

研究論文

経済環境の不確実性を有する負債に対応する多期間動的最適化

門田 伸一*

2008年12月1日投稿

2009年9月3日受理

概要

2009年6月現在, わが国で採用されている会計基準において保険制度の負債として認識される金額は保険数理に基づく責任準備金額である. ただし, 剰余の安定性向上を意図するならば, International Association of Insurance Supervisors[2006] が掲げる ALM の要件でも要求されるように, 当該保険会社における投資戦略の構築に際しては, 保険数理に基づく責任準備金を参照するだけでなく, 保険契約の価値を保険事故発生率・利子率等計算基礎率の上に書かれるデリバティブとして評価し, ヘッジ戦略を実践することが望ましい. 保険契約の有する根源的な不確実性を把握し, 当該不確実性の一部又は全てを資産にも持たせることができれば, リスクの全てを内部留保で担保せず, 資本市場に転嫁することが可能となるためである. 然るに, 債務評価の計算基礎の全てが市場性を持たないこと, 平準払を前提とした保険数理に基づく価格設定によりヘッジ財源が必ずしも充分でないこと等を鑑みれば, 当該投資行動の理論構築及び実践は容易なことではない. そこで本稿では, Brandt, Goyal, Santa-Clara and Stroud[2005] を ALM アプローチに拡張し, 最低保証を付した変額年金保険を例として, 負債の根源的な不確実性の一部が市場性を有することを前提に, 任意の時点, 保険料払込方法, 組入資産, 保障及び保証内容, 目的関数に対応する一般勘定の近似的最適解を導出し, シミュレーション型動的最適化の数値解析手法を提示する.

キーワード: 非完備市場, 多期間最適化, ALM/LDI, 変額年金保険

1 序論

保険業法第97条「業務の範囲等」には, 第1項で保険会社が保険契約の引き受けをできること, 第2項で保険料等の資産運用を行う場合には保険業法施行規則第47条「資産の運用方法の制限」によることが規定されている. 政省令に委ねる表現とされていないことを鑑みれば, 資産運用業務は保険会社の本来業務として, 保障提供と同順位に位置づけられているものと解釈できる*1. これは保険数理及び決算の構造を振り返れば当然といえよう.

* 野村証券株式会社フィデュシャリー・サービス研究センター / 筑波大学大学院ビジネス科学研究科企業科学専攻博士後期課程 / 〒100-8130 東京都千代田区大手町 2-2-2 アーバンネット大手町ビル E-mail: smonden@js6.so-net.ne.jp

*1 これに対して確定給付企業年金法第65条及び厚生年金法第136条の3では資産運用業務を外部委託を前提としており, 制度運営主体たる基金若しくは事業主の役割は運用機関の選定にある.

簡単な例で見てみよう。保険金額 1, 保険金期末払の養老保険契約に基づく t 時点末責任準備金繰入額は,

$$l_{x+t+1} \cdot {}_{t+1}V_{x:\overline{n}} - l_{x+t} \cdot {}_tV_{x:\overline{n}} = (l_{x+t} \cdot P_{x:\overline{n}} - d_{x+t}) + i \cdot l_{x+t} \cdot ({}_tV_{x:\overline{n}} + P_{x:\overline{n}}) \quad (1)$$

である。ただし、保険数学における記号等の説明は Appendix に示し、ここでは断りなく使用する。右辺第 1 項及び第 2 項は保障提供の対価として収受する保険料と保険契約に基づく給付金額の収支残、第 3 項は年度始責任準備金及び当該年度に収受される保険料に対する予定利率相当の利息である。式から明らかのように、投資行動により当該利息相当額を賄うことができなければ、当該保険会社は決算不能に陥る*2ことになる。

ここで定常状態を仮定すると、収支残 $\sum_{t=0}^{n-1} (l_{x+t} \cdot P_{x:\overline{n}} - d_{x+t})$ 及び想定元本 $\sum_{t=0}^{n-1} l_{x+t} ({}_tV_{x:\overline{n}} + P_{x:\overline{n}})$ は確定的となる。従って、資産超過の状態にあり、固定金利としての予定利率が円金利資産収益率で達成可能な水準に設定されるならば、債券に代表される円金利資産をキャッシュフローに対応させる投資行動が一つの戦略として考えられる*3。責任準備金評価において契約時の計算基礎率が契約期間に亘り適用され、満期保有目的の債券に償却原価法が認められるならば、会計上の整合性も確保できるというものである。

さて、当該戦略は動的なリバランスを前提とするものではない。このように静的な投資行動を前提とできる背景には、定常状態に基づく財政収支の予見可能性がある。従って、契約者の行動・被保険者の状態等に依存する将来キャッシュフロー及び責任準備金額の安定性が期待できるのであれば、静的ヘッジ戦略は有効な手段となるかもしれない。Pelsser[2003] は死亡率が決定論的であるという仮定の下で保証年金オプション (GAO; Guaranteed Annuity Option) の公正価値を金利の期間構造の上に書かれるデリバティブとして評価し、想定元本と契約期間の異なる金利スワップションのポートフォリオを適用した静的な複製戦略を示している*4。

然るに、財政収支及び責任準備金額には必ずしも安定性を期待できないことを鑑みれば、当該戦略は全ての保険商品には適用できない可能性がある。例えば、変額保険における財政収支及び責任準備金額、公正価値評価される保険契約価値は、経済環境等の不確実性を反映する。当該事例においては、目標時点においてヘッジ対象とするデリバティブのペイオフを複製する取引可能な資産のポートフォリオを現時点で構築することは困難であろう。要求される運用成果が状態依存することに伴い、投資戦略も同様に状態依存させる動的な対応が必要となるものと考えられる*5。

