

研究論文

長寿リスク証券化商品のプライシング —ベイジアン・アプローチによる評価—

倉知 善行* 小暮 厚之†

2009年2月10日投稿

2009年6月27日受理

概要

近年、医療技術の進歩などの要因から人の長寿化が進行しており、特に高齢層においてその進行が目立っている。一方、年金基金では長寿リスクという大数の法則では取り除くことが出来ないシステムティックリスクに直面している。その長寿リスクの移転の方法として、近年、欧米を中心に長寿リスクの証券化商品である長寿債券が注目を集めている。しかし、従来、長寿債券の評価はパラメータの不確実性などの問題から一貫した枠組みによって行うことは困難であった。そこで、本稿では、Denuit, Devolder and Goderniaux (2007) で提案された長寿リスク証券化のスキームについて、ベイズ法によるアプローチを用いてモデル推定、将来生存率の予測、長寿リスク評価および長寿債券の評価を一貫した枠組みで行う評価手法を提案し、数値例を用いてわが国データの下で長寿債券のプライシングを行う。

キーワード：長寿債券、長寿リスク、証券化、ベイズ法、マルコフ連鎖モンテカルロ (MCMC) 法、Lee-Carter モデル、最大エントロピー法、リスク中立予測分布

1 はじめに

1.1 研究背景

近年、医療技術の進歩などの要因から人の長寿化が進行しており、特に高齢層においてその進行が目立っている。(図1) 一方、年金基金では人の長寿化により将来の年金支給額の増大という長寿リスクを抱えることになっている。^{*1} 特に、人の長寿化によるリスクは母集団全体に影響するため従来の年金リスクの抑制において基本であった大数の法則では取り除くことが出来ないシステムティックリスクであるといえる。^{*2} そのため、そのような年金基金においては長寿リスク対処の巧拙が財政に影響を与えるといえる。そのひとつの方法として、近年、欧米を中心に長寿リスクの証券化商品である長寿債券を用いて長寿リスクを金融市場へと移転する手法が注目を集めている。しかし、既存の長寿リスクの証券化の研究では、その基礎となる将来死亡率予測の

* 東京大学大学院経済学研究科修士課程(現：日本銀行高知支店業務課) E-mail: kurachiy@d05.itscom.net

† 慶應義塾大学総合政策学部 E-mail: kogure@sfc.keio.ac.jp

*1 本稿では年金基金としているが、実際にわが国では、年金基金によって提供される単純な終身年金は厚生年金基金の基本部分のみである。そのため、終身給付を行う年金保険を提供する生命保険会社の方がこのような長寿リスクに注目しているとの意見もある。

*2 この点は年金開始年齢に到達した受給者に限定した議論である。死亡や退職による脱退などにより年金開始年齢に到達しなかった受給者も考慮すれば、大数の法則によりリスクが取り除かれるという指摘もある。

不確実性が十分には考慮されていない。また、この欠点を克服するためにベイズ法を用いた予測も提案されているが、証券化のプロセスにまで踏み込んだものは見当たらない。そこで、本稿では、ベイズ法によるアプローチを用いてモデル推定、将来生存率の予測、長寿リスク評価および長寿債券の評価を一貫した枠組みで行う評価手法を提案し、長寿債券のプライシングを行う。



図1 年齢別生存率の推移 (左図：男性 右図：女性)

1.2 先行研究

生存率と裏表の関係にある死亡率の予測手法に関する研究として、Lee and Carter (1992) があげられる。Lee and Carter (1992) による死亡率モデルには様々な拡張が行われており、それらのわが国死亡率への適用に関する研究として、小暮・長谷川 (2007a) があげられる。また、Lee and Carter (1992) による死亡率モデルに対してベイズ法アプローチを用いた研究として、Pedroza (2006) および Dowd et al. (2008) があげられ、わが国への適用としては橘川・小暮・倉知 (2008) および Kogure, Kitsukawa and Kurachi (2009) が研究を行っている。

長寿債券の評価については、Bauer, Boerger and Russ (2008), Cairns, Blake and Dowd (2006), Denuit, Devolder and Goderniaux (2007), Kogure and Kurachi (2008), Levantesi, Menzietti and Torri (2008) および Sherris and Wills (2008) が先行研究としてあげられる。特に、Denuit, Devolder and Goderniaux (2007) および Levantesi, Menzietti and Torri (2008) は本稿と同じく Lee-Carter モデルを用いた長寿債券の評価手法の提案を行っている。

また、長寿債券の仕組みや、その他の長寿リスクの移転手法については Blake, Cairns and Dowd (2006) が詳しい。

2 生存率

長寿リスクは将来生存率の改善により生じるリスクである。そのため、長寿リスクを評価する上で将来生存率の予測は必要不可欠であり、本稿では、将来死亡率の予測値を用いて将来生存率の予測を行う。そこで、本節では、まず、生存率と裏表の関係である死亡率の定義を行い、その下で生存率の定義を行う。また、死亡率モデルとして標準的に用いられる Lee-Carter モデルについて簡単な説明を行う。

2.1 生存率の定義

人が死亡する確率の概念として死力、死亡率、粗死亡率がある。

死力 $\mu_x(t)$ は時点 t において x 歳の人が次の瞬間に死亡する可能性を表す。十分に小さい dt に対して、 $\mu_x(t)dt$ は区間 $[t, t+dt)$ における死亡確率を与える。

また、死亡率 $q_x(t)$ は時点 t において x 歳の人が次の 1 年以内に死亡する確率であり、死力を用いて

$$q_x(t) = 1 - \exp \left\{ - \int_0^1 \mu_{x+s}(t+s) ds \right\} \quad (1)$$

と表される。

しかし実際の分析では、死力や死亡率の代わりに粗死亡率の概念を用いることが多い。区間 $[t, t+1)$ の時間間隔を暦年 t と呼ぶことにすると、暦年 t における x 歳の粗死亡率は

$$m_x(t) \equiv \frac{\text{直前の誕生日で } x \text{ 歳になった人の暦年 } t \text{ における死亡数}}{\text{直前の誕生日で } x \text{ 歳になった人の暦年 } t \text{ 年における平均人口}} \quad (2)$$

と定義される。

なお、粗死亡率 $m_x(t)$ に対応する実際のデータの観察死亡率は

$$m_{xt} \equiv \frac{D_{xt}}{E_{xt}} \quad (3)$$

で与えられる。ここで、 D_{xt} は x 歳の人の t 年における実際の死亡数、 E_{xt} は対応するエクスポージャーである。^{*3}

本稿では、Brouhns, Denuit and Vermunt (2002a) に倣い、死力は各年齢および各暦年に対して一定であり、

$$\mu_{x+u}(t+s) = \mu_x(t), \quad 0 \leq s, u \leq 1 \quad (4)$$

であると仮定する。ここで、 t および x は非負の整数値である。

この仮定により、死力は粗死亡率と等しくなり、

$$\mu_x(t) = m_x(t) \quad (5)$$

が成り立つ。よって、式 (1) より、暦年 t において x 歳の人が次の 1 年以内に死亡する確率は

$$q_x(t) = 1 - \exp\{-m_x(t)\} \quad (6)$$

と表される。

そこで、時点 t において x 歳の人が次の 1 年間生存する確率である生存率 $p_x(t)$ は

$$\begin{aligned} p_x(t) &= 1 - q_x(t) \\ &= \exp\{-m_x(t)\} \end{aligned} \quad (7)$$

と表される。また、時点 t に x 歳の人が次の n 年間生存する確率 ${}_n p_x(t)$ は

$$\begin{aligned} {}_n p_x(t) &= \prod_{\tau=1}^n p_{x+\tau-1}(t+\tau-1) \\ &= \prod_{\tau=1}^n \exp\{-m_{x+\tau-1}(t+\tau-1)\} \\ &= \exp \left\{ - \sum_{\tau=1}^n m_{x+\tau-1}(t+\tau-1) \right\} \end{aligned} \quad (8)$$

^{*3} E_{xt} としては、実際には、暦年 t の中央日における x 歳の人口が採用されることが多い。

と表すことができる。

2.2 Lee-Carter モデル

Lee and Carter (1992) は x 歳の人の時点 t における粗死亡率が

$$m_x(t) = \exp\{\alpha_x + \beta_x \kappa_t\} \quad (9)$$

と記述されるとする Lee-Carter モデルを提案した。ここで、 α_x は暦年に影響されない年齢効果、 κ_t は年齢によらない共通な暦年効果、 β_x は暦年効果に対する各年齢毎の感応度を表し、それぞれ実際のデータから推定されるパラメータである。

また、式 (5) より、Lee-Carter モデルは

$$\mu_x(t) = \exp\{\alpha_x + \beta_x \kappa_t\} \quad (10)$$

と表される。

実際の分析では、観察死亡率の対数値 $y_{xt} \equiv \ln m_{xt}$ に対して

$$y_{xt} = \alpha_x + \beta_x \kappa_t + \epsilon_{xt}, \quad \epsilon_{xt} \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} N(0, \sigma_\epsilon^2) \quad (11)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_x \beta_x = 1, \quad \sum_t \kappa_t = 0$$

という制約付き回帰モデルを当てはめ、以下の 2 つのプロセスからパラメータの推定および予測を行い、将来死亡率の予測を行う。

1. 推定プロセス

死亡率データより

(a) $\hat{\alpha}_x = \sum_{t=t_{\min}}^{t_{\max}} \ln m_{xt} / (t_{\max} - t_{\min} + 1)$ として α_x を推定する。

