
 研究論文

地震による家屋の損壊と家計の最適消費投資計画

鈴木 輝好*

2006年10月27日 投稿

2007年2月16日 受理

概要

家屋の保有とその損壊可能性を考慮し、家計の消費と投資に関する最適計画問題を扱った。投資の対象はリスクのある証券と預金および証券市場と相関を持ち損壊可能性のある耐久消費財（家屋）である。一方、消費の対象は家屋および非耐久消費財である。家屋の売買に取引コストが無い場合について解析解を導出した結果、地震リスクの存在は家屋のサイズを上昇させることが分かった。資産が毀損するリスクを回避する行動よりも家屋から得られる効用の最大化が優先された結果である。また、耐震強度の低い家屋を保有する場合、最適戦略が存在しない場合があることを数値的に示した。

キーワード：フィナンシャルプランニング、持ち家、自然災害リスク。

1 はじめに

個人の消費と資産ポートフォリオの動的な最適選択問題は、Merton (1969, 1971, 1973) により定式化され、その後、様々な研究が発表された。消費と資産選択における環境をより現実に近い試みである。拡張された点は、例えば金利の不確実性やインフレーションの可能性を考慮すること、労働所得の変化や生活水準の制約および取引コストを勘案すること、さらには耐久消費財の導入である。これらの先行研究については Campbell and Viceira (2002) においてサーベイされている。本研究では、耐久消費財すなわち家屋に着目し、新たにその損壊可能性を考慮する。

耐久消費財は、蓄えることができ消費者に対して保有している間は連続的に効用を与える。また資産の一部となる点も特徴である。一方、非耐久消費財は、蓄えることができず消費者に対して一時的な効用を与える。消費すると消滅するため資産にはならない。

Hindy and Huang (1993) は、一度買ったら売ることのできない耐久消費財をモデル化した。Detemple and Giannikos (1996) は、非耐久財と耐久財の二つが存在し、耐久財の購入とそれにより得られるサービスの両方から効用が得られるモデルを構築した。また、Cuoco and Liu (2000) は分割可能な耐久消費財を想定した投資消費問題を扱った。取引コストは価格変化に比例するとしており、耐久消費財として家具や被服などを想定している。明示的に持ち家の保有をモデル化した研究に、Cocco (2004), Cauley, Pavlov and Schwarts (2005) がある。持ち家は現金化できず、資産運用の制約とした。また、Grossman and Laroque (1990) は、消費効用の対象を分割不可能な耐久消費財とし、取引コストは価格水準に比例するとした。耐久消費財は減耗し、家屋など不動産を想定している。さらに、Damgaard, Fuglsbjerg and Munk (2003) は Grossman and

* 北海道大学大学院経済学研究科 〒060-0809 札幌市北区北9条西7丁目 mail: suzuki@econ.hokudai.ac.jp.

Laroque (1990) を拡張し、消費対象として非耐久消費財も含めた。本研究では、Damgaard, Fuglsbjerg and Munk (2003) における耐久消費財に損壊可能性を導入し、地震危険の下での消費投資計画モデルを提示する。

我が国の家計における資産の大部分は持ち家であることが多い。この持ち家は資産であるとともに家計に大きな効用を与える耐久消費財である。また、我が国の一部の地域では大地震の危険が相当に高まっており、さらには建物の耐震基準に関して社会的関心が高くなってきている。本研究のねらいは耐久消費財として、地震により損壊する可能性のある持ち家を想定し、地震の危険が資産選択問題へ与える影響について調べることである。

地震危険の重要性については、一般向けに書かれた島崎ほか (2001) が分かりやすい。日本周辺はユーラシアプレートおよび北米プレート、さらには太平洋プレートとフィリピン海プレートが密集する世界でも稀有な地域であり、これが我が国における地震発生頻度を高めていることが分かる。また、各自治体は独自に大地震が起きた場合における被害想定を定期的に調査している。たとえば、「首都直下地震による東京の被害想定報告書^{*1}」によれば、東京湾北部にマグニチュード 6.9 の地震が冬の夕方 6 時 (風速 6m/秒) に発生した場合、ゆれによる建物の倒壊は約 6 万件、地震火災による被害は約 18 万件と報告している。この調査は、地盤や建物の密集状態を反映しており、市・区別に人的被害も含め詳細に報告している。

地震調査研究推進本部 (2001) あるいは柴田 (2005) によると、地震発生の確率モデルは再生過程を用いる方法が一般的である。地震が発生すると、確率空間はリセットされ、次の地震発生時まで地震発生の確率は高まっていく。このとき地震発生間隔については、対数正規分布やガンマ分布、ワイブル分布、二重指数分布などが想定される。また、でたらめに発生する地震についてはポアソン過程を用いる場合もある。本研究では、地震危険自体の影響を解析的に調べることを目的とし、地震の発生をポアソン過程によりモデル化する。これにより、耐久消費財保有量にジャンプがある場合について、Merton (1969, 1971, 1973) の問題を拡張した解析解の導出に成功した。

以下では第 2 節においてモデルと解析解を提示し、第 3 節では得られた解析解を用いて地震危険が家計の消費と投資に与える影響を分析する。最後に第 4 節において結論を述べる。

2 モデル

2.1 設定

無リスク金利 r を一定とし、唯一のリスク証券は

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu dt + \sigma_S dw_1(t), \quad t \geq 0 \quad (1)$$

に従い、耐久消費財の単位価格は、式

$$\frac{dP(t)}{P(t)} = \mu_P dt + \sigma_{P1} dw_1(t) + \sigma_{P2} dw_2(t), \quad t \geq 0 \quad (2)$$

に従うとする。ここで $w_1(t)$ と $w_2(t)$ は独立で同一の分布に従う標準ブラウン運動過程である。ただし

$$\sigma_P^2 = \sigma_{P1}^2 + \sigma_{P2}^2$$

とする。また、耐久消費財の保有額面 (保有量) $K(t)$ は率 δ で減耗し、地震によって割合 ℓ が損壊すると仮定する。地震は $w_1(t), w_2(t)$ とは独立な強度 λ のポアソン過程 $N(t)$ により発生する。このとき耐久財の保有量は

$$\frac{dK(t)}{K(t)} = (-\delta + \lambda \ell) dt - \ell dN(t), \quad t \geq 0 \quad (3)$$