Hardy[2003] は株価収益率モデル、パラメータの推定方法、数理ファイナンス、リスク尺度等、変額保険のモデリングとリスク管理に関する基礎的な知識を包括し、解説している。動的ヘッジ戦略について章を割き、給付形態に対応する解説を行っている。ただし、死亡率及び解約率については決定論的としており、本質は完備市場を前提としたデルタ・ヘッジ戦略の提示である。小守林 [2002] も同様に完備市場を前提としたデルタ・ヘッジ戦略を提示するが、保険料払込方法の差異を確認し、平準払の場合にはヘッジ精度の向上が困難であることを指摘している。

然るに、完備市場を前提としたヘッジ戦略の実務への適用には、いくつかの懸念を指摘することができる。第一には保険事故発生率の非市場性である。再保険を通じた流通市場は存在するものの、流動性及びキャパシティは限定的である。一部の投資銀行が死亡率インデックスを公表し、死亡率デリバティブの取引事例も存在するもの*6、有価証券等と比較すれば規模は小さい。

*2 保険業法第 116 条「責任準備金」第 1 項では、毎決算期における保険会社の責任準備金積み立てを要求している。

*3 平成 19 年度決算時における生命保険事業概況の主要資産運用状況を見ると、円金利資産の構成比が、国債 (36.4%)、地方債 (2.8%)、社債 (9.1%)、一般貸付金 (15.4%) と合計して 6 割を超えている。当該統計は社団法人生命保険協会のホームページ (<http://www.seiho.or.jp/index.html>) の「情報・資料」内「生命保険事業概況」で確認できる。

*4 時点 t における満期 T の信用リスクのない割引債券価格 $P(t, T)$, x 歳被保険者の死亡率 q_x , 予め約定される利率 r_x^G に対し、契約期間 n の固定受変動払 (固定金利 K_n) の金利スワップ $S_n = K_n \sum_{t=1}^n P(0, t) - [1 - P(0, n)]$ の想定元本を $L_n = \frac{L_{n+1} + r_x^G q_x}{1 + K_n}$ とし、 $\sum_{n=1} L_n \max(S_n, 0)$ なるスワップションのポートフォリオを構築することにより、GAO のペイオフを複製するというものである。

*5 松山 [2005] は変額年金保険の最低給付保証を対象とする際において、解約率モデルの信頼性が不十分である場合には静的ヘッジ戦略は経済的ではないと指摘している。

*6 事例については Appendix に示す。

第二には財源の問題である。完備市場を前提とするならば、任意の時点及び状態におけるデリバティブの価値とヘッジ費用は一致する。然るに、保険料として収受される金額は公正価値に対する収支相当を想定していない。例えば、利率のみに不確実性を想定する時、保険金額 1、保険金期末払の養老保険契約に基づく保険契約の t 時点末における経済的価値は

$${}_tV_{x:\overline{n}} + \sum_{k=t}^{n-1} B(t, k+1) \cdot \frac{l_{x+k}}{l_{x+t}} \cdot ({}_kV_{x:\overline{n}} + P_{x:\overline{n}}) \cdot [i - L_t(k, k+1)] \quad (2)$$

となる。すなわち、保険契約に基づく責任準備金額（第 1 項）に、予定利率の保証価値（第 2 項）を計上した金額である*7。ところが、保険料は第 1 項部分にのみ対応するものである。計算基礎率には安全割増が含まれるものの、当該安全割増及び内部留保が第 2 項部分を賄うに十分な水準でなければ、財政は破綻することとなるだろう。

第三には会計との差異である。現行会計制度上、貸借対照表上に計上される金額は式 (2) の第 1 項のみである。従って、第 2 項をヘッジするために固定受変動払の金利スワップ契約を締結すると、ヘッジ効果は認識されず当該スワップ契約の差損益のみが評価されることになる。また、利益留保を可能とする勘定を持たなければ、契約途中でヘッジ・ポジションに利益が発生する場合に、当該利益を配当財源に充てるような誤った行動が採られる可能性も否定できない。

更に、退職給付会計における退職給付債務 (PBO; Projected Benefit Obligation)、企業年金制度における最低積立基準額のように発生給付評価方式に基づき評価される場合には、対象となる負債価格過程が不連続となる。

以上より、保険・年金制度におけるヘッジ戦略の構築に際しては、非完備市場を前提とすることが望ましいと考えられる。この場合、『リスク最小化』の代表的な戦略としては、「平均分散ヘッジ」と「局所的リスク最小化」を掲げることができよう。前者は自己資金充足的であるため、積立過不足の発生を許容する。当該差異の抑制を意図し、満期時点における「ヘッジ対象価値－(初期保有資産＋投資利得)」の分散を最小化する戦略である。

一方、後者は自己資金充足的ではなく、資金調達基準を緩和する。すなわち、積立不足を解消するための追加資金調達を許容し、当該コストの最小化を図る戦略である。両戦略の詳細については、Schweizer[2001]、塚原 [2001]、田畑 [2004] 等を参照されたい。保険分野への適用例としては、山田・飯田・椿 [2006]、山田 [2008]、Dahl and Møller[2006] 等が参考となるだろう。

また、自己資金充足性を意識するのであれば、必ずしも損失の最小化が達成されるとは限らないが、『期待効用最大化』により投資戦略を定義することも可能である。内山 [2005] は投資期間末時点における積立比率（資産÷負債）に対する相対的危険回避度一定 (CRRRA; Constant Relative Risk Aversion) 型効用の期待効用最大化に基づく最適投資戦略を導出している。

多期間動的最適投資戦略に関する解法の進展については内山 [2008] に詳しいが、一般的に価値関数の解析解を得ることは困難であり、多くの場合に近似的解析解若しくは数値解に頼ることになる。然るに、期中におけるキャッシュフローの反映等、資産及び負債過程が複雑となる場合、組入資産の増加に伴い状態変数が多くなる場合等には数値解析さえも困難である。このような要因が保険制度や年金制度の実務において認識されている問題の解決に際し、一つの障壁となっている感があるが、Brandt, Goyal, Santa-Clara and Stroud[2005]*8は、価値関数を解くことなく、直接に近似的最適資産配分比を求めることにより、問題解決の実行性を高める手法を提案した。