(b) $\ln m_{xt} - \hat{\alpha}_x = \sum_{k=1} u_{tk} q_k v_{xk}$ と特異値分解を行い、 $\hat{\beta}_x = v_{x1}$ 、 $\hat{\kappa}_t = u_{t1} q_1$ として β_x および κ_t を推定する。

2. 予測プロセス

(a) $\hat{\kappa}_t$ に対して時系列モデルを当てはめる。

(b) 当てはめた時系列モデルを用いて将来の κ_t として $\kappa_{t_{\max}+\tau}$ を予測する。

(c) $m_x(t_{\max} + \tau) = \exp\{\hat{\alpha}_x + \hat{\beta}_x \hat{\kappa}_{t_{\max}+\tau}\}$ として将来死亡率を予測する。

Lee and Carter (1992) は多くのケースでは κ_t の時系列は確率的トレンドモデル

$$\kappa_t = \lambda + \kappa_{t-1} + \omega_t, \quad \omega_t \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} N(0, \sigma_\omega^2) \quad (12)$$

で表すことができるとしている。

3 長寿債券

長寿債券には、生存率の上昇に対してクーポンを増加させ、債券の投資家の長寿リスクをヘッジする購入型と、生存率の上昇に対してクーポンを減少させ債券の発行体の長寿リスクをヘッジする発行型の 2 種類が知られている。そこで、本節では、購入型長寿債券と発行型長寿債券として、それぞれ、実際に市場で発表された EIB/BNP 長寿債券と Denuit, Devolder and Goderniaux (2007) により提案された長寿債券について説明を行う。本稿では以降、この Denuit, Devolder and Goderniaux (2007) により提案された長寿債券を DDG 長寿債券と呼ぶ。

3.1 EIB/BNP 長寿債券

3.1.1 概要

BNP Paribas は、2004 年 11 月に、年金基金などを対象とした世界初の EIB/BNP 長寿債券の発行について発表を行った。この長寿債券は、投資家の長寿リスクをヘッジする購入型であり、内容は額面 540,000,000 ポンド、満期 25 年、クーポンは 50,000,000 ポンドを基準として対象コホートの実現生存率によって変動するというものであった。この EIB/BNP 長寿債券は十分な需要を得ることが出来ず、実際には発行されなかったものの、その後の長寿債券の開発に対して大きな影響を与えることとなった。

以下では、EIB/BNP 長寿債券のスキーム、クーポンおよび問題点について整理を行いながら説明を行う。

3.1.2 スキーム

EIB/BNP 長寿債券は、発行体として欧州投資銀行 (EIB)、オリジネーター兼アレンジャーとして BNP Paribas、および再保険会社として Partner Re の 3 社が参加し、発行を行うスキームであった。このスキームは図 2 のようにまとめられ、主に以下の 3 つの取引によって構成される。

1. 投資家と EIB との間の長寿債券
2. EIB と BNP Paribas との間の通貨スワップ
3. EIB と Partner Re との間の生存率スワップ

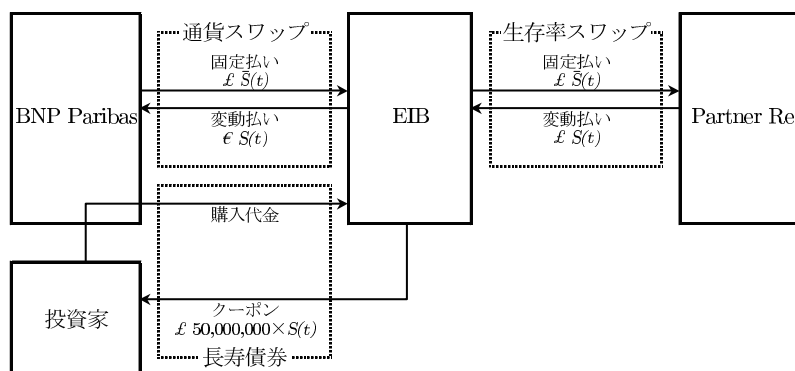


図 2 EIB/BNP 長寿債券スキーム

1 の投資家と EIB との間の長寿債券は、投資家が発行額をユーロ建てで EIB に支払い、EIB が 50,000,000 ポンドを基準として対象コホートの実現生存率によって変動するクーポンをポンド建てで投資家に支払うという取引である。ここで、実際には投資家は BNP Paribas に発行額を支払うが、BNP Paribas から EIB へとパススルーが行われている。

2 の EIB と BNP Paribas との間の通貨スワップは、EIB がユーロ建て変動金利として $S(t)$ を BNP Paribas に支払い、BNP Paribas がポンド建て固定金利として $\bar{S}(t)$ を支払う取引である。

3 の EIB と Partner Re との間の生存率スワップは、EIB がポンド建て固定生存率 $\bar{S}(t)$ を Partner Re に支払い、Partner Re がポンド建て実現生存率 $S(t)$ を EIB に支払う取引である。

特に、2 と 3 の取引により、EIB はユーロ建て実現生存率をポンド建て実現生存率へと変更している。

なお、このスキームにおいて、投資家は EIB の信用リスクを負っており、BNP Paribas や Partner Re の信用リスクから隔離されている。

3.1.3 クーポン

EIB/BNP 長寿債券において投資家は以下の式で計算されるクーポン $C(t)$ を EIB から受け取ることが出来る。

$$C(t) = 50,000,000 \times S(t), \quad 1 \leq t \leq 25 \quad (13)$$

ここで、 t は発行からの経過年数、 $S(t)$ は t 年経過時点におけるイングランドおよびウェールズの 2002 年時点 65 歳男性のコーホートの実現生存率である。また、 $S(t)$ は粗死亡率を用いて以下のように計算される。

$$\begin{aligned} S(t) &= S(0) {}_t p_{65}(2002) \\ &= S(0) \prod_{\tau=1}^t p_{64+\tau}(2001 + \tau) \\ &= S(0) \prod_{\tau=1}^t (1 - q_{64+\tau}(2001 + \tau)) \\ &\simeq S(0) \prod_{\tau=1}^t (1 - m_{64+\tau}(2001 + \tau)), \quad 1 \leq t \leq 25, S(0) = 1 \end{aligned} \quad (14)$$

3.1.4 問題点

EIB/BNP 長寿債券は十分な需要を得ることが出来ず、実際には発行されなかった。Blake, Cairns and Dowd (2006) はその理由として以下の 5 つの問題点を挙げている。^{*4}

1. 満期が 25 年と十分に長くなく、また、対象コーホートの年齢、性別が 1 つのみ（2002 年に 65 歳の男性）であるため、長寿リスクヘッジの効果が薄い。
2. リスクマネジメントに用いるにはコストが高い。
3. モデルリスクやパラメータリスクが大きい。
4. 年金基金の契約者集団と人口全体では、構成が異なるためベースリスクが存在する。
5. 粗死亡率による実現生存率は実際よりも生存率を低く見積もってしまう。

これらのうちほとんどの問題点は、新規の金融商品に共通する問題であり、今後、改善・解消されていくことが予想される。^{*5}

3.2 DDG 長寿債券

3.2.1 概要

Denuit, Devolder and Goderniaux (2007) は、対象コーホートの生存率を表す生存指数を作成し、その生存指数によりクーポンが変動する長寿債券を発行し、同額の固定利付債を購入することで生存率スワップを複製するような長寿債券スキームを提案した。この長寿債券は、発行体の長寿リスクをヘッジする発行型である。

このスキームでは、生存指数を契約者集団の構成などにより組み替えることにより、幅広い長寿リスクヘッジニーズに対して長寿債券の組成を行うことが出来ると考えられる。

3.2.2 スキーム

今、ある年金基金が時点 t において I_t 円を支払う年金を L_x 単位発行しているとする。ここで、 I_t は時点 $t = 0$ において x 歳のコーホートの時点 t における生存率 ${}_t p_x$ を表す生存指数である。

^{*4} Blake, Cairns and Dowd (2006) は、これらの問題点に対する対処や今後の展望も述べている。

^{*5} これらの問題点以外にも需要を得ることができなかった理由として、年金制度における法改正やマーケティングの失敗が指摘されている。

このとき、年金基金が抱えている長寿リスクは、

$$L_x(I_t - {}_t p_x^{\text{ref}}) \tag{15}$$

という生存指数 I_t と参照生存率 ${}_t p_x^{\text{ref}}$ の乖離で表される。

そこで、長寿リスクをヘッジするために、発行体として専用に設立された SPC、オリジネーターとして年金基金が参加し、主に以下の3つの取引によって構成されるスキーム(図3)を用いて満期 T 年、額面1円、時点 t におけるクーポンが K_t 円の DDG 長寿債券を N_x 単位発行する。

1. 投資家と SPC との間の長寿債券
2. SPC と固定利付債発行体との間の固定利付債
3. SPC と年金基金との間のトータルリターンズワップ

ここで、1の投資家と SPC との間の長寿債券は、投資家が購入代金 B 円を SPC に支払い、SPC が各期変動する $K_t N_x$ 円をクーポンとして、満期には N_x 円を元本として投資家に支払うという取引である。

2の SPC と固定利付債発行体との間の固定利付債は、SPC 長寿債券の売却代金 B 円を用いて満期 T 年、額面1円、時点 t におけるクーポンが k 円の固定利付債を N_x 単位購入し、固定利付債発行体がクーポンおよび元本を支払う取引である。

3の SPC と年金基金との間のトータルリターンズワップは、SPC が2の取引による運用収益 k 円を年金基金に支払い、年金基金が K_t 円を SPC に支払う取引である。

