を特定し，5章では，死亡リスク・スワップ取引の価格付けモデルを示した．さらに，6章で，死亡リスク・スワップ取引の契約条件を試算し，最後に7章で，本研究の結論について述べることとした．

2 死亡リスク・スワップ取引の価格付けに参考となる先行研究

この章では，生命保険の死亡リスク・スワップ取引の価格付けに関して注目すべき先行研究を紹介する．

保険市場での市場価格をもとに死亡リスクと生存リスクのスワップ取引の価格付けを扱ったのが，Lin and Cox(2005a)である．

2.1 Lin and Cox[2005a]のモデル

Lin and Cox[2005a]は，生命保険会社間で死亡リスクと生存リスクを交換するスワップ取引とその価格付けモデルを提案した．

スワップ取引のモデルは，65歳加入の即時払終身年金契約集団と35歳加入の死亡保険契約集団の10年間のペイオフを交換するものである．また，その価格付けは，それぞれのペイオフのリスク調整済確率測度上での期待現在価格を計算し，おのおのの価格が等しくなるように契約条件を設定することにより行われる．

具体的には，実確率測度P^a上の死亡率の累積分布関数を$F_a(k)={}_kq_{65}^a$とする．なお，${}_kq_{65}^a$は，65歳の生存人口がk年後までに死亡する確率を表す．これは，1996IAM2000　Basic Tableより求めた．$F_a(k)$をワン変換[2]によりリスク調整済確率測度Q^a上での死亡率の累積分布関数$F_a^{Q^a}(k)$に変換すると

$$F_a^{Q^a}(k) = \Phi[\Phi^{-1}(F_a(k)) - \lambda_a]$$

となる．ここに，λ_aは，リスク調整済確率測度Q^aへの変換パラメーター（生存リスクの市場価格）

[2] ワン変換については，*Wang*[1995,2000]を参照されたい．

で，$\Phi(\cdot)$ は，標準正規分布の累積分布関数である．また，$F_a^{Q^a}(k)={}_kq_x^{Q^a}$ と置くと，生存確率 ${}_kp_{65}^{Q^a}$ は，

$${}_kp_{65}^{Q^a}=1-{}_kq_{65}^{Q^a}$$

となる．リスク調整済確率測度への変換パラメーター λ_a を求めるために，保険市場の終身年金保険の価格 $\ddot{a}_{65}$ を用いると，この λ_a は，期間を通じて一定として

$$\ddot{a}_{65}=\sum_{k=0}^{\infty}v^k{}_kp_{65}^{Q^a}$$

の等式が成り立つことから定まる．ここで，$\ddot{a}_{65}$ は，Best' s Review(1996) で公表された民間生命保険会社の即時終身年金の価格を用いた．また，割引率 v は，US Treasury を用いた．以上の結果，求められた λ_a に基づき即時払終身年金契約集団の 10 年間のペイオフのリスク調整済確率測度 Q^a 上の期待現在価格 π_a は，

$$\pi_a=bN\sum_{k=0}^{9}v^{k+1}{}_{k+1}p_{65}^{Q^a} \tag{2-1}$$

となる．ここに，b は，1 件あたりの年金額，　N は取引時点の被保険者数とする．

同様に，35 歳を起点とする実確率測度 P^l 上の死亡率の累積分布関数を $F_l(k)={}_kq_{35}^l$ とする．これは，1990-95 SOA Basic Table より求めた．$F_l(k)$ をワン変換によりリスク調整済確率測度 Q^l 上での死亡率の累積分布関数 $F_l^{Q^l}(k)$ に変換すると

$$F_l^{Q^l}(k)=\Phi[\Phi^{-1}(F_l(k))-\lambda_l]$$

となる．ここに，λ_l は，リスク調整済確率測度への変換パラメーター（死亡リスクの市場価格）である．λ_l を求めるために，保険市場の 10 年死亡保険の価格 $A_{35:10}$ を用いると，この λ_l は，期間を通じて一定として

$$A_{35:10}=\sum_{k=1}^{10}v^{k+1}({}_kq_{35}^{Q^l}-{}_{k-1}q_{35}^{Q^l})$$

の等式が成り立つことから定まる．ここで，$A_{35:10}$ は，Best' s Review(1996) で公表された民間生

命保険会社の10年死亡保険の価格を用いた.