本稿では BGSS 法を ALM に拡張し、最低保証を付した変額年金保険について、任意の時点、保険料払込方法、組入資産、保障及び保証内容、目的関数に対応する一般勘定の近似的最適解を導出し、シミュレーション型動的最適化の数値解析手法を提示する。

*7 証明及び記号の説明は Appendix に示す。

*8 以下では簡単のために BGSS 法とする。

2 変額年金保険

本稿では具体的な対象として最低保証を付した変額年金保険を採用する。そのため投資戦略を議論する前に、変額年金保険の概略及び関連する勘定の価格過程を本節で示す。

2.1 変額年金保険

山下 [2005] は、変額保険 (Variable Insurance) 及び変額年金保険 (Variable Annuity) を『予定利率、予定死亡率 (保険事故発生率)、予定事業費率等の保険料計算基礎のうち、予定利率を保険者が保証せず、資産運用実績に応じて保険金額、年金額及び解約返戻金額を変動させることとした生命保険』と定義している。

保険業法第 2 条における「定額給付の生命保険、実損填補の損害保険」という定義に当該保険種類は整合するのだろうかという素朴な疑問を持つが、我が国における導入に際しては『保険金額が変動するものであっても客観的な保険金額の算出基準が契約上定められていれば生命保険契約である』と整理され、計算基礎の全てに保険者が保証を提供することは必須の条件ではないものとされたようである。結果として資産運用成果 (予定利率) の保証が外れたものであっても、保険契約として認識された。すなわち、保険事故発生率 (死亡率) について保証があることが保険の必須要件と山下 [2005] は指摘している。

資産運用リスクの担い手が保険者であるか保険契約者であるかによって、当然に保険者の投資行動は変化する。このため、保険者が負う場合は「一般勘定」、保険契約者が負う場合は「特別勘定」として勘定が分離されている。最低保証の付された変額年金保険の契約管理を振り返ると、年金額の決定基準たる参照資産としての性格を特別勘定が持つ。当該勘定においては資産運用成果を全て保険契約者に帰属させるのであるから、契約者持分 (負債) は資産と同額になる。すなわち、責任準備金は収支の残高に他ならない。一方、最低保証部分は資産運用リスクを保険者が負うことになり、当該部分は一般勘定が対応する。責任準備金額は平成 8 年 2 月 29 日大蔵省告示第 48 号「標準責任準備金の積立方式及び計算基礎率を定める件」を受け、保険数理に基づき評価される金額が計上されることになる。次小節では両勘定における資産及び負債の価格過程を解説する。

2.2 資産と負債の価格過程

満期時及び死亡時に既払込保険料合計相当額を最低保証する、平準払変額年金保険契約を考える。すなわち、当該商品においては保証水準 (行使価格) が段階的に上昇する。

以下では保険期間を T 、予定利率を i 、平準払保険料を P 、時点 t における特別勘定資産額を S/A_t 、一般勘定資産額を G/A_t 、最低保証リスクに係る責任準備金を $L_{\min}^G(t)$ 、 $[t - \Delta t, t]$ 期間^{*9}に適用される特別勘定進展率を $R_t^{S/A}$ 、一般勘定進展率を $R_t^{G/A}$ 、無リスク利子率を r_t 、保証料等を表 1 に示すとおりとする。

表 1 保証料・予定事業費・信託報酬

	保険料比例部分	積立金比例部分
最低保証料	ε_P^1	ε_V^1
予定事業費	ε_P^2	ε_V^2
信託報酬	-	ε_V^3
合計	$\varepsilon_P = \varepsilon_P^1 + \varepsilon_P^2$	$\varepsilon_V = \varepsilon_V^1 + \varepsilon_V^2 + \varepsilon_V^3$

なお、保証料等については年齢及び性別の設定を想定しない。年齢別の設定を行った場合には、契約日・契約

^{*9} ここでは離散表現を前提としている。 Δt は時間間隔であり、以下における式の展開においては $\Delta t = 1$ としている。

年齢・性別に特別勘定のユニット価格を設定し、ディスクロージャー資料を作成する必要が生ずる。年齢・性別料率の適用は事務負担が重くなるだけでなく、契約者の混乱を引き起こすことさえも懸念される。共通料率であれば、設定されるユニット価格は唯一であり、当該問題は回避できる。年齢及び性別に基づく差異は責任準備金にのみ反映すれば十分であろう。