^{*1} 東京都総合防災部 <http://www.bousai.metro.tokyo.jp/17chousa/higaisoutei/18051honpen.pdf>

に従う。また $\mu, \sigma_S, \mu_P, \sigma_{P1}, \sigma_{P2}, \delta, \ell, \lambda$ は時間に依存しない定数とする。さらに耐久消費財の売り持ちはできないと仮定する。

いま、無リスク資産の保有総額を $\theta_0(t)$ 、リスク資産の保有総額を $\theta(t)$ とすると投資家の富は

$$X(t) = \theta_0(t) + \theta(t) + K(t)P(t), \quad t \geq 0 \quad (4)$$

により表される。ここで、耐久消費財の売買には取引コストがかからず、さらには無限に分割可能であると仮定すると、每期 $C(t) > 0$ を消費する投資家の資産制約は次のようになる*2。

$$\begin{aligned} dX(t) = & \left(r(X(t) - K(t)P(t)) + \theta(t)(\mu - r) + (\mu_P - \delta + \lambda\ell)K(t)P(t) - C(t) \right) dt \\ & + \left(\theta(t)\sigma_S + K(t)P(t)\sigma_{P1} \right) dw_1(t) + K(t)P(t)\sigma_{P2} dw_2(t) - \ell P(t)K(t-)dN(t), t \geq 0. \end{aligned} \quad (5)$$

また、地震発生後に投資家が破産しないことを条件とすると、地震発生時刻を η として

$$X(\eta) = X(\eta-) - \ell P(\eta-)K(\eta-) > 0, \quad t \geq 0 \quad (6)$$

が必要である。式 (6) および $C(t) > 0, K(t) > 0$ を満たす戦略 $S_t = (\theta(t), K(t), C(t))$ を許容可能と呼び、 $x = X(0), k = K(0), p = P(0)$ が与えられたときの許容可能な戦略の集合を $\mathcal{A}(x, k, p)$ と書くことにする。

2.2 解析解

非耐久消費財の瞬間的な消費率を c とし、耐久消費財の保有額面を k とするときの投資家の効用関数を

$$U(c, k) = \frac{1}{1-\gamma} (c^\beta k^{1-\beta})^{1-\gamma}, \quad 0 < \beta < 1, 0 < \gamma < 1$$

とする。また、投資家は、時間選好を ρ として基準

$$J^S(x, p) = E \left[\int_0^\infty e^{-\rho t} U(C(t), K(t)) dt \right]$$

を、戦略 $S = \{S_t : t > 0\}$ に関して最大化させるとする。ただし $S \in \mathcal{A}$ とする。このとき投資家の価値関数は

$$V(x, p) = \sup_{S \in \mathcal{A}, t > 0} J^S(x, p) \quad (7)$$

のように定義できる。すると、ダイナミックプログラミングの原理から価値関数は式

$$V(x, p) = \sup_{S \in \mathcal{A}, t > 0} E \left[\int_0^\eta e^{-\rho t} U(C(t), K(t)) dt + e^{-\rho \eta} V(X(\eta), P(\eta)) \right] \quad (8)$$

を満たす。したがって価値関数が満たすべきハミルトン・ヤコビ・ベルマン (HJB) 方程式は

$$\begin{aligned} \rho V(x, p) = & \sup_{S \in \mathcal{A}} \left\{ \frac{1}{1-\gamma} (c^\beta k^{1-\beta})^{1-\gamma} + \left(r(x - pk) + \theta(\mu - r) + (\mu_P - \delta)kp - c \right) \frac{\partial V}{\partial x}(x, p) \right. \\ & + \frac{1}{2} \left(\theta^2 \sigma_S^2 + k^2 p^2 \sigma_P^2 + 2\theta \sigma_S \sigma_{P1} kp \right) \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(x, p) + \mu_P p \frac{\partial V}{\partial p}(x, p) \\ & + \frac{1}{2} \sigma_P^2 p^2 \frac{\partial^2 V}{\partial p^2}(x, p) + \left(\theta \sigma_S \sigma_{P1} + \sigma_P^2 kp \right) p \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial p}(x, p) \\ & \left. + \lambda \left(V(x - \ell kp, p) - V(x, p) + \ell kp \frac{\partial V}{\partial x}(x, p) \right) \right\} \end{aligned} \quad (9)$$

となる*3。

ここで2つの仮定を与えておく。仮定1はHJB方程式(9)を解く上で必要な条件を与え、仮定2はHJB方程式(9)を満たす関数 $V(x, p)$ が問題(7)の解となるための十分条件を与える。

*2 導出過程は付録 A.1 参照

*3 導出過程は付録 A.2 参照

仮定 1 α_k の関数 $F_\Lambda(\alpha_k)$ を

$$F_\Lambda(\alpha_k) = \frac{\lambda}{\gamma} \left\{ (1 - \ell\alpha_k)^{-\gamma} \left(1 + \frac{\beta\gamma\ell}{1-\beta}\alpha_k \right) - \left(1 + \frac{\gamma\ell}{1-\beta}\alpha_k \right) \right\}$$

とすると、方程式

$$F_\Lambda(\alpha_k) + \Lambda_0 + \Lambda_1\alpha_k + \Lambda_2\alpha_k^2 = 0 \quad (10)$$

は $0 < \alpha_k < 1/\ell$ を満たす解を持つ。ただし、パラメータ $\Lambda_0, \Lambda_1, \Lambda_2$ を

$$\Lambda_0 = -\frac{\rho}{\gamma} + \frac{1-\gamma}{\gamma} \left\{ r - (1-\beta)\mu_P + \frac{1}{2}(1-\beta)[1 + (1-\beta)(1-\gamma)]\sigma_P^2 \right\} + \frac{1-\gamma}{2\gamma^2\sigma_S^2} (\mu - r - (1-\gamma)(1-\beta)\sigma_{P1})^2 \quad (11)$$

$$\Lambda_1 = (1-\gamma)\sigma_{P2}^2 + \frac{1}{1-\beta} \left(r - \mu_P + \delta + (\mu - r)\frac{\sigma_{P1}}{\sigma_S} \right) \quad (12)$$

$$\Lambda_2 = \left(\frac{\gamma}{1-\beta} + \frac{1-\gamma}{2} \right) \sigma_{P2}^2 \quad (13)$$