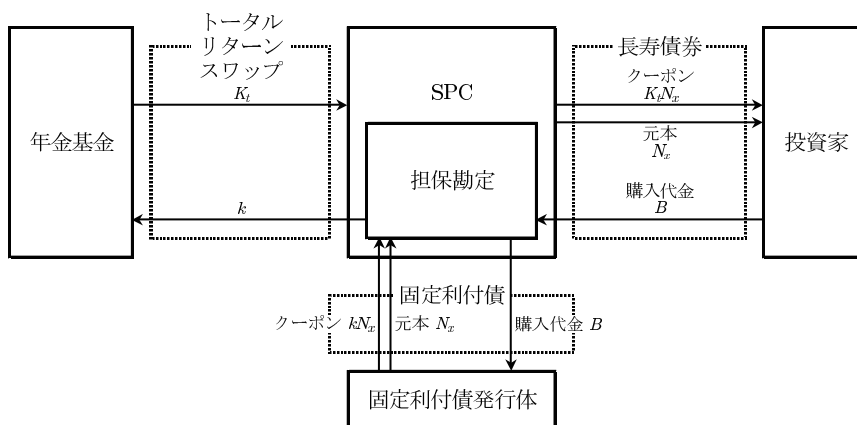


図3 DDG 長寿債券スキーム

以上のヘッジスキームによる、キャッシュフローが時点 t によらず一定の $-N_x k^*$ であると仮定すると、この DDG 長寿債券を利用したヘッジスキームによるキャッシュフローは表1のように表される。

表1 DDG 長寿債券を利用したヘッジスキームによるキャッシュフロー

	$t = 0$	$1 \leq t \leq T - 1$	$t = T$
長寿リスク	0	$-L_x(I_t - {}_t p_x^{\text{ref}})$	
長寿債券	B	$-N_x K_t$	$-N_x(1 + K_t)$
固定利付債	$-B$	$N_x k$	$N_x(1 + k)$
長寿リスク + 長寿債券 + 固定利付債	0	$-N_x k^* = -(L_x(I_t - {}_t p_x^{\text{ref}}) + N_x(K_t - k))$	

つまり、表1より、DDG 長寿債券を利用したヘッジスキームは変動する $L_x(I_t - {}_t p_x^{\text{ref}})$ を受け、固定の $N_x k^*$ を支払うトータルリターンズワップを複製していると考えられる。

3.2.3 クーポン

前述のスキームを成立させるためには、DDG 長寿債券のクーポン K_t は、

$$-L_x(I_t - {}_t p_x^{\text{ref}}) - N_x(K_t - k) = -N_x k^* \quad (16)$$

を満たすように設定されなければならない。このとき、 $-N_x k^*$ は時点 t によらず一定であるため長寿リスクはヘッジされているといえる。

さらに、 $N_x = L_x/k$ と仮定すると、 K_t は

$$K_t = k(1 + {}_t p_x^{\text{ref}} - I_t) + k^* \quad (17)$$

と表すことができる。ここで、 k^* は固定クーポンに対する長寿債券クーポンのプレミアムであるといえる。この k^* は以下のように固定利付債と長寿債券の現在価値を一致させるように決定される。ここで、 $E^Q[K_t]$ はリスク中立確率の下での K_t の期待値を表し、 $P(0, t)$ は満期 t に 1 のペイオフを生む割引債の現在価値を表す。

$$\begin{aligned} k \sum_{t=1}^T P(0, t) &= \sum_{t=1}^T E^Q[K_t] P(0, t) \\ &= \sum_{t=1}^T (k(1 + {}_t p_x^{\text{ref}} - E^Q[I_t]) + k^*) P(0, t) \end{aligned} \quad (18)$$

よって、 k^* は

$$k^* = \frac{k \sum_{t=1}^T P(0, t)(E^Q[I_t] - {}_t p_x^{\text{ref}})}{\sum_{t=1}^T P(0, t)} \quad (19)$$

で得られる。

4 長寿債券の評価

従来の頻度論による Lee-Carter モデルの適用ではパラメータの関係が複雑であることから、将来死亡率の予測誤差を過小評価することが問題とされてきた。本稿では、パラメータの不確実性に対処するため、ベイズ法の枠組みの中で将来生存率の予測を行い*6、同様の枠組みの中で DDG 長寿債券に対する評価を行う。そこで、本節では、ベイズ法による長寿債券の評価について説明を行う。

4.1 評価の流れ

本稿では、以下の流れでベイズ法の枠組みの中での長寿債券の評価を行う。

1. ベイズ法によるモデリング
2. MCMC 法によるサンプリング
3. 将来生存率の予測
4. リスク中立化
5. クーポンの算出
6. プライシング

以下では、2 以外の各項について説明を行う。2 については付録を参照されたい。

*6 Czado, Delwarde and Denuit (2005), Pedroza (2006) および橘川・小暮・倉知 (2008) はベイズ法の枠組みの中での Lee-Carter モデルによる分析を提案している。また、Dowd et al. (2008) はバックテストの結果、ベイズ法を用いてパラメータの不確実性を予測に取り込むことを支持している。

4.2 ベイズ法によるモデリング

4.2.1 状態空間モデル

従来、Lee-Carter モデルにはさまざまな修正、拡張が行われてきたが、Kogure, Kitsukawa and Kurachi (2009) および Dowd et al. (2008) の結果によると、対数観察死亡率 y_{xt} に対する回帰モデルとして式 (9) で表される正規モデルを、暦年効果 κ_t に対する時系列モデルとして式 (12) で表される確率的トレンドモデルを採用した結果が最もデータから支持されると考えられる。

そこで本稿では、正規モデルと確率的トレンドモデルの組み合わせを採用する。

正規モデルと確率的トレンドモデルを採用した Lee-Carter モデルは状態空間モデル

$$\text{観測方程式: } \mathbf{y}_t = \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}\kappa_t + \boldsymbol{\epsilon}_t, \quad \boldsymbol{\epsilon}_t \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} N_M(\mathbf{0}, \sigma_\epsilon^2 \mathbf{I}_M) \quad (20)$$

$$\text{遷移方程式: } \kappa_t = \lambda + \kappa_{t-1} + \omega_t, \quad \omega_t \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} N(0, \sigma_\omega^2) \quad (21)$$

として表すことができる。^{*7}ここで、 $\mathbf{y}_t \equiv (y_{x_{\min}t}, \dots, y_{x_{\max}t})'$ 、 $\boldsymbol{\alpha} \equiv (\alpha_{x_{\min}}, \dots, \alpha_{x_{\max}})'$ 、 $\boldsymbol{\beta} \equiv (\beta_{x_{\min}}, \dots, \beta_{x_{\max}})'$ 、 $\boldsymbol{\epsilon}_t \equiv (\epsilon_{x_{\min}t}, \dots, \epsilon_{x_{\max}t})'$ である。また、 $L \equiv t_{\max} - t_{\min} + 1$ 、 $M \equiv x_{\max} - x_{\min} + 1$ であり、 \mathbf{I}_M は $M \times M$ の単位行列である。

以上より、式 (20) および式 (21) で表される状態空間モデルの尤度関数は

$$\begin{aligned} \ell(\mathbf{y}|\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\kappa}, \lambda, \sigma_\epsilon^2, \sigma_\omega^2) &= \prod_t \prod_x f(y_{xt}|\alpha_x, \beta_x, \kappa_t, \sigma_\epsilon^2) \\ &\propto \left(\frac{1}{\sigma_\epsilon}\right)^{LM} \exp\left\{-\frac{\sum_t \sum_x (y_{xt} - (\alpha_x + \beta_x \kappa_t))^2}{2\sigma_\epsilon^2}\right\} \end{aligned} \quad (22)$$

と記述される。

4.2.2 事前分布

観測方程式のパラメータ $\boldsymbol{\alpha}$ および $\boldsymbol{\beta}$ の事前分布としてそれぞれ多変量正規分布

$$\boldsymbol{\alpha} \sim N_M(\mathbf{0}_M, \sigma_\alpha^2 \mathbf{I}_M), \quad \boldsymbol{\beta} \sim N_M((1/M)\mathbf{1}_M, \sigma_\beta^2 \mathbf{I}_M)$$

を設定する。ここで、 $\mathbf{0}_M$ および $\mathbf{1}_M$ はそれぞれ要素が 0 および 1 のみからなる M 次元ベクトルである。また、 σ_ϵ^2 の事前分布は

$$\sigma_\epsilon^2 \sim IG(a_\epsilon, b_\epsilon)$$

と設定する。

遷移方程式のパラメータ λ の事前分布は

$$\lambda \sim N(\lambda_0, \sigma_\lambda^2)$$

と設定する。

また、 $\kappa_{t_{\min}}$ の事前分布として

$$\kappa_{t_{\min}} \sim N(a, R)$$

を設定する。

σ_ω^2 の事前分布は

$$\sigma_\omega^2 \sim IG(a_\omega, b_\omega)$$

^{*7} Pedroza (2006) を参照。

と設定する。

以上のうち、 σ_α^2 , σ_β^2 , a_ϵ , b_ϵ , λ_0 , σ_λ^2 , a , R , a_ω および b_ω はハイパーパラメータである。以後、 $H = (\sigma_\alpha^2, \sigma_\beta^2, a_\epsilon, b_\epsilon, \lambda_0, \sigma_\lambda^2, a, R, a_\omega, b_\omega)$ とする。それぞれのハイパーパラメータの設定方法を表2に示す。ここで、 $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, $\hat{\kappa}$ は頻度論による最尤推定値、 $\hat{\sigma}_\epsilon^2$ は $y_{xt} - (\hat{\alpha}_x + \hat{\beta}_x \hat{\kappa}_t)$ の標本分散とする。