2.2.1 保険契約者と保険会社間及び保険会社内部のキャッシュフロー

一般勘定、特別勘定、責任準備金の価格過程を導出する前に、保険契約者と保険会社間、保険会社内の一般勘定と特別勘定間の資金の流れを図 2.2.1 に示す。

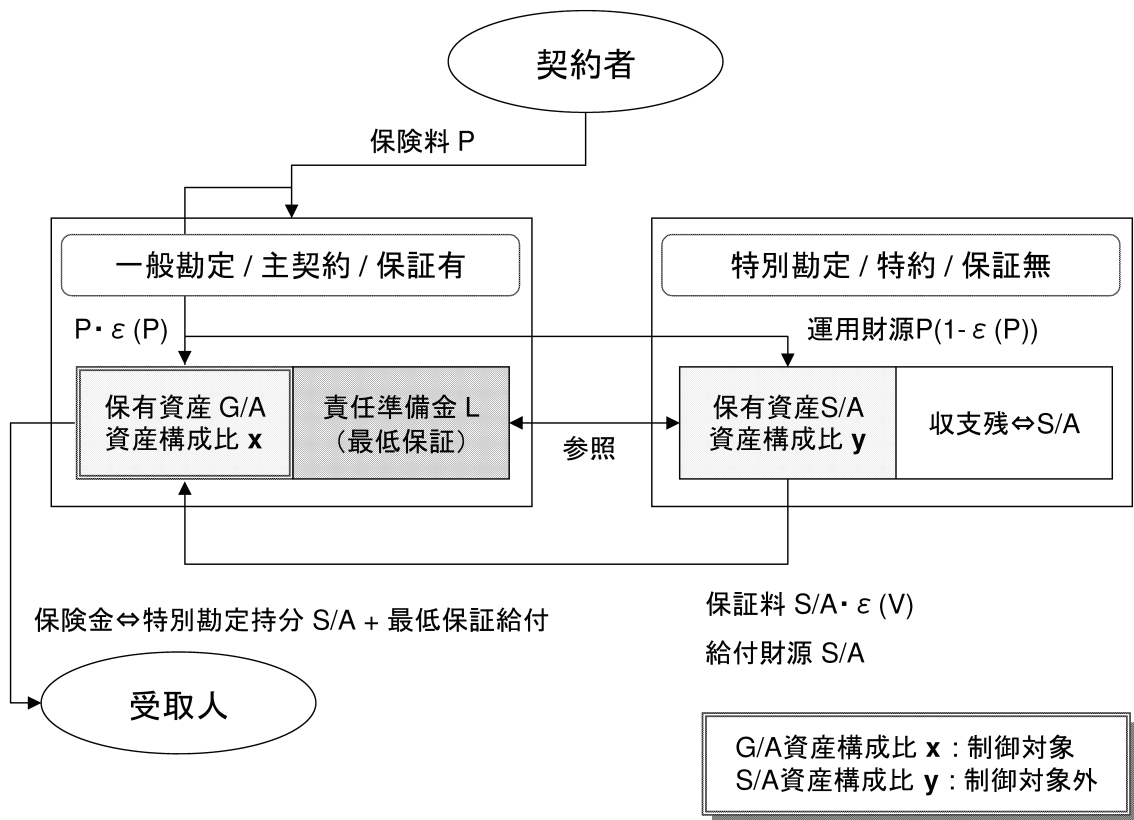


図 1 当該保険契約に係るキャッシュフローの構造

保険契約の締結に伴い、保険契約者は平準払保険料 P を保険会社に支払う。当該金額はまず、全額が主契約たる一般勘定で収入される。平準払保険料 P のうち、保険契約の維持管理等に必要な予算が事業費として控除され、残額が責任準備金の対応財源として一般勘定及び特別勘定で積み立てられる。このとき、一般勘定の最低保証財源として留保される金額は $P \cdot \varepsilon_P^1$ 、特約たる特別勘定に運用財源として振り替えられる金額は $P \cdot (1 - \varepsilon_P)$ である。

事業年度末 (ここでは t とする) においては、特別勘定には当該事業年度始の保有資産に前掲 $P \cdot (1 - \varepsilon_P)$ を加え、給付金等を控除した金額の運用成果 (当該金額を便宜的に V とする) が留保されている。決算処理として V から積立金比例の最低保証財源 ($V \cdot \varepsilon_V^1$)、事業費 ($V \cdot \varepsilon_V^2$) 及び信託報酬 ($V \cdot \varepsilon_V^3$) が取り崩され、最低保証財源が一般勘定資産に振り替えられる。残された S/A_t , すなわち、 $V \cdot (1 - \varepsilon_V)$ が翌事業年度始の特別勘定資産残高となる。

一般勘定も同様に、当該事業年度始の保有資産に前掲 $P \cdot \varepsilon_P^1$ を加え、給付金等を控除した金額の運用成果及び特別勘定から振り返られた最低保証財源が年度末資産残高 G/A_t として留保されている。

最終的に被保険者に保険事故が発生せず満期を迎えた場合、若しくは保険期間中に保険事故が発生した場合には、最低保証金額及び特別勘定資産残高の何れか大きい金額が保険金受取人に支払われることになる。第 τ 時点で保険事故が発生したものとすれば、本例における最低保証金額は既払込保険料合計相当額 $\tau \cdot P$ であるので、保険金受取人に支払われる金額は $\max(S/A_\tau, \tau \cdot P)$ である。

2.2.2 特別勘定資産額 (実際の運用成果)

時点 $(t-1)$ における加入者 (生存者) 数は l_{x+t-1} であるので、特別勘定の期始資産額は $l_{x+t-1} \cdot S/A_{t-1}$ である。当該資産額と加入者が期始に納付した保険料 P のうち、特別勘定に投入される $P \cdot (1 - \varepsilon_P)$ を期末 (時点 t) まで運用した結果は

$$l_{x+t-1} \cdot [S/A_{t-1} + P \cdot (1 - \varepsilon_P)] \cdot R_t^{S/A}$$

となるが、当該期間内における死亡者に対して給付を行うため、給付後の残額は

$$(l_{x+t-1} - d_{x+t-1}) \cdot [S/A_{t-1} + P \cdot (1 - \varepsilon_P)] \cdot R_t^{S/A}$$

である。年度末においては当該金額に対し、最低保証料・予定事業費・信託報酬が賦課され、取り崩されるので、期末 (時点 t) の資産残高は

$$(l_{x+t-1} - d_{x+t-1}) \cdot [S/A_{t-1} + P \cdot (1 - \varepsilon_P)] \cdot R_t^{S/A} \cdot (1 - \varepsilon_V)$$

となるが、当該金額は時点 t における加入者に帰属するものであるから、 $l_{x+t} \cdot S/A_t$ と表現することもできる。従って、ファクターの再帰式*10は、

$$l_{x+t} \cdot S/A_t = (l_{x+t-1} - d_{x+t-1}) \cdot [S/A_{t-1} + P \cdot (1 - \varepsilon_P)] \cdot R_t^{S/A} \cdot (1 - \varepsilon_V) \quad (3)$$

となる。ただし、 $S/A_0 = 0$ である。特別勘定では給付財源が当該特別勘定残高に限定されるため、任意の時点において $S/A_t \geq 0$ となる。また、満期到達後は残余財産を契約者に給付し、当該勘定は消滅するため、当該保険契約を引き受ける保険会社の内部留保形成に資することはない。