のように定義する*4。

後に α_k は耐久財の最適保有量を決定する定数となる。すなわち α_k を与える方程式に解が存在することを仮定した。また $1 < \alpha_k < 1/\ell$ は地震発生後に投資家が破産しないための制約である。解が存在しない場合、本節で示す定理 1 は機能しない。この点については次節で検討する。

仮定 2

$$\Lambda_0 < -\frac{1}{2}(1-\gamma)\sigma_{P2}^2\alpha_k^2.$$

この仮定は Damgaard, Fuglsbjerg and Munk (2003) における横断条件である。すなわち地震リスクが存在しない場合における解の十分条件である。

仮定 1 および仮定 2 の下では価値関数 (7) および最適戦略は次のように与えられる。

定理 1 証券および耐久消費財に関して摩擦のない市場が存在するものとする。このとき仮定 1 および仮定 2 の下で投資家の価値関数は

$$V(x, p) = \frac{1}{1-\gamma} \alpha_v p^{-(1-\beta)(1-\gamma)} x^{1-\gamma} \quad (14)$$

により与えられる。また最適戦略は

$$\theta(t) = \alpha_\theta X(t), \quad K(t) = \alpha_k X(t)/P(t), \quad C(t) = \alpha_c X(t) \quad (15)$$

となる。ただし、定数 α_k は方程式 (10) の解で、定数 $\alpha_v, \alpha_c, \alpha_\theta$ は

$$\alpha_v = \alpha_c \beta^{(1-\gamma)-1} \alpha_k^{(\beta-1)(\gamma-1)} \beta \quad (16)$$

$$\alpha_c = -\beta\Lambda_0 - \frac{1}{2}\beta(1-\gamma)\sigma_{P2}^2\alpha_k^2 + F_c(\alpha_k) \quad (17)$$

$$\alpha_\theta = \frac{\mu - r}{\gamma\sigma_S^2} + \left(\beta - (\alpha_k + \beta - 1)\gamma - 1 \right) \frac{\sigma_{P1}}{\gamma\sigma_S} \quad (18)$$

により与えられ、 $\alpha_v > 0, \alpha_c > 0$ が満たされる。ただし

$$F_c(\alpha_k) = \frac{\lambda\beta\ell\alpha_k}{1-\beta} \{ (1 - \ell\alpha_k)^{-\gamma} - 1 \}$$

とする。

*4 本論文における $\Lambda_0, \Lambda_1, \Lambda_2$ の定義は Damgaard, Fuglsbjerg and Munk (2003) p.216 と全く同一である。すなわち式 (10) における地震の影響は関数 $F_\Lambda(\alpha_k)$ に集約される。

証明：付録参照

最適な戦略は、Merton(1969)の拡張として表された。すなわち、投資家は資産の一定割合を消費しながら、資産の一定割合を耐久消費財へ、同様に一定割合を危険資産へ投資することが最適となる。また、得られた結果は $\lambda = 0$ あるいは $\ell = 0$ とすると、 $F_{\Lambda}(\alpha_k) = F_c(\alpha_k) = 0$ となり Damgaard, Fuglsbjerg and Munk (2003) における定理 3.1 と一致する。

3 地震リスクが家計へ及ぼす影響

3.1 解析的結果

定理 1 から地震リスクの下での家屋のサイズについて次のような命題を得る。

命題 1 地震リスクは、最適戦略が存在する限りにおいて、持ち家の最適サイズを上昇させる。

証明: 仮定 2 の下では $\Lambda_0 < 0$ である。よって $\Lambda_2 > 0$ に注意すると 2 次方程式

$$\Lambda_0 + \Lambda_1 \alpha_k + \Lambda_2 \alpha_k^2 = 0 \quad (19)$$

は正の解を持つ。この根は Damgaard, Fuglsbjerg and Munk (2003) と同様に地震危険の無い場合の家屋の最適サイズを与える。一方、付録 B.2 において $0 < \alpha_k < 1/\ell$ のとき $F_{\Lambda}(\alpha_k) < 0$ を示した。したがって仮定 1 の下で、すなわち方程式 (10) が $0 < \alpha_k < 1/\ell$ なる解を持つことを条件とすると、その解は式 (19) の根よりも大きくなり、結局、地震危険の下では α_k は上昇する。□

耐久消費財は資産である一方でまた消費財でもある。Merton (1969) における証券の価格過程にジャンプ項が追加された場合の最適戦略について、例えば Oksendal and Sulem (2005) は、ジャンプ項が加わることにより保有証券の最適サイズは減少することを示した。当然のリスク回避行動である。これに対して命題 1 は、耐久消費財にジャンプ項が追加されると、投資家は価格変動のリスク回避よりも消費効用の減少を回避する行動を取ることを示す。

さて、リスク証券への投資量 α_{θ} は、式 (18) によると第 1 項が Merton (1969) の示した平均分散ポートフォリオであり第 2 項が耐久消費財とリスク証券との相関に起因するリスクヘッジである。仮に証券価格と耐久消費財価格が正に相関する場合 ($\sigma_{P1} > 0$)、耐久消費財の保有量が増加すると、証券の保有量は減少する。したがって命題 1 から、地震危険下における家計のアセットアロケーションについて次の系を得る。

系 1 証券価格と耐久消費財価格が正に相関する場合、地震リスクは危険証券の最適保有量を減らす。

地震危険下では、家屋の保有量は増加しリスク証券の保有量は減少することが分かった。次節では解析的結果の数量的な確認も含めて、消費および価値関数への影響に関する数値例を示す。

3.2 数値例

まず、地震強度の影響を見る。島崎ほか (2001) によると、例えば関東大震災であれば、地震の周期は 200 年程度である。また、その大地震が発生する 70 年前～90 年前には首都圏直下の震度 6 クラスの地震が起き易くなるらしい。一方、阪神・淡路大震災をもたらした活断層の活動を原因とする地震の周期は不確定ながら 2000 年とも 3000 年と推定されている。このような状況を念頭に地震強度を表すパラメータ λ の設定を行なった。基本的なパラメータ設定は次の通りである。

$$\begin{aligned} r = 0.02, \quad \mu = 0.04, \quad \mu_P = 0.02, \quad \delta = 0.03, \quad \sigma_S = 0.20, \quad \sigma_{P1} = 0.07, \\ \sigma_{P2} = 0.07, \quad \rho = 0.03, \quad \gamma = 0.8, \quad \beta = 0.1, \quad \lambda = 1/300, \quad \ell = 0.5. \end{aligned} \quad (20)$$