以上の結果，求められたλ_lに基づき死亡保険契約集団の10年間のペイオフのリスク調整済確率測度Q^l上の期待現在価値π_lは,

$$\pi_l = FN\sum_{k=1}^{10} v^{k+1}({}_k q_{35}^{Q^l} - {}_{k-1}q_{35}^{Q^l}) \qquad (2\text{-}2)$$

である．ここに，Fは，1件あたりの保険金額.

したがって，65歳加入の即時払終身生命年金契約集団と35歳加入の死亡保険契約集団の10年間のペイオフを交換するスワップ取引の契約条件は，上記のπ_aとπ_lの値が等しくなるようにFとbの関係を求めることで行われる．この取引モデルは，相互に保険契約集団を交換することにより負債のポートフォリオを改善するタイプのモデルと解釈できる．しかし，交換の対象となる契約集団の年齢層の違いから生じるリスクが課題である.

Lin and Cox[2005a]は，リスク調整済確率測度への変換パラメーターを保険市場の市場価格を用いて求めたが，資本市場の市場価格より求めたのがCairns et al[2006]である.

2.2 Cairns et al[2006]のモデル

Cairns et al[2006]は，2004年11月にEIB（欧州投資銀行）が発行した長寿リスク債券に内在する無リスク債との金利スプレッドからリスク調整済確率測度への変換パラメーターを求めた．つまり，資本市場から生存リスクのリスク調整済確率測度への変換パラメーターを示したものである．EIBの長寿リスク債は，期間25年，発行額約540百万ポンドで，クーポンは，イングランドとウェールズの2003年の65歳の生存人口に対し，その後の生存率を反映して決められる．つまり，この長寿リスク債は，クーポンが生存率に比例して減少する債券である．また，この債券の無リスク債との金利スプレッドが，20ベーシスポイントであることが公表されている.

そこで，Cairns et al[2006]は，EIBが発行した長寿リスク債の無リスク債との金利スプレッドと死亡率の確率過程から，リスク調整済確率測度への変換パラメーターを求めた.

まず，死亡率の確率過程モデルを特定した.

2.2.1 死亡率の確率過程モデル

実確率測度P上の死亡率の確率過程は，*Perks* [1932]のモデルを採用している.

$q(t,x)$は，x歳の人がt年後まで生存し，その直後の1年間で死亡する確率と定義すると，*Perks* [1932]は，$q(x,t)$を

$$q(t,x) = \frac{\exp\{A_1(t+1) + A_2(t+1)(x+t)\}}{1+\exp\{A_1(t+1)+A_2(t+1)(x+t)}$$

と定義した．ここに，$\{A_i(t)\}$は,

$$A_1(t+1) = A_1(t) + \mu_1 + C_1 Z(t+1)$$
$$A_2(t+1) = A_2(t) + \mu_2 + C_2 Z(t+1)$$

に従うとした．また，$Z(t+1)$ は，実確率測度のもとでの標準正規分布に従う確率変数，μ と C は，定数とし，イングランドとウェールズの国民生命表により求めた．

2.2.2 長寿リスクのリスク調整済確率測度への変換パラメーター

リスク調整済確率測度 Q 上の新たな確率過程を，

$$A_i(t+1) = A_i(t) + \mu_i - C_i\lambda_i + C_i\overline{Z}(t+1) \quad for \quad i = 1,2$$

と仮定する．ここに，λ_i と $\overline{Z}(t+1)$ は，リスク調整済確率測度 Q への変換パラメーターとリスク調整済確率測度 Q のもとでの標準正規分布に従う確率変数である．非完備市場のため，λ_i をＥＩＢの長寿リスク債券の価格より求めることとした．スタートを 65 歳の生存人口とし，期間 25 年としたEIB の長寿リスク債券の価格 $V(0)$ は，公表されている金利スプレッド δ から

$$V(0) = \sum_{T=0}^{24} P(0,T)e^{\delta T} E^P[S(T)\}$$

により求められる．ここに，$P(0,T)$ は，額面 1 の期間Ｔ年の無リスクゼロクーポン債の 0 時点の価格．$S(T)$ は，Ｔ年後のペイオフとする．求められた $V(0)$ を用いて，λ_i を $\lambda_1 = \lambda_2$ として，

$$V(0) = \sum_{T=0}^{24} P(0,T)E^{Q(\lambda)}[S(T)]$$

が成り立つ λ_i を期間を通じて一定として求めた．

今後，日本においても，死亡・生存リスク債が発行され，かつ，活発に資本市場で取引されれば，死亡・生存リスクのリスク調整済確率測度への変換パラメーターを資本市場の市場価格から求めることができることを Cairns et al[2006]は示した．