ここで簡単のために保険期間中における死亡及び解約が生じないものとする。このとき t 時点までの情報に基づく $(t+k)$ 時点の特別勘定資産額 $S/A_{t+k} | \mathcal{F}_t$ は式 (4) により定義できる。ただし、 $k > 0$ である。

$$\begin{aligned} S/A_{t+k} | \mathcal{F}_t &= S/A_t \prod_{l=t+1}^{t+k} R_l^{S/A} \cdot (1 - \varepsilon_V)^k \\ &\quad + \sum_{l=t+1}^{t+k} P \cdot (1 - \varepsilon_P) \prod_{m=l}^{t+k} R_m^{S/A} \cdot (1 - \varepsilon_V)^{(t+k)-l+1} \end{aligned} \quad (4)$$

2.2.3 特別勘定資産額 (責任準備金の参照資産)

t 時点までの情報に基づく $(t+k)$ 時点の責任準備金評価の参照資産 $S/A_{t+k}^{INDEX} | \mathcal{F}_t$ は、次式により定義される。ただし、 $k > 0$ である。

$$\begin{aligned} S/A_{t+k}^{INDEX} | \mathcal{F}_t &= S/A_t \cdot \exp\left[\left(\mu - \varepsilon_V - \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot k + \sigma W_k\right] \\ &\quad + P \cdot (1 - \varepsilon_P) \sum_{l=t}^{t+k-1} \exp\left[\left(\mu - \varepsilon_V - \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot (t+k-l) + \sigma W_{t+k-l}\right] \end{aligned} \quad (5)$$

*10 Appendix を参照されたい。

ここで留意すべき点は価格過程のパラメータ μ 及び σ である。

平成 8 年 2 月 29 日大蔵省告示第 48 号では責任準備金を標準的方式により積み立てる場合のパラメータが規定されている。すなわち、特別勘定において保有する投資資産価格のボラティリティとは必ずしも一致しない可能性がある。然るに、筆者は次掲の理由により、当該トラッキング・エラーの発生には否定的である。

第一には必要内部留保水準の上昇に伴う財源の増加である。保険業法第 116 条第 1 項では保険契約に基づく将来における債務の履行に備えるために、毎決算期における責任準備金の積立を要請している。ここで当該変額保険の引受に伴う最低保証行為において「通常の予測」とされるボラティリティは前掲告示に規定される値である。従って、当該値と実績値の乖離は要求される内部留保水準を高めることになる。追加的に要求される内部留保蓄積の財源が剰余金に求められ、他商品群団の剰余金分配額が削減されるような事態が生ずれば、これは公平性の阻害に他ならない。増資による対応等、他商品群団間及び当該商品群団内の世代間における公平性を確保できないのであれば、特別勘定の望ましい投資戦略とは考えにくい。

第二には逆選択の問題である。ボラティリティが高くなればオプション・プレミアムが高くなることは常識である。従って、原資産たる特別勘定のボラティリティを意図的に保証料の計算基礎よりも高めるのであれば、当該行為はミス・プライスというよりは寧ろ、逆選択の提供に他ならない。当該状態を看過するようなことがあれば、アクチュアリーは保険業法施行規則第 211 条の 48 に規定される職責を全うしているとはいえない。

2.2.4 最低保証リスクに係る責任準備金

当該科目は一般勘定における負債である。時点 k までの情報を反映した、将来 t 時点の最低保証リスクに係る責任準備金 $L_{\min}^G(t) | \mathcal{F}_k$ は次式により定義される。ただし、 $t > k$ である。

$$\begin{aligned} L_{\min}^G(t) | \mathcal{F}_k &= \frac{D_{x+T}}{D_{x+k}} \cdot E[\max(T \cdot P - S/A_n^{INDEX}) | \mathcal{F}_k] \\ &+ \sum_{t=k}^{T-1} \frac{C_{x+t}}{D_{x+k}} \cdot E[\max((t+1) \cdot P - S/A_{t+1}^{INDEX}) | \mathcal{F}_k] \\ &- \sum_{t=k}^{T-1} \frac{D_{x+t}}{D_{x+k}} \cdot (\varepsilon_P^1 \cdot P + E[\bar{a}_t | \mathcal{F}_k]) \end{aligned} \quad (6)$$

ここで、

$$\begin{aligned} E[\bar{a}_t | \mathcal{F}_k] &= \frac{\varepsilon_V^1}{\mu - \varepsilon_V - r} \cdot e^{(\mu - \varepsilon_V - r)t} \cdot (e^{\mu - \varepsilon_V - r} - 1) \\ &\times [S/A_k \cdot e^{-(\mu - \varepsilon_V)k} + P \cdot (1 - \varepsilon_P) \sum_{l=k}^t e^{-(\mu - \varepsilon_V)l}] \end{aligned} \quad (7)$$

である。

なお、本稿では最低保証リスクに備える危険準備金(所謂危険準備金Ⅲ)の積み立てを考慮しないものとする。

2.2.5 一般勘定資産額

時点 $(t-1)$ における加入者数は l_{x+t-1} であるので、一般勘定の期始資産額は $l_{x+t-1} \cdot G/A_{t-1}$ である。当該資産額と加入者が期始に納付した保険料 P のうち、一般勘定に投入される $P \cdot \varepsilon_P^1$ を期末(時点 t)まで運用した結果は

$$l_{x+t-1} \cdot [P \cdot \varepsilon_P^1 + G/A_{t-1}] \cdot R_t^{G/A}$$

となる。一方、期末においては特別勘定資産額から取り崩された最低保証料

$$(l_{x+t-1} - d_{x+t-1}) \cdot [S/A_{t-1} + P \cdot (1 - \varepsilon_P)] \cdot R_t^{S/A} \cdot \varepsilon_V^1 = \frac{\varepsilon_V^1}{1 - \varepsilon_V} \cdot l_{x+t} \cdot S/A_t$$