表 1 には、地震強度 λ を変化させたときの (1) 家屋保有比率 α_k , (2) 証券保有比率 α_θ , (3) 消費比率 α_c , (4) 価値関数における定数 α_v の変化を示した。前節で示した通り、地震危険の高まりは家屋の保有量すなわちサイズを上昇させ、リスク証券の保有量を減少させる。また、この例では、非耐久消費財の消費量は増し、投資家の価値関数は減少する。さらに、活断層タイプの地震危険 ($\lambda = 1/3000$) では、保有家屋のサイズ変化はごくわずかであり、家計への影響は限定的であることが分かる。

表 1 地震強度の影響

λ	0	1/3000	1/1000	1/500	1/300	1/100	1/50
α_k	0.754284	0.75576	0.758756	0.763364	0.769735	0.806399	0.888081
α_θ	0.282251	0.281734	0.280685	0.279072	0.276843	0.26401	0.235422
α_c	0.00342267	0.00342986	0.00344444	0.0034669	0.00349796	0.00367745	0.00408155
α_v	24.7901	24.7479	24.6628	24.533	24.3558	23.3853	21.4839

次に、耐久消費財から得られる効用に対する重みを決定するパラメータ β の影響を見る (表 2)。 β が大きくなると、耐久消費財から得られる効用が相対的に大きくなり、最適な保有サイズは小さくなる。このとき、非耐久消費財の消費量は増える。また、耐久消費財価格と証券価格の相関を正に設定してあるので、リスク証券の売りによる耐久消費財のリスクヘッジ量が減り、リスク証券への配分は増える。耐久消費財の最適戦略は β の影響を大きく受けるため、実務的には β を適切に設定する必要がある。例えば Dunn and Singleton (1986) は、米国における β を実証的に推定している。

最後に、リスク回避度の影響を見る (表 3)。 γ を大きくし、投資家をよりリスク回避的のすると耐久消費財およびリスク証券への配分は減る。 β, γ の影響は常識的な結果である。

3.3 最適戦略の存在可能性

仮定 1 について考察する。本論文では耐久消費財保有量 α_k を与える方程式 (10) が解を持つための条件を示していない。その条件は、仮に得られたとしてもパラメータが多いことが原因で、解釈が難しく実用性に欠けるであろう。以下では、方程式 (10) に解が存在するか否かが、損壊率 ℓ と地震強度 λ の影響を強く受けることを数値的に示す。

方程式 (10) のうち、2 次方程式部分 ($\Lambda_0 + \Lambda_1\alpha_k + \Lambda_2\alpha_k^2$) は、仮定 2 の下では必ず正の根を持つ。例えばパラメータ設定を式 (20) とすると、図 1(左側) のように描かれる。一方、それ以外の部分 $F_\lambda(\alpha_k)$ は図 1(右

表 2 効用関数パラメータ β の影響

β	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
α_k	0.769735	0.596173	0.42403	0.253187	0.0839021
α_θ	0.276843	0.35509	0.432839	0.510134	0.586884
α_c	0.00349796	0.010226	0.0166017	0.0226185	0.0282617

表 3 リスク回避度 γ の影響

γ	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
α_k	1.01196	0.906795	0.829315	0.769735	0.7224
α_θ	0.330815	0.305955	0.289026	0.276843	0.267716

側) のようになる。付録 B.2 において示したように $0 < \alpha_k < 1/\ell$ では $F_\Lambda(\alpha_k) < 0$ である。特徴的な点は $\alpha_k = 1/\ell$ で $-\infty$ に発散することである。このことが原因で方程式 (10) は解を持たない場合がある。例えば、損壊率 ℓ が大きい場合である。図 2 には設定 (20) のうち、 ℓ のみを変化させた方程式 (10) 左辺を描いた。損壊率 ℓ が大きくなると、関数 $F_\Lambda(\alpha_k)$ の影響が強くなり、方程式 (10) は解を持たない。これは、損壊率の高い家屋を保有する場合、最適な戦略を見つけるのは困難であることを示す。ここまでの手法は、Merton (1969) 以降に培われてきた常等手段を用いており、また他の方法で問題 (7) を解く方法が開発されていないことから、事実上、最適戦略を探す事は不可能と考えてよい。この制約は、地震強度が高まるとさらに厳しくなる。図 3 には、 $\lambda = 1/50$ の場合について、方程式 (10) 左辺を描いた。以上の検討から、投資家がもし損壊率の高い住居を保有している場合、破産制約を満たす戦略を立てることができない場合があることが分かった。

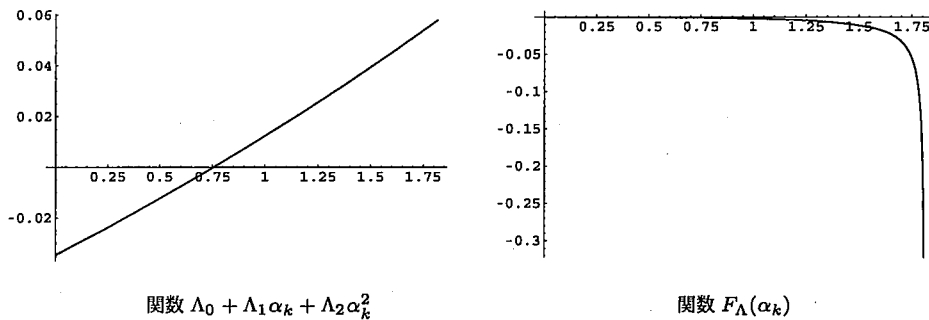


図 1 方程式 (10) の形状

(注) 耐久消費財に損壊可能性の無い場合、 $\Lambda_0 + \Lambda_1\alpha_k + \Lambda_2\alpha_k^2 = 0$ の解が耐久消費財の保有比率を与える。一方、耐久消費財に損壊可能性がある場合、方程式 (10)、すなわち $\Lambda_0 + \Lambda_1\alpha_k + \Lambda_2\alpha_k^2 + F_\Lambda(\alpha_k) = 0$ の解が保有比率を与える。家屋の損壊可能性は家屋の保有比率を上昇させる。