以上の 2 つの先行研究を参考に次の章以降で，本研究の死亡リスク・スワップ取引モデルを提案する．

3 死亡リスク・スワップの取引モデル

この章では，死亡リスク･スワップの取引モデルを提案する．具体的には，X 社と Y 社，2 社間で内在する死亡リスクと生存リスクを交換する死亡リスク・スワップ取引モデルを提案する．X 社と Y 社の取引対象被保険者集団は，独立とし，ともに取引時点の対象被保険者数を $l_\omega(0)$ とした．その

ペイオフは，X社の被保険者集団の10年間の死亡数がA人を超えると超えた人数に対し，1人当たりHを満期時点でY社からX社に支払う．式で表すと

$$\mathrm{H}\max(\sum_{k=1}^{10} d_{\omega}^{X}(k) - A, 0) \quad (3\text{-}1)$$

となる．このペイオフは，コールオプションのペイオフと解釈する．
一方，Y社の10年間の死亡数がB人を下回ると下回った人数に対し，1人当たりHを満期時点でX社からY社に支払う．式で表すと

$$\mathrm{H}\max\{B - \sum_{k=1}^{10} d_{\omega}^{Y}(k), 0\} \quad (3\text{-}2)$$

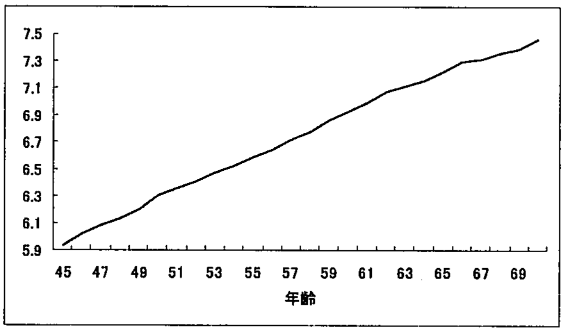
となる．このペイオフは，プットオプションのペイオフと解釈する．したがって，この死亡リスク・スワップ取引は，死亡数の上ブレリスクと下ブレリスクをこのペイオフにより相互にヘッジする取引であると解釈した．
ここに，
(1) ωを取引時の被保険者年齢とし，60歳とする．
(2) $\{d_{\omega}^{X}(t), t \geq 0\}$をX社の被保険者集団に係る経過期間[t-1, t]の死亡数の確率過程とする．
(3) $\{d_{\omega}^{Y}(t), t \geq 0\}$をY社の被保険者集団に係る経過期間[t-1, t]の死亡数の確率過程とする．

4 死亡数の確率過程の特定

死亡リスクと生存リスクは，死亡数の不確実性から生じるリスクである．したがって，この章では，死亡数の確率過程を特定する．
死亡数の確率過程の数式化は，同時出生の25年分の簡易生命表により時系列分析を行い，モデルのパラメーターは，X社とY社のそれぞれの経験値を用いて求めることとした．

4.1 死亡数の確率過程の数式化

この節では，時系列分析により，死亡数の確率過程の数式化を行う．時系列分析の標本は，簡易生命表から直近2003年の男子70歳死亡率をもとに同時出生（コーホート）の過去の45歳から70歳の死亡率とした．具体的には，1933年生まれの45歳を時系列分析のスタート時点の年齢(ω)とし，その期首の同時出生生存数に対して，その後の経過t年度（離散時点）の死亡数$D_{\omega}(t)$を求め，この死亡数$D_{\omega}(t)$により時系列分析を行った．なお，対数死亡数をグラフで示すと，[図1]のとおり線形に近い．もし，線形とみなせれば，対数死亡数の確率過程がランダムウォークになる可能性がある．この点を踏まえて，時系列分析を行った．