が、保証財源として一般勘定に繰り入れられると同時に、死亡給付の取り崩しも発生する。期末に支払の生ずる1人あたりの死亡給付額は、特別勘定資産額 S/A_t が既払込保険料 $t \cdot P$ に不足する金額であるので、勘定全体では

$$d_{x+t-1} \cdot \max[t \cdot P - S/A_t, 0]$$

である。以上より、期末における資産残高は

$$l_{x+t-1} \cdot [P \cdot \varepsilon_P^1 + G/A_{t-1}] \cdot R_t^{G/A} + \frac{\varepsilon_V^1}{1 - \varepsilon_V} \cdot l_{x+t} \cdot S/A_t - d_{x+t-1} \cdot \max[t \cdot P - S/A_t, 0]$$

となる。当該金額が $l_{x+t} \cdot G/A_t$ であるので、 $t < T$ におけるファクラーの再帰式は、

$$l_{x+t} \cdot G/A_t = l_{x+t-1} \cdot [P \cdot \varepsilon_P^1 + G/A_{t-1}] \cdot R_t^{G/A} + \frac{\varepsilon_V^1}{1 - \varepsilon_V} \cdot l_{x+t} \cdot S/A_t - d_{x+t-1} \cdot \max[t \cdot P - S/A_t, 0] \quad (8)$$

となる。ただし、 $G/A_0 = 0$ である。満期時点においては生存者に対して死亡給付額と同額の満期保険金が発生するため、ファクラーの再帰式は、

$$l_{x+T} \cdot G/A_T = l_{x+T-1} \cdot [P \cdot \varepsilon_P^1 + G/A_{T-1}] \cdot R_T^{G/A} + \frac{\varepsilon_V^1}{1 - \varepsilon_V} \cdot l_{x+T} \cdot S/A_T - (d_{x+T-1} + l_{x+T}) \cdot \max[T \cdot P - S/A_T, 0] \quad (9)$$

である。

式(4)と同様にして、保険期間中において死亡及び解約が生じないものとした場合の t 時点までの情報に基づく $(t+k)$ 時点の一般勘定資産額 $G/A_{t+k} | \mathcal{F}_t$ として

$$G/A_{t+k} | \mathcal{F}_t = G/A_t \prod_{l=t+1}^{t+k} R_l^{G/A} + \sum_{l=t+1}^{t+k} P \cdot \varepsilon_P^1 \prod_{m=l}^{t+k} R_m^{G/A} + \varepsilon_V^1 \{ S/A_t \cdot \theta + P(1 - \varepsilon_P) \cdot \eta \} \quad (10)$$

$$\theta = \sum_{l=t+1}^{t+k} R_l^{S/A} \cdot (1 - \varepsilon_V)^k + \sum_{l=t+1}^{t+k-1} \prod_{m=t+1}^l R_m^{S/A} \prod_{o=l+1}^{t+k} R_o^{G/A} \cdot (1 - \varepsilon_V)^{l-t}$$

$$\eta = \sum_{l=t+1}^{t+k} \prod_{m=l}^{t+k} R_m^{S/A} \cdot (1 - \varepsilon_V)^{(t+k)-l+1}$$

$$+ \sum_{l=t+1}^{t+k-1} \sum_{m=t+1}^l \prod_{n=m}^l R_n^{S/A} \prod_{o=l+1}^{t+k} R_o^{G/A} \cdot (1 - \varepsilon_V)^{l-m+1}$$

を得る。ただし、 $k > 0$ である。

式(4)と式(10)を比較すると、特別勘定と一般勘定の本質的な構造の差異を確認できる。すなわち、前者が当該勘定内で完結することに対し、後者は他勘定の運用成果の影響を受けるということである。

経済環境の低迷期を想定すると、特別勘定資産額の減価に伴い最低保証に係る責任準備金が増価する一方、積立金比例の保証料収入が減少する。当該構造が変額年金保険の一般勘定における投資戦略を困難なものとする要因の一つであることは容易に理解できるだろう。

3 負債を参照する多期間動的最適化問題

次小節では価値関数を解く「一般的」な手法を示し、続く小節で BGSS 法を解説し、一般的な手法との相違点を確認する。

3.1 基本的な考え方 (一般的な手法)

多期間動的最適化の枠組による投資戦略については、Campbell and Viceira[2002] 等に詳しい。以下では「資産」のみならず「負債」を考慮し、二次元に拡張した場合の基本的な考え方を解説する。

時点 t における資産額を A_t 、負債額を L_t 、制御対象となる資産構成比を \mathbf{x} とする。満期 T 時点の資産額 A_T と負債額 L_T により定義される関数 $u(A_T, L_T)$ を導入し、第 t 時点の価値関数 $\mathcal{J}(t, A_t, L_t)$ を

$$\mathcal{J}(t, A_t, L_t) = \max_{\{\mathbf{x}_\tau\}_{\tau \in [t, T]}} E[u(A_T, L_T) | \mathcal{F}_t] \quad (11)$$

と定義する。ただし、本小節では任意の対象に対する ALM を論じており、負債の構造、すなわち、保障内容を特定していない。

ここで最適性原理により、 $s > t$ において

$$\mathcal{J}(t, A_t, L_t) = \max_{\{\mathbf{x}_\tau\}_{\tau \in [t, s]}} E[\mathcal{J}(s, A_s, L_s) | \mathcal{F}_t] \quad (12)$$

が成立する。つまり、 t 時点における価値関数は、「将来の s 時点における価値関数の条件付期待値を最大化するもの」である。

伊藤の補題により、

$$\begin{aligned} d\mathcal{J}(t, A_t, L_t) &= \frac{\partial}{\partial A_t} \mathcal{J} \cdot (dA_t) + \frac{\partial}{\partial L_t} \mathcal{J} \cdot (dL_t) + \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{J} \cdot dt \\ &+ \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2}{\partial A_t^2} \mathcal{J} \cdot (dA_t)^2 + \frac{\partial^2}{\partial L_t^2} \mathcal{J} \cdot (dL_t)^2 + 2 \frac{\partial^2}{\partial A_t \partial L_t} \mathcal{J} \cdot (dA_t) \cdot (dL_t) \right] \end{aligned} \quad (13)$$