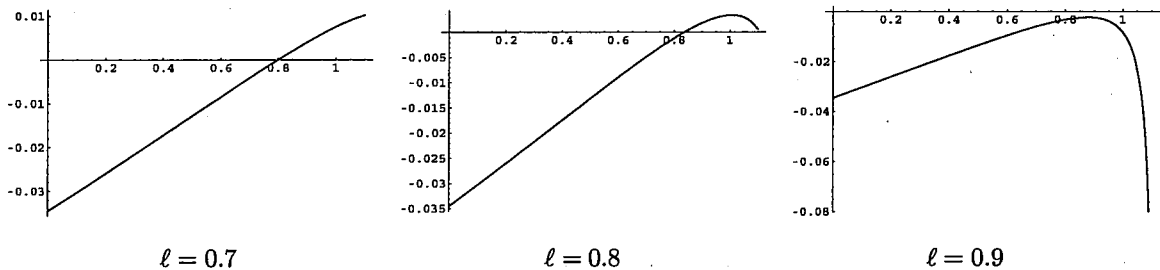


図 2 損壊率 ℓ が α_k に及ぼす影響 (地震強度 $\lambda = 1/300$)

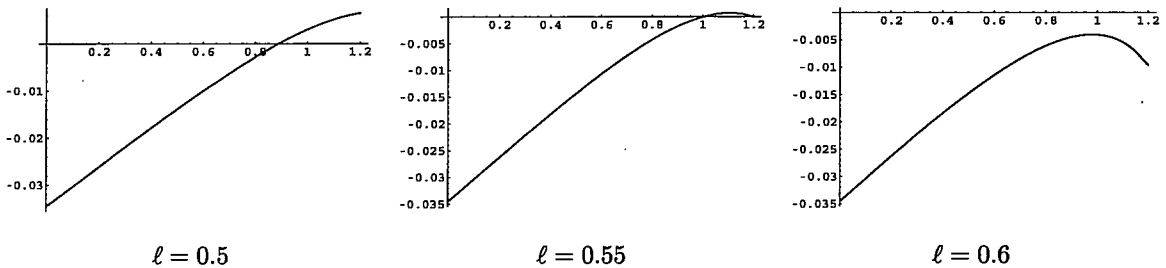


図 3 損壊率 ℓ が α_k に及ぼす影響 (地震強度 $\lambda = 1/50$)

(注) 図 2、図 3 ともに曲線は方程式 (10)。横軸との交点が耐久消費財の最適保有比率 α_k を与える。損壊率 ℓ が大きい場合、解が存在しない場合がある。

4 結論

本論文では、耐久消費財の損壊可能性を考慮して Merton (1969, 1971, 1973) の消費投資問題を扱った。耐久消費財が摩擦の無い市場で取引可能であることを仮定し、リスクホライズンを無限遠とした結果、解析解の導出に成功した。これにより、耐久消費財の損壊可能性は、耐久消費財の保有量を上昇させることが分かった。このとき、耐久消費財を保有することで生じる超過リスクをヘッジするために、リスク証券の最適な保有量は減少することを示した。遺産を残さない投資家に対しては普遍性の高い結果である。また、最適戦略の存在可能性についてある仮定をおいたが、その経済的意味を数値的に示した。これにより、保有家屋の損壊率がある程度高い場合、最適解が存在しない可能性があることが分かった。

本論文の課題および拡張可能性は大きく2つある。一つは、耐久消費財の売買に関する取引コストの導入である。耐久消費財として家屋を想定した場合、取引コストは無視できない。粘性解概念を用いた定式化が一般的である。もう一つはリスクホライズンを有限満期とすることである。ある有限満期に遺産を残すことを前提とした場合、家屋の資産としての役割が大きくなるため地震リスクが家屋の保有戦略に与える影響は本論文とは異なる可能性がある。さらに、本論文では、地震保険に関する議論を行なわなかった。地震保険の需要は、遺産関数に依存する可能性が高いからである。

最後に本研究の応用上の問題点に触れる。本モデルは、投資家本人の死亡および地震保険と住宅ローンの支払いさらには無期限問題であることの複合的な要因から、耐久消費財への需要を過大に評価する可能性がある*5。実務的にはさらなる拡張が必要である。

付録 A 資産制約式と HJB 方程式の導出過程

ジャンプ拡散過程における伊藤の補題を示しておく (Shreve (2004) 定理 11.5.1 参照)。

定理 2 (伊藤 - Doebelin 公式) $X(t)$ がジャンプ付き拡散過程に従うとき、 $X(t)$ の連続過程部分を $X^c(t)$ とすると、2 階微分可能な関数 $f(x)$ について

$$f(X(t)) = f(X(0)) + \int_0^t f'(X(s)) dX^c(s) + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X(s)) dX^c(s) dX^c(s) + \sum_{0 < s \leq t} [f(X(s)) - f(X(s-))]$$

が成立する。

注意 1 多次元の場合は自然な拡張を考えればよい。Shreve (2004) 定理 11.5.4 あるいは Oksendal and Sulem (2005) 定理 1.16 を参照のこと。

注意 2 ジャンプ付き拡散過程における伊藤の公式では、連続過程部分について従来の計算を行い、ジャンプ項の影響として時刻 t までの $f(x)$ の総ジャンプを加える。ここで項 $f(X(s)) - f(X(s-))$ が左連続な関数 $\Gamma(s-)$ として表せる場合には微分形による表現

$$df(X(t)) = f'(X(t)) dX^c(t) + \frac{1}{2} f''(X(t)) dX^c(t) dX^c(t) + \Gamma(t-) dN(t) \quad (21)$$

が得られる。

*5 二人のレフリーからの指摘を再解釈した。

A.1 資産制約式 (5) の導出

ジャンプによる耐久消費財の損壊は

$$K(t)P(t) - K(t-)P(t-) = -\ell K(t-)P(t-) = -\ell K(t-)P(t)$$

と表せるため左連続である。よって表現 $d(K(t)P(t))$ を用いることができ (注意 2), 式 (4) から

$$dX(t) = -C(t)dt + d\theta_0(t) + d\theta(t) + d(K(t)P(t)) = -C(t)dt + \theta_0(t)rdt + \theta(t)dS(t) + d(K(t)P(t)) \quad (22)$$

を得る。また, 補題 1 から

$$d(K(t)P(t)) = K(t)dP(t) + P(t)(-\delta + \lambda\ell)dt + dP(t)(-\delta + \lambda\ell)dt - \ell K(t-)P(t)dN(t) \quad (23)$$