表2 ハイパーパラメータの設定方法

ハイパーパラメータ	設定方法
観測方程式	
σ_α^2	$\hat{\alpha}_x$ の標本分散
σ_β^2	$\hat{\beta}_x$ の標本分散
a_ϵ	2.1* ⁸
b_ϵ	$(a_\epsilon - 1)\hat{\sigma}_\epsilon^2$
遷移方程式	
λ_0	$(\hat{\kappa}_t - \hat{\kappa}_{t-1})$ の標本平均
σ_λ^2	$(\hat{\kappa}_t - \hat{\kappa}_{t-1})$ の標本分散 / L
a	$\hat{\kappa}_{t_{\min}}$
R	$\hat{\kappa}_t$ の標本分散
a_ω	2.1
b_ω	$(a_\omega - 1)\{(\hat{\kappa}_t - \hat{\kappa}_{t-1}) \text{ の標本分散 } \}$

4.2.3 事後分布

観測方程式のパラメータ α_x の事後分布は以下の正規分布に従う。

$$\alpha_x | \mathbf{y}, \boldsymbol{\alpha}_{-x}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\kappa}, \lambda, \sigma_\epsilon^2, \sigma_\omega^2, \mathbf{H} \sim N(\mu_{\alpha_x}^*, \sigma_{\alpha_x}^{2*})$$

ここで、 $\boldsymbol{\alpha}_{-x} \equiv (\alpha_{x_{\min}}, \alpha_{x_{\min}+1}, \dots, \alpha_{x-1}, \alpha_{x+1}, \dots, \alpha_{x_{\max}-1}, \alpha_{x_{\max}})'$ であり、 $\mu_{\alpha_x}^*$ および $\sigma_{\alpha_x}^{2*}$ は、

$$\mu_{\alpha_x}^* = \frac{\sigma_\alpha^2}{\sigma_\alpha^2 L + \sigma_\epsilon^2} \sum_t (y_{xt} - \beta_x \kappa_t), \quad \sigma_{\alpha_x}^{2*} = \sqrt{\frac{\sigma_\alpha^2 \sigma_\epsilon^2}{\sigma_\alpha^2 L + \sigma_\epsilon^2}}$$

である。

β_x の事後分布は以下の正規分布に従う。

$$\beta_x | \mathbf{y}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}_{-x}, \boldsymbol{\kappa}, \lambda, \sigma_\epsilon^2, \sigma_\omega^2, \mathbf{H} \sim N(\mu_{\beta_x}^*, \sigma_{\beta_x}^{2*})$$

ここで、 $\boldsymbol{\beta}_{-x} \equiv (\beta_{x_{\min}}, \beta_{x_{\min}+1}, \dots, \beta_{x-1}, \beta_{x+1}, \dots, \beta_{x_{\max}-1}, \beta_{x_{\max}})'$ であり、 $\mu_{\beta_x}^*$ および $\sigma_{\beta_x}^{2*}$ は、

$$\mu_{\beta_x}^* = \frac{\sigma_\beta^2 \sum_t (y_{xt} - \alpha_x) \kappa_t + \sigma_\epsilon^2 / M}{\sigma_\beta^2 \sum_t \kappa_t^2 + \sigma_\epsilon^2}, \quad \sigma_{\beta_x}^{2*} = \sqrt{\frac{\sigma_\beta^2 \sigma_\epsilon^2}{\sigma_\beta^2 \sum_t \kappa_t^2 + \sigma_\epsilon^2}}$$

である。

また、 σ_ϵ^2 の事後分布は以下の逆ガンマ分布に従う。

$$\sigma_\epsilon^2 | \mathbf{y}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\kappa}, \lambda, \sigma_\omega^2, \mathbf{H} \sim IG(a_\epsilon^*, b_\epsilon^*)$$

*⁸ 事前分布を漠然とするためにこのように設定した。

ここで、 a_ϵ^* および b_ϵ^* は、

$$a_\epsilon^* = a_\epsilon + \frac{LM}{2}, \quad b_\epsilon^* = b_\epsilon + \frac{1}{2} \sum_t \sum_x ((y_{xt} - (\alpha_x + \beta_x \kappa_t))^2)$$

である。

遷移方程式のパラメータ κ_t の事後分布は以下の正規分布に従う。

$$\kappa_t | \mathbf{y}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\kappa}_{t+}, \lambda, \sigma_\epsilon^2, \sigma_\omega^2, \mathbf{H} \sim N(\mu_{\kappa_t}^*, \sigma_{\kappa_t}^{2*})$$

ここで、 $\boldsymbol{\kappa}_{t+} \equiv (\kappa_{t+1}, \kappa_{t+2}, \dots, \kappa_{t_{\max}-1}, \kappa_{t_{\max}})'$ であり、 $\mu_{\kappa_t}^*$ および $\sigma_{\kappa_t}^{2*}$ は、

$$\mu_{\kappa_t}^* = \mu_{\kappa_t} + \frac{\sigma_{\kappa_t}^2 (\kappa_{t+1} - (\lambda + \mu_{\kappa_t}))}{\sigma_\omega^2 + \sigma_{\kappa_t}^2}, \quad \sigma_{\kappa_t}^{2*} = \sqrt{\sigma_{\kappa_t}^2 - \frac{(\sigma_{\kappa_t}^2)^2}{\sigma_\omega^2 + \sigma_{\kappa_t}^2}}$$

である。ただし、 μ_{κ_t} および σ_{κ_t} は、

$$\mu_{\kappa_t} = \lambda + \mu_{\kappa_{t-1}} + \frac{(\sigma_\omega^2 + \sigma_{\kappa_{t-1}}^2) \sum_x (y_{xt} - (\alpha_x + \beta_x (\lambda + \mu_{\kappa_{t-1}}))) \beta_x}{\sigma_\epsilon^2 + (\sigma_\omega^2 + \sigma_{\kappa_{t-1}}^2) \sum_x \beta_x^2}$$

$$\sigma_{\kappa_t} = \sqrt{\sigma_\omega^2 + \sigma_{\kappa_{t-1}}^2 - \frac{(\sigma_\omega^2 + \sigma_{\kappa_{t-1}}^2)^2 \sum_x \beta_x^2}{\sigma_\epsilon^2 + (\sigma_\omega^2 + \sigma_{\kappa_{t-1}}^2) \sum_x \beta_x^2}}$$

である。なお、 κ_t の事後分布はカルマンフィルタを用いて導出を行った。^{*9}

λ の事後分布は以下の正規分布に従う。

$$\lambda | \mathbf{y}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\kappa}, \sigma_\epsilon^2, \sigma_\omega^2, \mathbf{H} \sim N(\mu_\lambda^*, \sigma_\lambda^{2*})$$

ここで、 μ_λ^* および σ_λ^{2*} は、

$$\mu_\lambda^* = \frac{\sigma_\omega^2 \lambda_0 + \sigma_\lambda^2 \sum_{t=t_{\min}+1}^{t_{\max}} (\kappa_t - \kappa_{t-1})}{\sigma_\lambda^2 (L-1) + \sigma_\omega^2}, \quad \sigma_\lambda^{2*} = \sqrt{\frac{\sigma_\lambda^2 \sigma_\omega^2}{\sigma_\lambda^2 (L-1) + \sigma_\omega^2}}$$

である。

また、 σ_ω^2 の事後分布は以下の逆ガンマ分布に従う。

$$\sigma_\omega^2 | \mathbf{y}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\kappa}, \lambda, \sigma_\epsilon^2, \mathbf{H} \sim IG(a_\omega^*, b_\omega^*)$$

ここで、 a_ω^* および b_ω^* は、

$$a_\omega^* = a_\omega + \frac{L-1}{2}, \quad b_\omega^* = b_\omega + \frac{1}{2} \sum_{t=t_{\min}+1}^{t_{\max}} (\kappa_t - (\lambda + \kappa_{t-1}))^2$$

である。

以上に示された事後分布からギブスサンプリングを行う。

4.3 将来生存率の予測

$\mathbf{y}_+ = (\mathbf{y}_{t_{\max}+1}, \mathbf{y}_{t_{\max}+2}, \dots, \mathbf{y}_{t_{\max}+F})$ を F 期先までの将来の \mathbf{y} とする。パラメータ $\boldsymbol{\theta}$ が与えられたとき、 \mathbf{y}_+ と \mathbf{y} は独立に分布することより、将来対数死亡率の事後予測分布は、

$$f(\mathbf{y}_+ | \mathbf{y}) = \int f(\mathbf{y}_+ | \boldsymbol{\theta}, \mathbf{y}) f(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y}) d\boldsymbol{\theta} = \int f(\mathbf{y}_+ | \boldsymbol{\theta}) f(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y}) d\boldsymbol{\theta} \tag{23}$$

と与えられる。ここで得られた予測将来対数死亡率を用いて、将来生存率の予測を行う。

^{*9} カルマンフィルタによる κ_t の事後分布の導出については付録を参照されたい。

4.4 リスク中立化

前述の通り，DDG 長寿債券のクーポン K_t は式 (17) のように決定される．このとき，固定クーポンに対する長寿債券クーポンのプレミアム k^* は式 (19) に基づき算出される．しかし， k^* を算出するにあたり， $E^Q[I_t]$ の評価を行う必要がある．そこで本稿では，Stutzer (1996) によって提案された情報理論の最大エントロピー原理に基づいたリスク中立化手法を用いて，MCMC 法による予測将来生存率 ${}_t p_x^{\text{prosp}}$ のリスク中立期待値 $E^Q[{}_t p_x^{\text{prosp}}]$ を評価することによって $E^Q[I_t]$ の評価を行う．