また、

$$\mathcal{J}(s, A_s, L_s) = \mathcal{J}(t, A_t, L_t) + \int_t^s d\mathcal{J}(t, A_t, L_t) \quad (14)$$

であるので、式 (13) 及び式 (14) を式 (12) に適用すると

$$\max_{\{\mathbf{x}_\tau\}_{\tau \in [t, s]}} E \left[\int_t^s d\mathcal{J}(t, A_t, L_t) | \mathcal{F}_t \right] = 0 \quad (15)$$

を得る。最適投資戦略を求めるには、資産及び負債の予算制約下において当該要件を満足するように保有資産配分比 \mathbf{x} の調整を実践すればよい。これが多期間動的最適化問題の基本的な考え方である。

問題を簡単にするために、資産及び負債の価格過程を次掲のように設定してみよう。

$$\begin{aligned} dA_t &= \mu(t, A_t) A_t dt + \sigma(t, A_t) A_t dW_t^A \\ dL_t &= \mu(t, L_t) L_t dt + \sigma(t, L_t) L_t dW_t^L \\ dW_t^A \cdot dW_t^L &= \rho dt \end{aligned}$$

当該条件を式 (13) に反映し、ブラウン運動の期待値がゼロとなることを利用して整理すれば

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial A_t} \mathcal{J} \cdot \mu(t, A_t) A_t + \frac{\partial}{\partial L_t} \mathcal{J} \cdot \mu(t, L_t) L_t + \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{J} \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial A_t^2} \mathcal{J} \cdot \sigma(t, A_t)^2 A_t^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial L_t^2} \mathcal{J} \cdot \sigma(t, L_t)^2 L_t^2 \\ & + \frac{\partial^2}{\partial A_t \partial L_t} \mathcal{J} \cdot \sigma(t, A_t) \sigma(t, L_t) \rho A_t L_t = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

を得る。

ここで第 t 時点における資産配分比ベクトルを \mathbf{x} , 負債構成比ベクトル^{*11} を \mathbf{y} , リスク性資産の収益率の期待値ベクトルを \mathbf{M} , 同分散共分散行列を $\mathbf{\Omega}$, 全ての要素が 1 のベクトルを \mathbf{e} , 無リスク利率を r_t とする。ただし, $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{e}, \mathbf{M}$ は $(n \times 1)$ ベクトル, $\mathbf{\Omega}$ は $(n \times n)$ 行列である。

このとき, 資産及び負債の価格過程における係数は

$$\begin{aligned} \mu(t, A_t) &= r_t + (\mathbf{M} - r_t \cdot \mathbf{e})^T \cdot \mathbf{x} \\ \mu(t, L_t) &= r_t + (\mathbf{M} - r_t \cdot \mathbf{e})^T \cdot \mathbf{y} \\ \sigma(t, A_t)^2 &= \mathbf{x}^T \mathbf{\Omega} \mathbf{x} \\ \sigma(t, L_t)^2 &= \mathbf{y}^T \mathbf{\Omega} \mathbf{y} \\ \sigma(t, A_t) \sigma(t, L_t) \rho &= \mathbf{x}^T \mathbf{\Omega} \mathbf{y} \end{aligned}$$

と書き換えることができるので, 1 階の条件から最適資産配分比 \mathbf{x}^* は

$$\mathbf{x}^* = - \frac{\frac{\partial}{\partial A_t} \mathcal{J} \cdot \mathbf{\Omega}^{-1} (\mathbf{M} - r_t \cdot \mathbf{e}) + L_t \cdot \frac{\partial^2}{\partial A_t \partial L_t} \mathcal{J} \cdot \mathbf{y}}{A_t \cdot \frac{\partial^2}{\partial A_t^2} \mathcal{J}} \quad (17)$$

となり, Merton[1971] 等により示されるとおり, $\mathbf{\Omega}^{-1} (\mathbf{M} - r_t \mathbf{e})$ に対応する近視眼的成分と, \mathbf{y} に対応する異時点間のヘッジ成分 (負債構造) の合成として求められる。

式 (17) を式 (16) に代入すると, 価値関数 \mathcal{J} に対する偏微分方程式を得る。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{J} + r_t \cdot (A_t \cdot \frac{\partial}{\partial A_t} \mathcal{J} + L_t \cdot \frac{\partial}{\partial L_t} \mathcal{J}) - \frac{1}{2} \frac{(\frac{\partial}{\partial A_t} \mathcal{J})^2}{\frac{\partial^2}{\partial A_t^2} \mathcal{J}} \cdot (\mathbf{M} - r_t \cdot \mathbf{e})^T \mathbf{\Omega}^{-1} (\mathbf{M} - r_t \cdot \mathbf{e}) \\ & + L_t \cdot (\frac{\partial}{\partial L_t} \mathcal{J} - \frac{\frac{\partial}{\partial A_t} \mathcal{J} \cdot \frac{\partial^2}{\partial A_t \partial L_t} \mathcal{J}}{\frac{\partial^2}{\partial A_t^2} \mathcal{J}}) \cdot (\mathbf{M} - r_t \cdot \mathbf{e})^T \mathbf{y} \\ & + \frac{1}{2} L_t^2 \cdot [\frac{\partial^2}{\partial L_t^2} \mathcal{J} - \frac{(\frac{\partial^2}{\partial A_t \partial L_t} \mathcal{J})^2}{\frac{\partial^2}{\partial A_t^2} \mathcal{J}}] \cdot \mathbf{y}^T \mathbf{\Omega} \mathbf{y} = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