である。式 (23) に式 (2) および式 (3) を代入した後で, 式 (22) に式 (1) および式 (23) を代入し, さらに式 (4) に注意すると資産制約式 (5) を得る。

A.2 HJB 方程式 (9) の導出

式 (8) は次のように書き換えることができる。

$$\rho V(x, p) = \sup_{S \in \mathcal{A}, t > 0} \left\{ U(C(t), K(t)) + \frac{1}{dt} E_t [dV(x, p)] \right\}. \quad (24)$$

発見的に式 (24) を導出する方法については Dixit and Pindyck (1994), p.105 を参照されたい。いま, 定理 2 および注意 1 から

$$\begin{aligned} dV(x, p) = & \left\{ \frac{1}{1-\gamma} (c^\beta k^{1-\beta})^{1-\gamma} + (r(x-pk) + \theta(\mu-r) + (\mu_P - \delta)kp - c) \frac{\partial V}{\partial x}(x, p) \right. \\ & + \frac{1}{2} (\theta^2 \sigma_S^2 + k^2 p^2 \sigma_P^2 + 2\theta \sigma_S \sigma_P k p) \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(x, p) + \mu_P p \frac{\partial V}{\partial p}(x, p) \\ & \left. + \frac{1}{2} \sigma_P^2 p^2 \frac{\partial^2 V}{\partial p^2}(x, p) + (\theta \sigma_S \sigma_P + \sigma_P^2 k p) p \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial p}(x, p) + \lambda \ell k p \frac{\partial V}{\partial x}(x, p) \right\} dt \\ & + (V(x - \ell k p, p) - V(x, p)) dN(t) + a(x, p) dw_1(t) + b(x, p) dw_2(t) \end{aligned}$$

となる。ただし $a(x, p), b(x, p)$ の詳細は省略する。ここで式 (24) 右辺の項 $\frac{1}{dt} E_t [dV(x, p)]$ のうち, 連続部分については拡散過程の定義*6からそのドリフトになること, またジャンプ項については

$$E_t \left[(V(x - \ell k p, p) - V(x, p)) dN(t) \right] = \lambda (V(x - \ell k p, p) - V(x, p)) dt$$

とできることから, HJB 方程式 (9) を得る。技術的条件を含めたより厳密な導出については Oksendal and Sulem (2005) Theorem 3.1 あるいは Sennewald (2006) Theorem 3 を参照するとよい。

付録 B 証明 (定理 1)

ジャンプ項の影響に注意しながら, Damgaard, Fuglsbjerg and Munk (2003) と同様に証明を行なう。以下では, 次元を縮小させるための補題を示した後に HJB 方程式の解を示す。また, 最後に横断条件を示す。

*6 木島 (1994) p.135 参照。

補題 1 価値関数 $V(x, p)$ は (x, p) に対して $\beta(1-\gamma)$ 同次である。すなわち任意の $\phi > 0$ に対して

$$V(\phi x, \phi p) = \phi^{\beta(1-\gamma)} V(x, p)$$

が成立する。

証明 式 (5) より初期値 (x, k) に対して、戦略 (θ, k, c) が許容されるとき、初期値 $(\phi x, \phi k)$ に対しては戦略 $(\phi\theta, k, \phi c)$ が許容される。また逆も成立する。ここで $U(\phi c, k) = \phi^{\beta(1-\gamma)} U(c, k)$ より $V(\phi x, \phi k) = \phi^{\beta(1-\gamma)} V(x, k)$ が成立する。□

B.1 HJB 方程式 (9) の解

補題 1 より、 $V(x, p) = p^{\beta(1-\gamma)} V(x/p, 1)$ が成立するので、価値関数 $V(x, p)$ は $y = x/p$ とすれば次元を縮小することができる。そこで

$$V(x, p) \equiv p^{\beta(1-\gamma)} v(y) \quad (25)$$

として、以下では $v(y)$ を求める。

式 (25) を HJB 方程式 (9) に代入すると $v(y)$ に関する HJB 方程式

$$\begin{aligned} 0 = \sup_{\hat{\theta}, \hat{c}, k} & \left[\frac{(\hat{c}^\beta k^{1-\beta})^{1-\gamma}}{1-\gamma} + \frac{1}{2} \left\{ \beta(\gamma-1) ((\beta(\gamma-1)+1)\sigma_P^2 - 2\mu_P) - 2\rho \right\} v(y) \right. \\ & + \left\{ -\hat{c} - \delta k + k ((-\gamma\beta + \beta - 1)\sigma_P^2 + \mu_P - r) \right. \\ & \quad \left. + (\mu - r + (-\gamma\beta + \beta - 1)\sigma_S\sigma_{P1})\hat{\theta} + ((\beta(\gamma-1)+1)\sigma_P^2 - \mu_P + r) y \right\} v'(y) \\ & + \frac{1}{2} \left\{ k^2\sigma_P^2 + \sigma_S^2\hat{\theta}^2 + 2k\sigma_S\sigma_{P1}\hat{\theta} - 2(k\sigma_P^2 + \sigma_S\sigma_{P1}\hat{\theta}) y + \sigma_P^2 y^2 \right\} v''(y) \\ & \left. + \lambda \left\{ v(y - \ell k) - v(y) + \ell k v'(y) \right\} \right] \quad (26) \end{aligned}$$

を得る。ただし、 $\hat{c} = c/p, \hat{\theta} = \theta/p$ とした。

まず、新たな HJB 方程式 (26) の解を

$$v(y) = \frac{1}{1-\gamma} \alpha_v y^{1-\gamma} \quad (27)$$

と仮定し、さらに最適制御が

$$\hat{c} = \alpha_c y, \quad \hat{\theta} = \alpha_\theta y, \quad k = \alpha_k y \quad (28)$$