[図 1]1933 年生まれ, $\ln D_{45}(t)$

4.1.1. モデルの同定

$InD_{\omega}(t)$ を説明するために，自分自身の過去を説明変数とする回帰モデル

$$InD_{\omega}(t) = \mu_{\omega} + \phi_1 InD_{\omega}(t-1) + \phi_2 InD_{\omega}(t-2)$$

$$+\phi_3 \ln D_{\omega}(t-3) + \cdot\ \cdot\ \cdot + \phi_f \ln D_{\omega}(t-f) + u_{\omega}(t) \qquad (4\text{-}1)$$

を $AR(f)$ と記す．ここで，ϕ_i と μ_{ω} はパラメータである．この次数 f を $SBIC$ によって決める．具体的には，推定式の誤差を表した SBC が最小となる次数を採択するのである．この結果，表 1 のとおり $AR(1)$ が最小のため，次数 1 を採択した．

表 1. 同定

	μ_{ω}	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3	$SBIC$
$AR(1)$	0.1636	0.9847			-8.2038
$AR(2)$	0.1622	0.9197	0.0658		-8.0508
$AR(3)$	0.2062	0.9242	-0.1561	0.2128	-7.9219

したがって，モデルは，

$$InD_{\omega}(t)=\mu_{\omega}+\phi_1 InD_{\omega}(t-1)+u_{\omega}(t) \tag{4-2}$$

となった．次に，もし，$\phi_1=1$ であれば，

$$InD_{\omega}(t)=\mu_{\omega}+InD_{\omega}(t-1)+u_{\omega}(t) \tag{4-3}$$

となり，趨勢をもつランダムウォークモデルの可能性がある．したがって，$\phi_1=1$ の検定，すなわち，単位根検定を行う．

4.1.2 単位根検定

検定方法は，F 値タイプの検定である．具体的には，

帰無仮説　$InD_{\omega}(t)=\mu_{\omega}+InD_{\omega}(t-1)+u_{\omega}(t)$

対立仮説　$InD_{\omega}(t)=\mu_{\omega}+\beta_1' t+\phi_1 InD_{\omega}(t-1)+u_{\omega}(t)$

として，検定を行った結果，表 2 のとおり両側有意水準 5%で帰無仮説は，棄却されなかった．

表 2．単位根検定　F 値タイプのテスト

F 値統計量	臨界値 5%水準	臨界値 95%水準
2.67	1.08	7.24

したがって，このモデルは，(4-3)式になった．次に，(4-3)による推定結果との残差を算出し，このモデルが正しいかどうかの診断を行う．

4.1.3 モデルの診断

モデルの診断は，まず，残差系列を求め，その残差系列を用いて，系列的に独立か否かの統計的検定を行うものである．もし，このモデルが正しければ，残差系列は独立のはずである．検定方法は，$Ljung-Box$ 検定である．具体的には，

帰無仮説　ラグ 5 までの残差系列が独立
対立仮説　ラグ 5 までの残差系列のなかで少なくとも 1 つは従属

として，検定を行った結果，表 3 のとおり，帰無仮説は，有意水準 5%で棄却されなかった．

表 3. 残差自己相関の検定

Ljung – Box 統計量	臨界値 5%水準
2.08	11.07

診断の結果，(4-3)のモデルを採択した． (4-3)は，離散時点の標本から求めたモデルであるが，$D_{\omega}(t)$を各会計年度における死亡数ではなく連続時間の中のある経過 t 時点での直近過去 1 年間，すなわち経過期間[t-1, t]の死亡数とすることにより，予測死亡数$D_{\omega}(t)$の連続時間過程モデルを，幾何ブラウン運動過程

$$D_{\omega}(t) = D_{\omega}(0)\exp(y_{\omega}(t)) \tag{4-4}$$

と仮定した．ここで，$y_{\omega}(t)$は，互いに独立な正規分布$N(\mu_{\omega}t, \sigma_{\omega}^2 t)$に従う． なお，$y_{\omega}(t)$が，正規分布に従うため，理論的には死亡数の合計がスタート時点の生存数を超える問題が発生する．ただ，今回想定した死亡リスク・スワップは，10 年間に限定しているため，この問題が発生する確率は，小さく無視できる範囲と考える．

4.2 死亡数の確率過程のパラメーター$\mu_{\omega}, \sigma_{\omega}$の決定

(4-4)式に含まれるパラメーターを求め，死亡数の確率過程を特定した．このパラメーターは，X 社と Y 社それぞれの集団に関する経験値に基づき推測するものとし，表 4 のとおりとした．