まず，単純年金^{*10}の市場価格 a_x^{mkt} に対して N 本の MCMC パスについて単純年金の価格 $a_x^{(i)}$ を次のように定義する．

$$a_x^{(i)} = \sum_{t=1}^T {}_t p_x^{\text{prosp}(i)} P(0, t), \quad i = 1, \dots, N \quad (24)$$

ここで， ${}_t p_x^{\text{prosp}(i)}$ は i 番目の MCMC パス上の予測将来生存率である．

また，単純年金の市場価格 a_x^{mkt} は，例えば

$$a_x^{\text{mkt}} = \sum_{t=1}^T {}_t p_x^{\text{mkt}} P(0, t) \quad (25)$$

として算出することが出来る．ここで， ${}_t p_x^{\text{mkt}}$ は現在の市場における将来生存率の評価値である．^{*11}

i 番目の MCMC パスの観測確率を $\pi^{(i)}$ ，リスク中立確率を $\pi^{*(i)}$ とすると，リスク中立確率の推定値 $\hat{\pi}^{*(i)}$ は以下の最適化問題を解くことによって得られる．

$$\begin{aligned} \hat{\pi}^* &= \arg \min_{\pi^{*(i)} > 0, \sum_i \pi^{*(i)} = 1} I(\pi^*, \pi) = \sum_{i=1}^N \pi^{*(i)} \ln \left(\frac{\pi^{*(i)}}{\pi^{(i)}} \right) \\ & \text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^N \pi^{*(i)} a_x^{(i)} = a_x^{\text{mkt}} \end{aligned} \quad (26)$$

式 (26) の最適化問題は，リスク中立の制約式の下で観測確率 $\pi^{(i)}$ とリスク中立確率 $\pi^{*(i)}$ の間のカルバック・ライブラーの距離を最小化しているといえる．また，ここで，ラグランジュの未定乗数法を用いることで，以下のギブスカノニカル分布

$$\hat{\pi}^{*(i)} = \frac{\pi^{(i)} \exp \left\{ \gamma^* a_x^{(i)} \right\}}{\sum_i \pi^{(i)} \exp \left\{ \gamma^* a_x^{(i)} \right\}}, \quad i = 1, \dots, N \quad (27)$$

$$\gamma^* = \arg \min_{\gamma} \sum_{i=1}^N \pi^{(i)} \exp \left\{ \gamma \left(a_x^{(i)} - a_x^{\text{mkt}} \right) \right\}$$

で表すことができる．よって，予測将来生存率のリスク中立期待値 $E^Q[{}_t p_x^{\text{prosp}}]$ は

$$E^Q[I_t] = E^Q[{}_t p_x^{\text{prosp}}] = \sum_{i=1}^N \hat{\pi}^{*(i)} {}_t p_x^{\text{prosp}(i)} \quad (28)$$

と計算される．

^{*10} 単純年金とは，満期である T 年後まで毎年の生存者に対して 1 円が支払われる年金である．

^{*11} ${}_t p_x^{\text{mkt}}$ として何を用いるかという点は議論の余地があるが，例えば年金開始後標準生命表より算出した生存率を用いることが考えられる．

4.5 クーポンの算出

リスク中立化によって MCMC 法による予測将来生存率のリスク中立期待値 $E^Q[{}_t p_x^{\text{prosp}}]$ は式 (28) のように導出された。よって、式 (17)、式 (19) および式 (28) より、DDG 長寿債券のクーポン K_t は、

$$K_t = k \left((1 + {}_t p_x^{\text{ref}} - I_t) + \frac{\sum_{t=1}^T P(0, t) (\sum_{i=1}^N \hat{\pi}^{*(i)} {}_t p_x^{\text{prosp}(i)} - {}_t p_x^{\text{ref}})}{\sum_{t=1}^T P(0, t)} \right) \quad (29)$$

として求められる。

4.6 プライシング

i 番目の MCMC パスにおける長寿債券の現在価値 $P_{SB}^{(i)}$ は、

$$\begin{aligned} P_{SB}^{(i)} &= \sum_{t=1}^{T-1} K_t^{(i)} P(0, t) + (1 + K_T^{(i)}) P(0, T) \\ &= \sum_{t=1}^{T-1} \left(k \left(1 + {}_t p_x^{\text{ref}} - {}_t p_x^{\text{prosp}(i)} \right) + \frac{k \sum_{t=1}^T P(0, t) (E^Q[{}_t p_x^{\text{prosp}}] - {}_t p_x^{\text{ref}})}{\sum_{t=1}^T P(0, t)} \right) P(0, t) \\ &\quad + \left(1 + \left(k \left(1 + T p_x^{\text{ref}} - T p_x^{\text{prosp}(i)} \right) + \frac{k \sum_{t=1}^T P(0, t) (E^Q[{}_t p_x^{\text{prosp}}] - {}_t p_x^{\text{ref}})}{\sum_{t=1}^T P(0, t)} \right) \right) P(0, T) \end{aligned} \quad (30)$$

と表される。ここで $K_t^{(i)}$ は i 番目の MCMC パス上での時点 t における長寿債券のクーポンである。

よって、本稿の評価手法による長寿債券のリスク中立期待現在価値 P_{SB} は

$$P_{SB} = \sum_{i=1}^N \hat{\pi}^{*(i)} P_{SB}^{(i)} = \sum_{i=1}^N \hat{\pi}^{*(i)} \left(\sum_{t=1}^{T-1} K_t^{(i)} P(0, t) + (1 + K_T^{(i)}) P(0, T) \right) \quad (31)$$

と計算される。

5 数値例

本節では、本稿の長寿債券評価手法を用いた数値例を紹介する。

5.1 設定

本節では以下の設定の下で、DDG 長寿債券の評価を行う。

- 対象コーホートは 2005 年に 65 歳の日本人（男性と女性の 2 ケース）
- 満期 $T = 30$
- 額面 $F = 100$ 円
- 割引率 $r = 0.015$, $P(0, t) = \frac{1}{(1+r)^t}$
- 固定利付債クーポン $k = 0.020$

なお、各 MCMC パスの観測確率 $\pi^{(i)}$ は $\frac{1}{N}$ とした。

5.2 データ

わが国の人口及び死亡数データとしては、男性、女性共に国勢調査及び人口動態統計から採取した 65 歳から 98 歳の 1970 年から 2005 年までのデータを用いた。参照生存率 ${}_t p_x^{\text{ref}}$ は 2005 年のデータより各年齢の生存

率を基に算出した。また、将来生存率の市場評価値 $t p_x^{\text{mkt}}$ は 2007 年の年金開始後用標準生命表のデータより各年齢の生存率を基に算出した。

5.3 結果

5.3.1 MCMC サンプルング結果

MCMC 法により、25000 ステップのパラメータに対するサンプルングを行い、最初の 5000 ステップは初期値に依存する期間 (burn-in 期間) として捨て、それ以降の 20000 ステップを用いた。

図 4 は α_{65} , β_{65} , κ_{1970} および κ_{2005} の MCMC ステップの標本経路を示している。また、それぞれの、事後平均、事後標準偏差、95% 事後最高密度区間 (HPD) および Geweke の収束診断結果 (p 値) を表 3 にまとめた。図 4 および表 3 より、標本経路は安定的であると観察され、Geweke の収束診断も有意水準 5% で帰無仮説が採択され収束していないとはいえないという結果を示していることから最初の 5000 ステップを捨てた後の 20000 ステップは不変分布に収束しているといえる。

また、表 3 の結果はハイパーパラメータの変化に対しても安定的であった。

図 5 は α_{65} , β_{65} , κ_{1970} および κ_{2005} の標本自己相関関数を示しており、標本自己相関関数が急速に減少していることから効率的にサンプルングが行われたといえる。このことは表 3 より、非効率性因子がほぼ 1 であることから支持される。

なお、図 6 は κ_t の平均値の推移を示している。

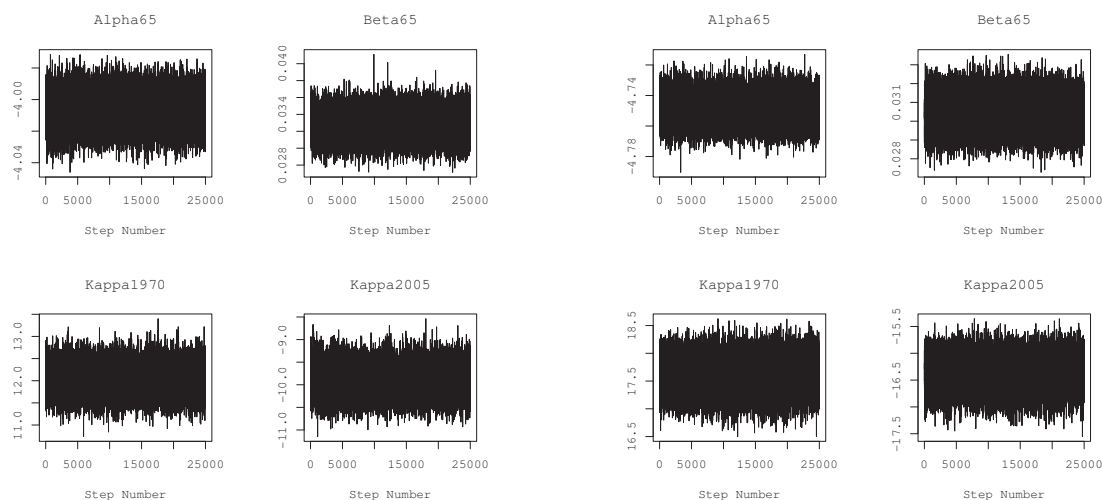


図 4 MCMC ステップの軌跡 (左図：男性 右図：女性)