と表現できると仮定する。次に、式 (27) を HJB 方程式 (26) に代入すると、式

$$\begin{aligned} 0 = \sup_{\hat{\theta}, \hat{c}, k} & \left[\frac{(\hat{c}^\beta k^{1-\beta})^{1-\gamma}}{1-\gamma} - \alpha_v y^{-\gamma-1} \left\{ \frac{1}{2} \gamma (k^2\sigma_P^2 + \sigma_S^2\hat{\theta}^2 + 2k\sigma_S\sigma_{P1}\hat{\theta}) \right. \right. \\ & + \left(\hat{c} + k ((\beta-1)(\gamma-1)\sigma_P^2 + \delta - \mu_P + r) + (-\mu + r + (\beta-1)(\gamma-1)\sigma_S\sigma_{P1})\hat{\theta} \right) y \\ & \left. + \frac{1}{2} \left((\beta-1)(\beta(\gamma-1) - \gamma + 2)\sigma_P^2 - 2((\beta-1)\mu_P + r) - 2\frac{\rho}{1-\gamma} \right) y^2 \right\} \\ & \left. + \frac{\alpha_v \lambda}{1-\gamma} ((y - \ell k)^{1-\gamma} - y^{1-\gamma}) + \alpha_v \lambda \ell k y^{-\gamma} \right] \quad (29) \end{aligned}$$

を得る。

未知係数 $\alpha_v, \alpha_c, \alpha_\theta, \alpha_k$ は最適制御 $\hat{c}, \hat{\theta}, k$ に関する 1 階の条件および式 (29) から求める。まず 1 階の条件から、次の 3 式

$$\begin{aligned} \beta \hat{c}^{-\gamma} \beta^{\beta-1} k^{(\beta-1)(\gamma-1)} - \alpha_v y^{-\gamma} &= 0 \\ (\mu - r - (1-\gamma)(1-\beta)\sigma_S\sigma_{P1})y - \gamma\sigma_S(k\sigma_{P1} + \sigma_S\hat{\theta}) &= 0 \\ \alpha_v k^{\beta+\gamma} \left(\ell \lambda y^{\gamma+1} p^\gamma + \left(\gamma \left(k\sigma_P^2 + \sigma_S\sigma_{P1}\hat{\theta} \right) + ((\beta-1)(\gamma-1)\sigma_P^2 + \delta - \mu_P + r)y \right) \right) \\ - (1-\beta)k^{\beta\gamma} y^{\gamma+1} \hat{c}^{\beta(1-\gamma)} &= 0 \end{aligned}$$

を得る。これらを式 (28) を用いて整理すると

$$\alpha_v = \alpha_c^{\beta(1-\gamma)-1} \alpha_k^{(\beta-1)(\gamma-1)} \beta \quad (30)$$

$$\alpha_\theta = \frac{\mu - r + (\beta - (\alpha_k + \beta - 1)\gamma - 1)\sigma_S\sigma_{P1}}{\gamma\sigma_S^2} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \alpha_c = \frac{\beta}{1-\beta} \left\{ r - \mu_P + \delta + (1-\beta)(1-\gamma)\sigma_{P2}^2 + (\mu - r)\frac{\sigma_{P1}}{\sigma_S} \right\} \alpha_k \\ + \frac{\gamma\beta}{1-\beta}\sigma_{P2}^2\alpha_k^2 + \frac{\lambda\beta\ell}{1-\beta}\alpha_k \left\{ (1-\ell\alpha_k)^{-\gamma} - 1 \right\} \end{aligned} \quad (32)$$

を得る。さらに、式 (29) に対して式 (30)~式 (32) を代入して整理すると式 (10) を得る。以上で、 $\alpha_k, \alpha_\theta, \alpha_c, \alpha_v$ を定めることができた。

次に戦略 $K(t)$ の許容可能性について調べる。式 (10) 左辺を α_k の方程式 $f(\alpha_k)$ とすると、仮定 1 から $f(0) < 0, f(1/\ell) > 0$ となるから $0 < \alpha_k < 1/\ell$ が満たされる。このとき、 $x - \ell pk = x - \ell\alpha_k > 0$ となり地震発生直後に投資家が破産することは無い。

最後に、 α_c の符号について調べる。式 (32) は

$$\alpha_c = \beta\Lambda_1\alpha_k + \beta \left(\Lambda_2 - \frac{1}{2}(1-\gamma)\sigma_{P2}^2 \right) \alpha_k^2 + \frac{\lambda\beta\ell}{1-\beta}\alpha_k(1-\ell\alpha_k)^{-\gamma}$$

と書き換えることができ、さらに式 (10) を用いると式

$$\begin{aligned} \alpha_c = -\beta \left\{ \Lambda_0 + \frac{1}{2}(1-\gamma)\sigma_{P2}^2\alpha_k^2 + \frac{\lambda\beta\ell}{1-\beta}\alpha_k(1-\ell\alpha_k)^{1-\gamma} \right\} \\ + \frac{\beta\lambda}{\gamma} \left\{ 1 - (1-\ell\alpha_k)^{1-\gamma} \right\} + \frac{\beta\lambda\ell}{1-\beta}\alpha_k(1-\ell\alpha_k)^{1-\gamma} \end{aligned}$$

を得る。結局、仮定 2 および $0 < \alpha_k < 1/\ell$ から $\alpha_c > 0$ が保証される。以上から得られた最適戦略は許容可能戦略 $A(x, k, p)$ に属する。また (30) から $\alpha_c > 0, \alpha_k > 0$ のとき $\alpha_v > 0$ である。

B.2 横断条件

Fleming and Soner (1991) の定理 5.1 によると HJB 方程式の解が横断条件を満たすとき、HJB 方程式の解は価値関数となる。最適制御 (15) を富の従う式 (5) に代入すると式

$$\begin{aligned} \frac{dX(t)}{X(t)} = \left(r(1-\alpha_k) + \alpha_\theta(\mu - r) + (\mu_P - \delta)\alpha_k - \alpha_c \right) dt \\ + (\alpha_\theta\sigma_S + \alpha_k\sigma_{P1}) dw_1(t) + \alpha_k\sigma_{P2} dw_2(t) + \lambda\ell\alpha_k dt - \ell\alpha_k dN(t) \end{aligned} \quad (33)$$

を得る。このとき横断条件

$$\lim_{T \rightarrow \infty} e^{-\rho T} E[V(X_T, P_T)] = 0$$

が満たされれば良い。関数 (14) に対して式 (33) と式 (2) を用いて伊藤の補題を適用すると

$$E[V(X_T, P_T)] = \frac{1}{1-\gamma} \alpha_v p^{-(1-\beta)(1-\gamma)} x^{1-\gamma} e^{\xi T},$$