表 4

	μ_{ω}	σ_{ω}
X 社の被保険者集団に係る死亡数の確率過程のパラメーター	μ_{ω}^X	σ_{ω}^X
Y 社の被保険者集団に係る死亡数の確率過程のパラメーター	μ_{ω}^Y	σ_{ω}^Y

したがって，実確率測度上での死亡数の確率過程は，それぞれ，

$$d\ln d_{\omega}^X(t) = \mu_{\omega}^X dt + \sigma_{\omega}^X\, dW^X(t) \tag{4-5}$$

$$d\ln d_{\omega}^{Y}(t)=\mu_{\omega}^{Y}dt+\sigma_{\omega}^{Y}\ dW^{Y}(t) \tag{4-6}$$

に従う．ここに，$W^{X}(t),W^{Y}(t)$ は，相関 ρ_{XY} をもつ標準ブラウン運動に従う．

5. 死亡リスク・スワップの価格付けモデル

この章では，死亡リスク・スワップ取引の価格付けモデルを導出する．

死亡リスク・スワップ取引の価格付けは，(4-5)を原資産とし，(3-1)をペイオフとするコールオプションと，(4-6)を原資産とし，(3-2)をペイオフとするプットオプションのプレミアムが等価となるように契約条件を設定することで行う．

しかし，死亡数自身は，資本市場では取引されていない．死亡リスク・スワップも，資本市場で取引が行われていない．このような場合は，市場は，非完備となり，死亡リスク・スワップのペイオフを原資産と無リスク資産の合成により求めることができない．つまり，無リスクポートフォリオの構築理論に基づかない価格理論を用いる必要がある．

そこで，本研究では，Gerber and Shiu [1994]と 2 章の先行研究を参考に，リスク調整済確率測度変換により，それぞれのオプションプレミアムを求め，死亡リスク・スワップ取引の価格付けである条件設定の方法を示すこととした．

5.1 リスク調整済の確率密度関数

まず，Gerber and Shiu[1994]を参考にエッシャー変換によるリスク調整済の確率密度関数を求める．具体的には，(4-4)の $y_{\omega}(t)$ の確率密度関数を $f(y_{\omega}(t))$ とする．オプションプレミアムを求めるために，エッシャー確率測度変換を行うと，リスク調整済確率測度 Q 上の確率密度関数は，

$$f^{Q}(y_{\omega}(t))=\frac{e^{\alpha y_{\omega}(t)}}{E[e^{\alpha y_{\omega}(t)}]}f(y_{\omega}(t)) \tag{5-1}$$

となる．ここに，α はリスク調整済確率測度 Q への変換パラメーター（市場参加者のリスク回避度を反映したもの）となる．$y_{\omega}(t)$ の積率母関数 $M(z,t)$ は，

$$M(z,t)=\exp(\mu_{\omega}zt+\frac{1}{2}(\sigma_{\omega}^{2}z^{2}t))$$

であるから，新たな確率密度関数の積率母関数 $M(z,t:\alpha)$ は

$$
\begin{aligned}
M(z,t:\alpha) &= \frac{E[e^{\alpha y(t)}e^{zy(t)}]}{E[e^{\alpha y(t)}]} \\
&= \frac{\exp(\mu_\omega t(\alpha+z)+1/2\sigma_\omega^2(\alpha+z)^2 t)}{\exp(\mu_\omega t\alpha+1/2\sigma_\omega^2\alpha^2 t)} \qquad (5\text{-}2) \\
&= \exp\{(\mu_\omega+\sigma_\omega^2\alpha)zt+\frac{1}{2}\sigma_\omega^2 z^2 t\}
\end{aligned}
$$

となる．したがって，エッシャー変換によりリスク調整済確率測度 Q^X， Q^Y のもとで，あらたな死亡数の確率過程は，(4-5)，(4-6)，(5-2)より

$$d\ln d_\omega^X(t) = (\mu_\omega^X + (\sigma_\omega^X)^2\alpha^X)dt + \sigma_\omega^X d\overline{W}^X(t) \qquad (5\text{-}3)$$

$$d\ln d_\omega^Y(t) = (\mu_\omega^Y + (\sigma_\omega^Y)^2\alpha^Y)dt + \sigma_\omega^Y d\overline{W}^Y(t) \qquad (5\text{-}4)$$