表3 事後平均, 事後標準偏差, 95% 事後最高密度区間 (HPD), Geweke の収束診断 (p 値) および非効率性因子 (IF)

	事後平均	事後標準偏差	95%HPD	Geweke	IF
男性					
α_{65}	-4.0069	0.0099	(-4.0258, -3.9873)	0.73	1.1
β_{65}	0.0328	0.0015	(0.0297, 0.0357)	0.38	1.1
κ_{1970}	12.0299	0.3043	(11.4367, 12.6285)	0.24	1.3
κ_{2005}	-9.8976	0.2981	(-10.5010, -9.3299)	0.44	1.3
女性					
α_{65}	-4.7485	0.0088	(-4.7658, -4.7317)	0.25	1.1
β_{65}	0.0304	0.0008	(0.0288, 0.0321)	0.34	1.1
κ_{1970}	17.5963	0.2821	(17.0522, 18.1642)	0.36	1.2
κ_{2005}	-16.4019	0.2802	(-16.9471, -15.8578)	0.21	1.1

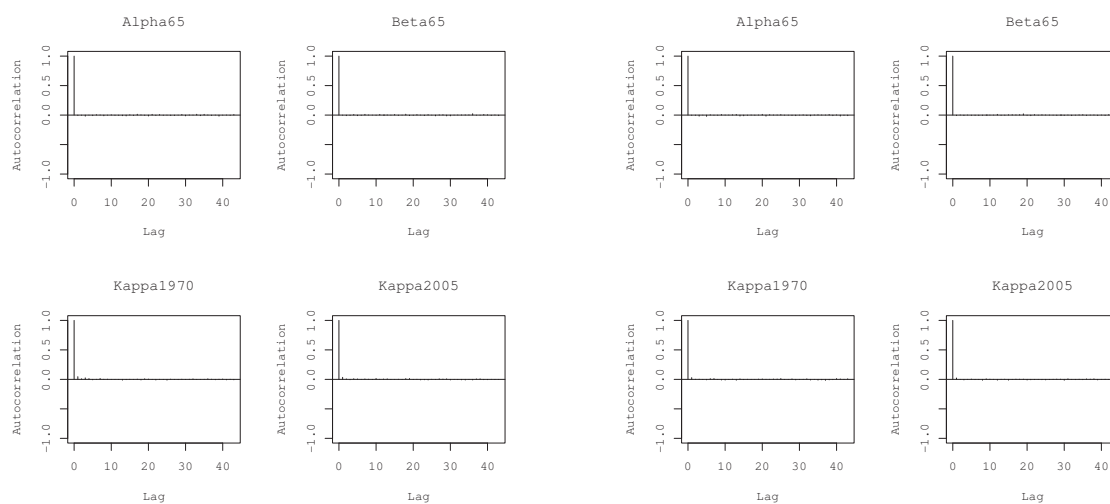


図5 標本自己相関関数 (左図: 男性 右図: 女性)

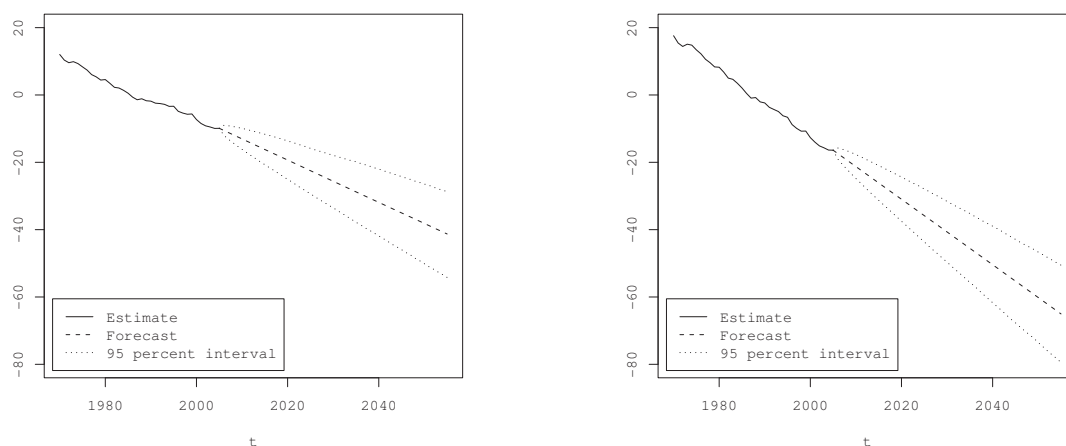


図6 κ_t の平均値の推移 (左図: 男性 右図: 女性)

5.3.2 プライシングの結果

長寿指数のリスク中立期待値 $E^Q[I_t] = E^Q[{}_tP_{65}^{\text{PROSP}}]$ の推移は図7のように得られた。図7より、すべての時点 t において長寿指数のリスク中立期待値 $E^Q[I_t]$ が参照生存率 ${}_tP_{65}^{\text{ref}}$ を上回っていることが観察される。

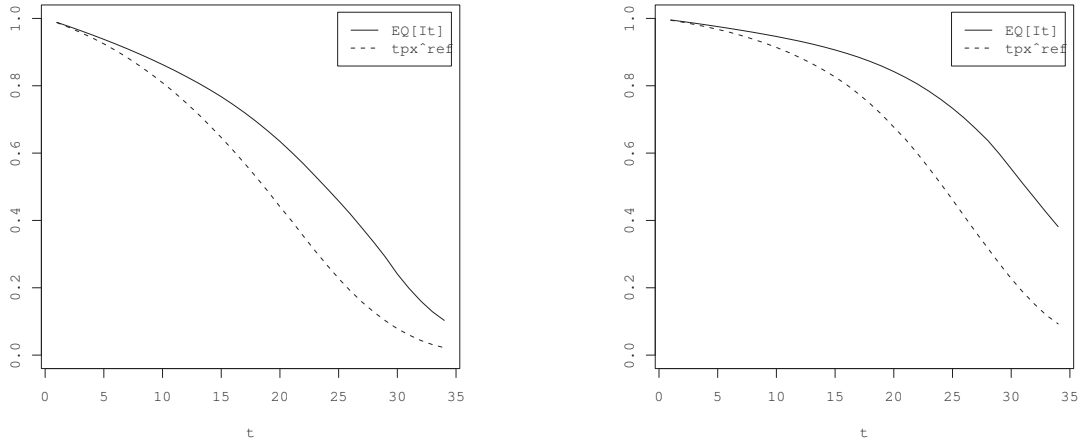


図7 $E^Q[I_t]$ の推移 (左図：男性 右図：女性)

そして、プライシングの結果、現在価値の分布として図8およびその基礎統計量として表4の結果を得た。特に、女性の場合の方が男性の場合に比べ分散が小さく、現在価値の分布が左に偏っている。これは、今回の設定では元来男性に比べて長寿である女性について生存率の改善の余地が少ないことが影響しているものと考えられる。また、リスク中立化によりリスク中立確率の下での現在価値の分布が実現確率の下での現在価値の分布に比べ左に偏っていることが確認できる。なお、DDG 長寿債券の価格と固定利付債の価格が一致するように k^* が算出されているため、今回の設定の下での DDG 長寿債券のリスク中立期待現在価値 P_{SB} は男性および女性のケースとも 112.008 円である。

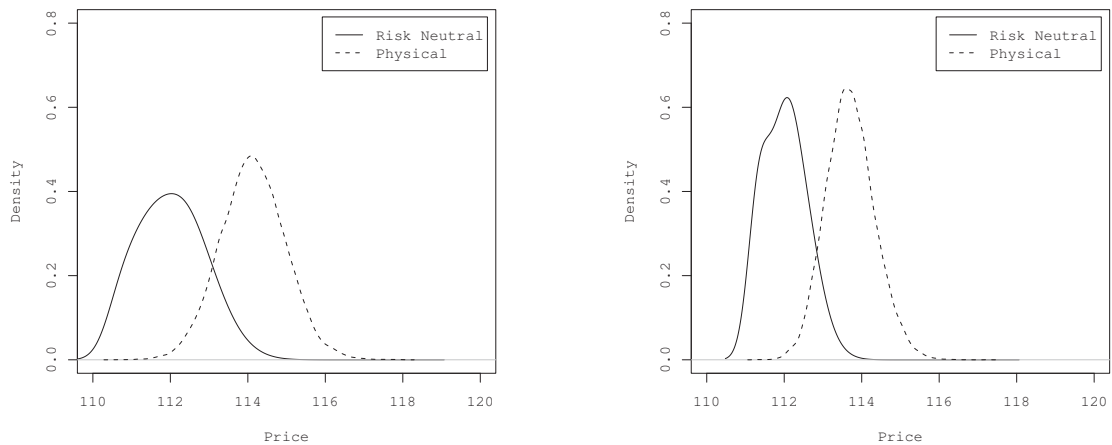


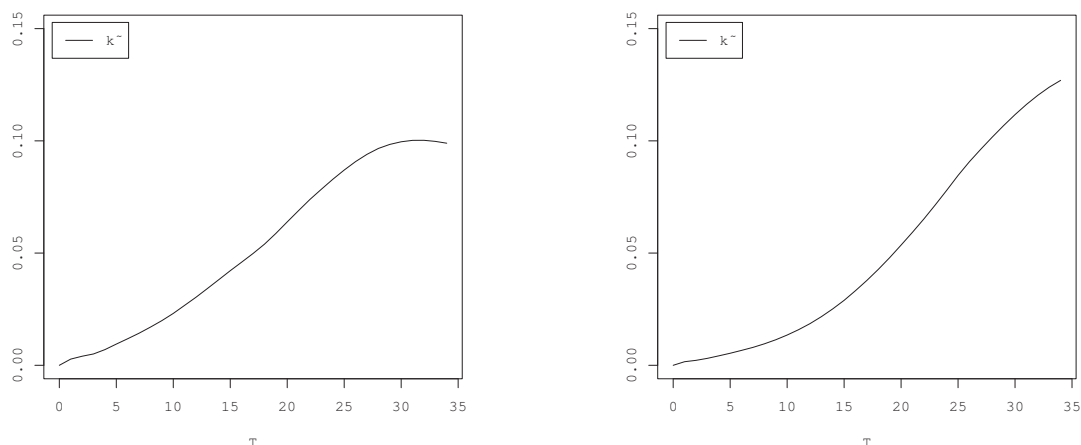
図8 長寿債券現在価値の分布 (左図：男性 右図：女性)