が得られる。ただし

$$F_{\xi}(\alpha_k) = \lambda \left\{ (1 - \ell \alpha_k)^{1-\gamma} - 1 + (1 - \gamma) \alpha_k \ell \right\}$$

とし、さらに

$$\begin{aligned} \xi = & F_{\xi}(\alpha_k) + (1 - \gamma) \left[r(1 - \alpha_k) + \alpha_{\theta}(\mu - r) + (\mu_P - \delta) \alpha_k - \alpha_c - \frac{1}{2} \alpha_{\theta}^2 \sigma_S^2 \right. \\ & - \frac{\gamma}{2} \sigma_{P2}^2 \alpha_k^2 - \gamma \alpha_{\theta} \alpha_k \sigma_S \sigma_{P1} + \frac{1}{2} (1 - \beta) \left\{ 1 + (1 - \beta)(1 - \gamma) \right\} \sigma_P^2 \\ & \left. - (1 - \beta) \mu_P - (1 - \beta)(1 - \gamma) \alpha_{\theta} \sigma_S \sigma_{P1} - (1 - \beta)(1 - \gamma) \alpha_k \sigma_P^2 \right] \end{aligned}$$

とする。ここで ξ に式 (17) および式 (18) を代入し、さらに式 (10) を用いると

$$\xi - \rho = \Lambda_0 + \frac{1}{2} (1 - \gamma) \sigma_{P2}^2 \alpha_k^2 + (1 - \gamma) F_{\Lambda}(\alpha_k) - (1 - \gamma) F_c(\alpha_k) + F_{\xi}(\alpha_k)$$

となる。

いま、簡単な計算から $0 < \alpha_k < 1/\ell$ のとき

$$F_{\Lambda}(0) = 0, F'_{\Lambda}(\alpha_k) \leq 0,$$

$$F_{\xi}(0) = 0, F'_{\xi}(0) = 0, \lim_{\alpha_k \uparrow 1/\ell} F'_{\xi}(\alpha_k) = -\infty, F''_{\xi}(\alpha_k) < 0$$

が分かり、仮定 1 の下では $F_{\Lambda}(\alpha_k) < 0$, $F_{\xi}(\alpha_k) < 0$ である。また $0 < \alpha_k < 1/\ell$ のとき明らかに $F_c(\alpha_k) > 0$ である。結局、 $\Lambda_0 + \frac{1}{2} (1 - \gamma) \sigma_{P2}^2 \alpha_k^2 < 0$ ならば $\xi - \rho < 0$ となる。これは、耐久消費財にジャンプ項が無い場合の横断条件であり、すでに仮定 2 として示した。よって本問題の横断条件は満たされた。

謝辞

JARIP 第 4 回研究発表大会において、金融情報システムセンターの小守林克哉氏および新日本監査法人の菅野正泰氏、三井アセット信託銀行の杉田健氏、千葉商科大学の吉田靖氏より本論文を改善するための貴重な意見を頂いた。また匿名の 2 人のレフリーからは有益かつ建設的な意見を頂き本論文の完成度を高めることができた。ここに感謝の意を記したい。なお本研究を実施するにあたり財団法人石井記念証券研究振興財団による研究助成（平成 18 年度）ならびに文部科学省科学研究費補助金（課題番号:17710123）による助成を受けた。

参考文献

- [1] 島崎邦彦ほか (2001), 『あした起きてもおかしくない大地震』, 集英社.
- [2] 地震調査研究推進本部 地震調査委員会 (2001), 「長期的な地震発生確率の評価手法について」.
- [3] 柴田明德 (2005), 『確率的手法による構造安全性の解析 - 確率の基礎から地震災害予測まで』, 森北出版.
- [4] 木島正明 (1994), 『ファイナンス工学入門第 I 部 ランダムウォークとブラウン運動』, 日科技連.
- [5] Campbell, J. Y. and L. M. Viceira (2002), *Strategic asset allocation: portfolio choice for long-term investors*, Oxford University Press.
- [6] Caulay, S. D., A. D. Pavlov, and E. S. Schwartz (2005), "Homeownership as a constraint on asset allocation," working paper.
- [7] Cocco, J. F. (2004), "Portfolio choice in the presence of housing," *Review of Financial Studies*, 18, 535-567.
- [8] Cuoco, D. and H. Liu (2000), "Optimal consumption of a divisible durable good," *Journal of Economic Dynamics and Control*, 24, 561-613.

- [9] Damgaard, A., B. Fuglsbjerg and C. Munk (2003), "Optimal consumption and investment strategies with a perishable and an indivisible durable consumption good," *Journal of Economic Dynamics and Control*, 28, 209–253.
- [10] Dixit A. K. and R. S. Pindyck (1994), "*Investment under uncertainty*", Princeton.
- [11] Dun, K. B. and K. J. Singleton (1986) "Modeling the term structure of interest rates under non-separable utility and durability of goods," *Journal of Financial Economics*, 17, 27–55.
- [12] Detemple, J. B. and C. I. Giannikos (1996), "Asset and commodity prices with multi-attribute durable good," *Journal of Economic Dynamics and Control*, 20, 1451–1504.
- [13] Fleming, W. H. and H. M. Soner (1991), *Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions*, Springer -Verlag.
- [14] Grossman, S. J. and G. Laroque (1990), "Asset pricing and optimal portfolio choice in the presence of illiquid durable consumption goods," *Econometrica*, 58, 25–51.
- [15] Hindy, A., and C. Huang (1993), "Optimal consumption and portfolio rules with durability and local substitution," *Econometrica*, 61, 85–121.
- [16] Merton, R. C. (1969), "Lifetime portfolio selection under uncertainty: the continuous time case," *Review of Economic Studies*, 32, 137–150.
- [17] ——— (1971), "Optimal consumption and portfolio rules in a continuous-time model," *Journal of Economic Theory*, 3, 373–413.
- [18] ——— (1973), "An intertemporal capital asset pricing model," *Econometrica*, 41, 867–887.
- [19] Oksendal, B. and A. Sulem (2005), *Applied stochastic control of jump diffusions*, Springer.
- [20] Shreve, S. E. (2004), *Stochastic calculus for finance II continuous-time models*, Springer.
- [21] Sennewald, K. (2006) "Controlled stochastic differential equations under Poisson uncertainty and with unbounded utility," *Journal of Economic Dynamics and Control*, forthcoming, (available online July 2006).