と表されることとなる．ここに， $\overline{W}^X(t),\overline{W}^Y(t)$ は，リスク調整済確率測度 Q^X， Q^Y のもとで，相関 ρ_{XY} をもつ標準ブラウン運動に従う．

もし，完備市場取引であれば，マルチンゲール理論に従い，このドリフト項は，α に無関係にリスクフリーレートと σ によって一意に決まるが，非完備市場取引のため，リスク調整済確率測度への変換パラメーター α^X,α^Y を求める必要がある．

5.2 リスク調整済確率測度への変換パラメーター α^X,α^Y

死亡リスク・スワップ取引の市場参加者が生命保険会社であることから，現在の生命保険料を用いれば，リスク調整済確率測度への変換パラメーター α は求まるはずである．つまり，生命保険のペイオフが，死亡数の実現値関数であることから，生命保険を死亡数の派生商品と考える．死亡数と生命保険のペイオフは同じリスク回避度を持つとして，現在の生命保険料からリスク調整済確率測度への変換パラメーター α^X,α^Y を求めることができる．なお，以下では，簡単化のため，コストは無視した．

具体的には，Lin and Cox[2005a]と Cairns et al[2006]が市場価格によりリスク調整済確率測度への変換パラメーターを求めたのと同様に，定期保険の純保険料から，コールオプションに内在する死亡リスクに対応したリスク調整済確率測度への変換パラメーター α^X を，また，生命年金保険の純保険料から，プットオプションに内在する生存リスクに対応した変換パラメーター α^Y を期間を通じて一定と仮定して求めた．

また，資本市場での生命保険の市場価格は存在しないが，相対取引である死亡リスク・スワップ取引の市場参加者が生命保険会社であるため，定期保険と生命年金保険の純保険料が，生命保険会社の死亡リスクと生存リスクに対するリスク選好を反映した公正価格とみなしたのである．次に，リスク調整済確率測度変換パラメーターを導出する．10 年定期保険の保険金 1 に対する一時払純保険

料を $P_{\omega}^{T}(10)$ とすると，リスク調整済確率測度 Q^{X} のもとで, (5-3)により,

$$P_{\omega}^{T}(10)=\frac{1}{l_{\omega}(0)}E^{Q^{X}}[\sum_{t=1}^{10} d_{\omega}^{X}(t)e^{-\delta(t-0.5)}] \qquad (5\text{-}5)$$

が成り立つはずである．(5-5)式によりリスク調整済確率測度への変換パラメーター α^{X} が Lin and Cox[2005a]と Cairns et al[2006]と同様に，期間を通じて一定として求まる．なお，δ は，連続複利リスクフリーレート log(1+予定利率) とした．

同様に，10 年有期生命年金保険の即時払年金額 1 に対する一時払純保険料を $P_{\omega}^{a}(10)$ とすると, リスク調整済確率測度 Q^{Y} のもとで, (5-4)により,

$$\begin{aligned}P_{\omega}^{a}(10) &= E^{Q^{Y}}[\frac{1}{l_{\omega}(0)}\{l_{\omega}(0)+(l_{\omega}(0)-d_{\omega}^{Y}(1))e^{-\delta}) \\ &\quad +(l_{\omega}(0)-\sum_{k=1}^{2} d_{\omega}^{Y}(k))e^{-\delta 2})+, \quad , \\ &\quad +(l_{\omega}(0)-\sum_{k=1}^{9} d_{\omega}^{Y}(k))e^{-\delta 9})\}] \\ &= E^{Q^{Y}}[1+\sum_{t=1}^{9}(1-\frac{1}{l_{\omega}(0)}\sum_{k=1}^{t} d_{\omega}^{Y}(k))e^{-\delta t}]\end{aligned} \qquad (5\text{-}6)$$

が成り立つはずである．つまり，$P_{\omega}^{a}(10)$ は，毎期始に生存率に年金額 1 を乗じた額が支払われ，その毎期の支払額の期待現在価値と等価となるはずである．(5-6)式によりリスク調整済確率測度への変換パラメーター α^{Y} が期間を通じて一定として求まる．