また、 $\tilde{k} = k^*/k$ とおくと、相対プレミアム \tilde{k} の満期 T に対する推移は図9のようになる。図9より、相対

表4 長寿債券現在価値の基本統計量

	平均	標準偏差	歪度	尖度	VaR95%	VaR99%
男性						
リスク中立分布	112.008	0.850	0.249	2.508	110.854	110.597
実現分布	114.133	0.844	0.075	3.242	112.761	112.188
女性						
リスク中立分布	112.008	0.531	0.363	2.514	111.351	111.291
実現分布	113.710	0.633	0.234	3.214	112.709	112.315

プレミアム \tilde{k} は満期の長期化と共に増加するが、超長期の満期になると減少に転じる傾向が見られる。この点は Denuit, Devolder and Goderniaux (2007) と整合的であり、生存率の改善が割引率を下回るために生じると考えられる。しかし、手法が異なるため直接の比較を行うことは出来ないが、男性の場合について検証を行った Denuit, Devolder and Goderniaux (2007) における相対プレミアム \tilde{k} が最大でも 5% 程度だったのに対して、本稿の結果では、男性では最大で 10% 程度、女性はそれ以上という 2 倍以上の値となっている。この点は、わが国の高齢層における生存率の改善が大きいことが影響しており、わが国における長寿債券の発行は他国と比べて高コストとなることが示唆されることが示されている。

図9 \tilde{k} の推移 (左図：男性 右図：女性)

6 おわりに

本稿では、ベイズ法によるアプローチを用いてモデル推定、将来生存率の予測、長寿リスク評価および長寿債券の評価を一貫した枠組みで行う評価手法を提案した。また、数値例を用いて本稿による評価手法によりわが国データの下で長寿債券のプライシングを行い、1) 通常の債券に対する長寿債券の相対プレミアム \tilde{k} は満期の長期化と共に増加するがその増分は逡減する、2) 女性の場合は生存率の改善の余地の少なさから、男性の場合に比べ価格の分布の分散が小さく、左に偏っている、3) わが国における長寿債券の発行は先行研究によるベルギーの例に比べ高コストになる可能性が示唆されることが示された。

今後の研究の課題としては、まず、生存率のジャンプのモデルへの取り込みが考えられる。本稿においては長寿リスクはある種の長期のトレンド的なリスクであるため、例えば災害や疫病などによる突発的であり短期的な生存率の低下については考慮を行わなかった。しかし、現実により即した結果を得るためには、そのよう

な考慮も行う必要があり、例えば Chen and Cox (2007) のように死亡率モデルである Lee-Carter モデルにジャンプ項を導入するような方法が考えられる。また、本稿では将来生存率の市場評価値 ${}_t p_x^{\text{mkt}}$ として年金開始後標準生命表より算出した生存率を用いたが、年金開始後標準生命表より算出した生存率が真に市場における将来生存率の評価値であるかという点については議論の余地があると考えられる。この他にも、他国のデータの下での長寿債券のプライシングを行い、わが国データの下での結果と比較を行うことも、わが国の長寿債券発行コストの水準を検証するために重要であろう。

2005年にCredit Swissによる長寿インデックスが発表されて以降いくつかの長寿インデックスが開発されるなど、欧米では長寿債券などの長寿リスクのヘッジを目的とする金融商品に大きな注目が集まっており、長寿リスク証券化商品への関心も高まっている。このような動きは、会計基準やリスク管理基準への対応から将来的にはわが国にも伝播し、わが国においても長寿債券が注目され、実際に発行されていくことが予想される。そして、わが国においてもその評価に関する議論が実務家、研究者の両面から活発になるであろう。そのとき、本稿が先行研究としてわが国における議論の活発化、ひいては長寿リスクの証券化商品の浸透・発展に多少なりとも寄与することが出来ればと願っている。

参考文献

- [1] 大森裕浩 (2001), 「マルコフ連鎖モンテカルロ法の最近の展開」, 『日本統計学会誌』, **31**, 305–344.
- [2] 大森裕浩 (2005), 「マルコフ連鎖モンテカルロ法の基礎と統計科学への応用」 甘利・竹内・竹村・伊庭編『計算統計 II』: マルコフ連鎖モンテカルロ法とその周辺 (岩波書店) 所収.
- [3] 橋川研史, 小暮厚之, 倉知善行 (2008), 「長寿リスク評価のベイズ統計モデリング」, 『ジャリッパジャーナル』, **3**, 43–61.
- [4] 小暮厚之, 長谷川知弘 (2007a), 「将来生命表の構築」, 小暮編『リスクの科学』: 金融・保険リスクのモデル分析の (朝倉書店) 所収.
- [5] 小暮厚之, 長谷川知弘 (2007b), 「生命表の統計学」, 国友・山本編『21世紀の統計科学』Vol-I: 社会・経済と統計科学 (東京大学出版会) 所収.
- [6] Bauer, D., M. Boerger and J. Russ (2008), "On the Pricing of Longevity-Linked Securities," *The 4th International Longevity Risk and Capital Markets Solutions Conference*.
- [7] Blake, D., A. J. Cairns and K. Dowd (2006), "Living with Mortality: Longevity Bonds and Other Mortality-Linked Securities", *British Actuarial Journal*, **12**, 153–197.
- [8] Brouhns, N., M. Denuit and J. K. Vermunt (2002a), "A Poisson log-bilinear regression approach to the construction of projected lifetables," *Insurance: Mathematics and Economics*, **31**, 373–393.
- [9] Brouhns, N., M. Denuit and J. K. Vermunt (2002b), "Measuring the longevity risk in mortality projections," *Bulletin of the Swiss Association of Actuaries*, 105–130.
- [10] Cairns, A. J. G., D. Blake and K. Dowd (2006), "A Two-Factor Model for Stochastic Mortality With Parameter Uncertainty: Theory and Calibration," *Journal of Risk and Insurance*, **73**, 687–718.
- [11] Chen, H. and S. H. Cox (2007) "Modeling mortality with jumps: transitory effects and pricing implication to mortality securitization," *Journal of Risk and Insurance Conference*.
- [12] Czado, C., A. Delwarde and M. Denuit (2005), "Bayesian Poisson log-bilinear mortality projectios," *Insurance: Mathematics and Economics*, **36**, 260–284.
- [13] Denuit, M., P. Devolder and A. Goderniaux (2007), "Securitization of Longevity Risk: Pricing Survivor Bonds with Wang Transform in the Lee-Carter Framework," *Journal of Risk and Insurance*, **74**, 87–113.
- [14] Dowd, K., A. J. G. Cairns, D. Blake, G. D. Coughlan, D. Epstein, and M. K. Allah (2008), "Back-

- testing stochastic mortality models: An ex-post evaluation of multi-year-ahead density forecasts,” *The 4th International Longevity Risk and Capital Markets Solutions Conference*.
- [15] Foster, F. D. and C. H. Whiteman (2006), ”Bayesian Prediction, Entropy, and Option Pricing,” *Australian Journal of Management*, **31**, 181–206.
- [16] Geweke, J (2004), ”Getting It Right: Joint Distribution Tests of Posterior Simulators,” *Journal of the American Statistical Association*, **99**, 799–804
- [17] Kogure, A., K. Kitsukawa and Y. Kurachi (2009) ”A Bayesian Comparison of Models for Changing Mortalities toward Evaluating the Longevity Risk in Japan,” *Asia-Pacific Journal of Risk and Insurance*, **3(2)**, 1–21.
- [18] Kogure, A. and Y. Kurachi (2008), ”A Bayesian Approach to Pricing Longevity Risk: With Applications to Japanese Mortality Data,” *Submitted to Insurance, Mathematics and Economics*.
- [19] Lee, R.D. and L. R. Carter (1992), ”Modeling and forecasting U.S. mortality,” *Journal of the American Statistical Association*, **87**, 659–675.
- [20] Levantesi, S., M. Menzietti and T. Torri (2008), ”Longevity bond pricing models: and application to the Italian annuity market an pension schemes,” *The 18th Actuarial Approach for Financial Risks Colloquium*.
- [21] Pedroza, C. (2006), ”A Bayesian forecasting model: predicting U.S. male mortality,” *Biostatistics*, **7**, 530–550.
- [22] Renshaw, A. E., and S. Haberman (2003), ”Lee-Carter mortality forecasting with age specific enhancement,” *Insurance: Mathematics and Economics*, **33**, 255–272.
- [23] Sherris, M. and S. Wills (2008), ”Securitization, Structuring and Pricing of Longevity Risk,” Research Paper, UNSW Australian School of Business.
- [24] Stutzer, M. (1996), ”A simple nonparametric approach to derivative security valuation,” *The Journal of Finance*, **51**, 1633–1652.