5.3 オプションの価格モデル

この節では，死亡数のリスク調整済確率測度のもとでの確率過程によりオプション価格モデルを求めた．

コールオプション価格 $Call_{X}$ は,

$$Call_{X}=e^{-10\delta}E^{Q^{X}}[\mathrm{H}\max(\sum_{k=1}^{10} d_{\omega}^{X}(k)-A,0)] \qquad (5\text{-}7)$$

となる．プットオプション価格 Put_{Y} は

$$Put_Y = e^{-10\delta} E^{Q^Y}[\mathrm{H}\max\{B - \sum_{k=1}^{10} d_\omega^Y(k), 0\}] \qquad (5\text{-}8)$$

となる.

なお，死亡数が対数正規分布に従うがその和は，対数正規分布に従わない．したがって，死亡数の和の関数とするオプションプレミアムを求める方法は，解析解によることができない．よく知られているアジアンオプションプレミアムの近似式による方法[3]や共単調性による多変量リスクの評価法[4]による上限下限を求める方法などによりオプションプレミアムを求めることが考えられるが，本論文では，モンテカルロ・シミュレーション法によることとし，6章にて，数値例を示した.

5.4 死亡リスク・スワップ取引の価格付け

死亡リスク・スワップの価格付けは，Aを所与としたときに前節の$Call_X$とPut_Yが等価となるように，Bを設定することで行われる．次章では，実際に数値例を示す.

6. 試算

この章では，死亡リスク・スワップに関する価格付けの数値例を示す.

6.1 オプション価格

以下の計算前提をもとに前章で求めたコールオプションとプットオプションの価格を試算する.

計算の前提は，以下のとおりとする.

(1) 取引時の被保険者の年齢は，60歳（男子).
(2) スワップの取引期間は，10年.
(3) 割引率は，$\delta = \log(1+0.015)$.
(4) $l_\omega(0)$は，100,000.
(5) $d_\omega^X(t)$は，X社の被保険者集団の死亡数の確率過程．この確率過程のパラメーターは，生保標準生命表1996の男子粗死亡率より求めた.
(6) $d_\omega^Y(t)$は，Y社の被保険者集団の死亡数の確率過程．この確率過程のパラメーターは，簡易生

---

3 近似方式については，山下[2001]を参照されたい

4 共単調性による多変量リスクの評価法については，小暮[2005]を参照されたい

命表男子死亡率（2003年時点で69歳の死亡率を基準に過去10年間の同時出生死亡率）の90%より求めた.

(7) H は，100万円とする.

(8) コールオプションの権利行使価格 A は，

$$A = E^{Q^X}[\sum_{t=1}^{10} d_{60}^X(t)]$$

とする.

(9) 予定死亡率は，下表5のとおりとし，予定利率は，1.5%と仮定した.

表5

	定期保険	有期生命年金保険
予定死亡率	生保標準生命表1996	生保標準生命表1996（年金開始用）

上記計算前提のもとに，試算した結果は，表6，表7のとおりとなった.

表6

$P_{60}^T(10)$	$d_{60}^X(0)$	$\mu_{60}^X + (\sigma_{60}^X)^2\alpha^X$	σ	A	$Call_X$（単位百万円）
0.13322	890	0.08387	0.01478	14,540	159

表7

$P_{60}^a(10)$	$d_{60}^Y(0)$	$\mu_{60}^Y + (\sigma_{60}^Y)^2\alpha^Y$	σ
9.02165	757	0.03368	0.01843

なお，ρ_{XY} は，0.5と仮定した．また，モンテカルロ・シミュレーション法は，シミュレーション回数を10,000回として求めた.

6.2 スワップ取引の価格付け

スワップ取引の価格付けは，Aを所与として，ゼロコスト・カラー取引であるコールオプションとプットオプションのプレミアムが一致するように，契約条件の中の B を設定することで行われる．したがって，A が14,540であったことから，(5-8)式より $Call_X = Put_Y$ =159百万円となるように，B を求めると $B = 9{,}244$ となる．その結果，死亡リスク・スワップ取引の契約条件は，下表8のとおりとなった.