付録 A MCMC 法によるサンプリング

本稿では、パラメータ β および κ については式 (11) の制約条件を満たすためにサンプリング中にいくつかの計算を行っている。それらの計算の手順は以下の通りである。

1. 事後分布よりギブスサンプリングを行い、 $\beta_{x^*}^{(i)}$ の値を $\beta_{x^*}^{(i+1)}$ へ、 $\kappa_{t^*}^{(i)}$ の値を $\kappa_{t^*}^{(i+1)}$ へと更新する。
2. $i = N$ までサンプリングを終えたら、 $\alpha_*^{(i)}$ 、 $\beta_*^{(i)}$ および $\kappa_*^{(i+1)}$ を以下のように変更する。

$$\beta^{(i)} = \frac{\beta_*^{(i)}}{\beta^{(i)}}, \quad \kappa^{(i)} = \beta^{(i)}(\kappa_*^{(i)} - \bar{\kappa}^{(i)}), \quad \alpha^{(i)} = \alpha_*^{(i)} + \beta_*^{(i)}\bar{\kappa}^{(i)} \quad (32)$$

ここで、 $\beta^{(i)}$ は

$$\beta^{(i)} = \sum_x \beta_{x^*}^{(i)} \quad (33)$$

であり、 $\bar{\kappa}^{(i)}$ は

$$\bar{\kappa}^{(i)} = \frac{1}{L} \sum_t \kappa_{t^*}^{(i)} \quad (34)$$

である。

付録 B カルマンフィルタによる事後分布の導出

κ_t の事後分布を導出するにあたり、カルマンフィルタを用いた逐次推定（フィルタリング）を行った。以下ではそれらの解説および κ_t の事後分布の導出を行う。

まず、時間更新アルゴリズムは、 $\kappa_{t-1}|\mathbf{y}^{t-1} \sim N(\mu_{\kappa_{t-1}}, \sigma_{\kappa_{t-1}}^2)$ とすると

$$\begin{aligned}\pi(\kappa_t|\mathbf{y}^{t-1}) &= \int \pi(\kappa_t, \kappa_{t-1}|\mathbf{y}^{t-1})d\kappa_{t-1} \\ &= \int \pi(\kappa_t|\kappa_{t-1}, \mathbf{y}^{t-1})\pi(\kappa_{t-1}|\mathbf{y}^{t-1})d\kappa_{t-1} \\ &= \int \pi(\kappa_t|\kappa_{t-1})\pi(\kappa_{t-1}|\mathbf{y}^{t-1})d\kappa_{t-1}\end{aligned}\quad (35)$$

で表される。

式 (21) より、 $\kappa_t|\kappa_{t-1} \sim N(\lambda + \kappa_{t-1}, \sigma_\omega^2)$ であるので、 $\kappa_t|\mathbf{y}^{t-1}$ は以下の正規分布に従う。

$$\kappa_t|\mathbf{y}^{t-1} \sim N(\lambda + \mu_{\kappa_{t-1}}, \sigma_\omega^2 + \sigma_{\kappa_{t-1}}^2)$$

また、観測更新アルゴリズムは

$$\pi(\kappa_t|\mathbf{y}^t) = \frac{\pi(\mathbf{y}_t|\kappa_t)\pi(\kappa_t|\mathbf{y}^{t-1})}{f(\mathbf{y}_t|\mathbf{y}^{t-1})}\quad (36)$$

で表される。そこで、

$$\begin{aligned}f(\mathbf{y}_t|\mathbf{y}^{t-1}) &= \int f(\mathbf{y}_t, \kappa_t|\mathbf{y}^{t-1})d\kappa_t \\ &= \int f(\mathbf{y}_t|\kappa_t)\pi(\kappa_t|\mathbf{y}^{t-1})d\kappa_t\end{aligned}\quad (37)$$

より

$$\mathbf{y}_t|\mathbf{y}^{t-1} \sim N_M(\boldsymbol{\alpha} + (\lambda + \mu_{\kappa_t})\boldsymbol{\beta}, (\sigma_\omega^2 + \sigma_{\kappa_{t-1}}^2)\boldsymbol{\beta}'\mathbf{I}_M\boldsymbol{\beta} + \sigma_\epsilon^2\mathbf{I}_M)$$

であるので、 $\kappa_t|\mathbf{y}^t$ は以下の正規分布に従う。

$$\kappa_t|\mathbf{y}^t \sim N(\mu_{\kappa_t}, \sigma_{\kappa_t}^2)$$

ここで、 μ_{κ_t} および σ_{κ_t} は、

$$\begin{aligned}\mu_{\kappa_t} &= \lambda + \mu_{\kappa_{t-1}} + \frac{(\sigma_\omega^2 + \sigma_{\kappa_{t-1}}^2) \sum_x (y_{xt} - (\alpha_x + \beta_x(\lambda + \mu_{\kappa_{t-1}})))\beta_x}{\sigma_\epsilon^2 + (\sigma_\omega^2 + \sigma_{\kappa_{t-1}}^2) \sum_x \beta_x^2} \\ \sigma_{\kappa_t} &= \sqrt{\sigma_\omega^2 + \sigma_{\kappa_{t-1}}^2 - \frac{(\sigma_\omega^2 + \sigma_{\kappa_{t-1}}^2)^2 \sum_x \beta_x^2}{\sigma_\epsilon^2 + (\sigma_\omega^2 + \sigma_{\kappa_{t-1}}^2) \sum_x \beta_x^2}}\end{aligned}$$

である。

以上の時間更新アルゴリズムおよび観測更新アルゴリズムを用いて逐次推定を行う。また、この逐次推定のアルゴリズムをカルマンフィルタという。

さらに、マルコフ性より、*12

$$\begin{aligned}\pi(\kappa_t|\kappa_{t+1}, \dots, \kappa_{t_{\max}}, \mathbf{y}) &= \pi(\kappa_t|\kappa_{t+1}, \mathbf{y}) \\ &= \pi(\kappa_t|\kappa_{t+1}, \mathbf{y}^t) \\ &= \frac{\pi(\kappa_{t+1}|\kappa_t, \mathbf{y}^t)\pi(\kappa_t|\mathbf{y}^t)}{\pi(\kappa_{t+1}|\mathbf{y}^t)}\end{aligned}\quad (38)$$

*12 $\mathbf{y}^{t_{\max}} = \mathbf{y}$ であるため、以降は \mathbf{y} と表記する。

となるため、 $\pi(\kappa_t | \kappa_{t+1}, \dots, \kappa_{t_{\max}}, \mathbf{y})$ は以下の正規分布に従う。

$$\kappa_t | \mathbf{y} \sim N(\mu_{\kappa_t}^*, \sigma_{\kappa_t}^{*2})$$

ここで、 $\mu_{\kappa_t}^*$ および $\sigma_{\kappa_t}^*$ は、

$$\mu_{\kappa_t}^* = \mu_{\kappa_t} + \frac{\sigma_{\kappa_t}^2 (\kappa_{t+1} - (\lambda + \mu_{\kappa_t}))}{\sigma_{\omega}^2 + \sigma_{\kappa_t}^2}, \quad \sigma_{\kappa_t}^* = \sqrt{\sigma_{\kappa_t}^2 - \frac{(\sigma_{\kappa_t}^2)^2}{\sigma_{\omega}^2 + \sigma_{\kappa_t}^2}}$$

である。

よって、逐次推定を行い、 $t = t_{\min}, \dots, t_{\max}$ について $\kappa_t | \mathbf{y}^t$ の分布を導出し、逐次推定により得た $\kappa_{t_{\max}} | \mathbf{y}$ の分布から、 $t = t_{\max} - 1, \dots, t_{\min}$ について $\kappa_t | \kappa_{t+1}, \dots, \kappa_{t_{\max}}, \mathbf{y}$ の事後分布を導出する。

Pricing for securitization products of longevity risk: evaluating under Bayesian approach

Yoshiyuki Kurachi* Atsuyuki Kogure†

Abstract

Pension funds have been concerned about longevity risk in recent years. Longevity risk is systematic risk which cannot be eliminated by risk pooling which is a conventional method for risk management in insurance practice. To deal with that of longevity risk, one promising way is to resort to financial markets to securitize longevity risk. However the existing research on pricing for securitized products of longevity risk (longevity bond) does not give enough consideration for the uncertainty in predicting future mortality rates. Then, in this paper, we proposed Bayesian pricing method for securitization products of longevity risk to be consistent with other Bayesian approaches to Lee-Carter methodology. And, we show numerical examples of Bayesian pricing for longevity bond, proposed by Denuit, Devolder and Goderniaux (2007), under Japanese mortality data.

Key words: Longevity bond, Longevity risk, Securitization, Bayesian approach, Markov-chain Monte Carlo (MCMC) method, Lee-Carter model, Maximum entropy principle, Risk-neutralized predictive distribution

* Graduate School of Economics, the University of Tokyo (now, Operations Division, Bank of Japan Kochi Branch) E-mail: kurachiy@d05.itscom.net

† Faculty of Policy Management, Keio University E-mail: kogure@sfc.keio.ac.jp