表 8　権利行使価格

A	*B*
14, 540	9, 244

つまり，X 社の対象契約集団の 10 年間の合計死亡数が 14, 540 人を超えれば，超過 1 人当たり 100 万円を取引満了時点で X 社が Y 社から得る．一方，Y 社の対象契約集団の 10 年間の死亡数が 9, 244 人を下回れば，下回った人数に対し，1 人当たり 100 万円を Y 社は，X 社から得る取引モデルである．

7. 結論

本論文は，生命保険のリスク管理手段の 1 つとして期待できる死亡リスク・スワップ取引を考察した．これは，2001 年 6 月に東京ガスと東京電力が行った天候デリバティブを交換する気温リスク・スワップ取引を参考にしたものである．

死亡リスク・スワップ取引は，死亡率が一定以上上昇すると損失が生じる生命保険会社（X 社）と死亡率が一定以上低下すると損失が生じる生命保険会社（Y 社）との間で，保険加入ニーズの違いから異質集団に内在する死亡リスクと生存リスクを交換する取引である．死亡リスク・スワップ取引の交換するペイオフは，コールオプションとプットオプションのペイオフとみなし，価格付けは，コールオプションとプットオプションの価格が一致する取引条件（権利行使価格）を設定することで行った．そのオプション価格は，非完備市場取引であるので，マルチンゲール理論に従わず，死亡数の派生商品である死亡保険と生命年金保険の純保険料から，リスク調整済の確率過程へエッシャー変換することで求めた．また，最後に，モンテカルロ・シミュレーション法により死亡リスク・スワップ取引の価格付けの数値例を示した．

今後は，価格競争がさらに進むことにより，生命保険会社の死亡リスクと生存リスクのリスク選好も変化するものと思われる．この結果，現在より，少なくとも生命保険会社が抱える死亡リスクおよび生存リスクが高まることが予想される．この点で，死亡リスク・スワップ取引は，生命保険会社のリスク管理上，有効な手段となることが期待できる．

謝辞

慶応義塾大学・政策 COE 主催「保険・年金リスク研究報告会」において，慶応義塾大学の森平爽一郎氏（現，早稲田大学大学院）と小暮厚之氏および報告会参加者や匿名のレフリーから本論文に対する有益なコメントを頂いた．記して謝意を表したい．

参考文献：

[1] 刈屋武昭，Tee Kian Heng, 郷古浩道[2004]，「ARCH 型分散変動モデルによる気温リスク・スワップの検証」Discussion Paper No. 0401 京都大学経済研究所金融工学センター

[2] 小暮厚之[2005]，「共単調性による多変量保険リスクの評価」, 日本保険・年金リスク学会，『リスクと保険』Vol. 1 P7-20

[3] 小島茂[2005],「生命保険の証券化とその証券化商品の価格付け」, 日本保険・年金リスク学会,『リスクと保険』Vol. 1 P41-52

[4] (社) 日本アクチュアリー会[1996] ,『生保標準生命表 1996 の作成過程』

[5] 西田真二[2004],「気温リスク・スワップ・ペイオフ関数の合理的決定法」, 日本統計学会誌 第34巻, 第1号, P73-82

[6] 山下司[2001],『オプションプライシングの数理』, 金融財政事情研究会

[7] Cairns, A. J. G., Blake, D., and Dowd, K. [2006] "A two-factor model for stochastic mortality with parameter uncertainty", Journal of Risk and Insurance Vol. 73(4), 687-718.

[8] Gerber, H. U. and Shiu, E. S. W. [1994] "Option Pricing By Esscher Transforms" *Transactions of the Society of Actuaries* 46, 99-140

[9] Lin, Y., and Cox, S. H. [2005a] "Natural Hedging of Life and Annuity Mortality Risks, " *Working paper, Georgia State University*

[10] Lin, Y., and Cox, S. H. [2005b] "Securitization of Mortality risks in life annuities, " *Journal of Risk and Insurance 72(2), 227-252*

[11] Perks, W. (1932) "On some experiments in the graduation of mortality statistics, " *Journal of the Insutitute of Actuaries* 63, 12-57

[12] Wang, S. S. [1995] "Insurance Pricing and increased Limits Ratemaking by Proportional Hazards Transforms", *Insurance:Mathematics and Economics, 17, 43-54*

[13] Wang, S. S. [2000] "A class of distortion operations for pricing financial and insurance risks, " *Journal of Risk and Insurance 67(1), 15-36*