式 (18) を解き, 導出された価値関数 \mathcal{J} に対する偏微分係数 $\frac{\partial}{\partial A_t} \mathcal{J}$, $\frac{\partial^2}{\partial A_t^2} \mathcal{J}$ 及び $\frac{\partial^2}{\partial A_t \partial L_t} \mathcal{J}$ を再び式 (17) に適用することにより, 最終的に最適資産配分比 \mathbf{x}^* が導かれる。換言すれば, 当該価値関数の解が導出されなければ, 最適解 \mathbf{x}^* は得られないということである。

^{*11} 繰り返すが, \mathbf{x} 及び \mathbf{y} は, 前節等における一般勘定構成比及び特別勘定構成比とは別のものである。

3.2 BGSS 法 [2005]

3.2.1 最適化問題の設定

時点 t における一般勘定資産額を G/A_t 、特別勘定資産額を S/A_t とし、最低保証リスクに係る責任準備金 $L_{\min}^G(t)$ を特別勘定資産額の上にかかれるデリバティブと見做し、 $H[S/A_t]$ と記述する。ここで、第 t 時点の状態変数として次式により定義される積立比率 $\mathbf{FR}(t)$ を導入する。

$$\mathbf{FR}(t) = \frac{S/A_t + G/A_t}{S/A_t + H[S/A_t]} \quad (19)$$

ただし、 $t \in [0, T]$ である。

なお、既に述べたように、特別勘定では給付財源が当該特別勘定残高に限定され、収支残が負債として認識されるため資産と負債は同額となる。従って、分子及び分母に現れる特別勘定資産額 S/A_t は同額であるが、意味が異なることに留意されたい。分子のそれは「特別勘定に属する資産額」であり、分母のそれは「特別勘定に属する負債額」を意味しているのである。

従って、積立比率の分子は一般勘定資産額及び特別勘定資産額の合計、分母は特別勘定負債額及び最低保証リスクに係る責任準備金（一般勘定負債額）の合計を意味しており、積立比率とは当該保険契約の負債に対応する資産充足度を評価したものと解釈できる。当該比率が常に 1.0 を超過しており、かつ、保有資産の流動性も確保されていれば、理想的な状態といえるだろう。

一方、年度末決算時点で当該比率が 1.0 を下回れば、当該契約群団は債務超過の状態にある。更に当該状態で給付が発生すれば損失が顕在化し、ソルベンシー・マージン（広義の自己資本）が棄損されるため、保険者が達成すべき課題の一つは積立不足の抑制若しくは回避と考えることができる。

そこで本稿では、満期 T 時点の積立比率 $\mathbf{FR}(T)$ に対し、

$$u(\mathbf{FR}(T)) = \mathbf{FR}(T) - a \cdot \mathbf{FR}(T)^2, \quad (0 < \mathbf{FR}(T) < \frac{1}{2a}, a > 0) \quad (20)$$

なる関数 u を導入し、離散時間モデルにより次掲の最適化問題を考える。

$$\max_{\{\mathbf{x}_\tau\}_{\tau=t}^{T-1}} E[u(\mathbf{FR}(T)) | \mathcal{F}_t] \quad (21)$$

ただし、保険期間中における死亡及び解約を想定せず、特別勘定と一般勘定の価格過程を

$$S/A_{t+1} = [S/A_t + P(1 - \varepsilon_P)] \cdot R_{t+1}^{S/A} \cdot (1 - \varepsilon_V) \quad (22)$$

$$G/A_{t+1} = [G/A_t + P \cdot \varepsilon_P^1] \cdot R_{t+1}^{G/A} + \frac{\varepsilon_V^1}{1 - \varepsilon_V} \cdot S/A_{t+1} \quad (23)$$

とする。

3.2.2 資産価格過程の分解

第 t 時点の一般勘定及び特別勘定の資産構成比ベクトルを \mathbf{x} 及び \mathbf{y} 、リスク性資産の収益率の期待値ベクトルを \mathbf{M} 、同分散共分散行列を $\mathbf{\Omega}$ 、全ての要素が 1 のベクトルを \mathbf{e} 、とする。ただし、 $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{e}, \mathbf{M}$ は $(n \times 1)$ ベクトル、 $\mathbf{\Omega}$ は $(n \times n)$ 行列である。

このとき、 $[t, t+1]$ 期間に対応する特別勘定運用収益率を期待値が $r_{t+1} + (\mathbf{M} - r_{t+1}\mathbf{e})^T \cdot \mathbf{y}$ 、分散が $\mathbf{y}^T \mathbf{\Omega} \mathbf{y}$ の正規分布に従うものとすれば、特別勘定進展率は

$$R_{t+1}^{S/A} = \exp[r_{t+1} + (\mathbf{M} - r_{t+1}\mathbf{e})^T \mathbf{y} - \frac{\mathbf{y}^T \mathbf{\Omega} \mathbf{y}}{2} + \sqrt{\mathbf{y}^T \mathbf{\Omega} \mathbf{y}} W_{(t+1)-t}^{S/A}] \quad (24)$$

である。これをテイラー展開し、伊藤ルールの準用により

$$R_{t+1}^{S/A} \approx 1 + r_{t+1} + (\mathbf{M} - r_{t+1}\mathbf{e})^T \mathbf{y} + \sqrt{\mathbf{y}^T \boldsymbol{\Omega} \mathbf{y}} W_{(t+1)-t}^{S/A} \quad (25)$$

と近似すると、式 (22) は

$$\begin{aligned} S/A_{t+1} &= [S/A_t + P(1 - \varepsilon_P)] \cdot R_{t+1}^{S/A} \cdot (1 - \varepsilon_V) \\ &\approx [S/A_t + P(1 - \varepsilon_P)] \cdot (1 - \varepsilon_V) \\ &\quad \times [1 + r_{t+1} + (\mathbf{M} - r_{t+1}\mathbf{e})^T \mathbf{y} + \sqrt{\mathbf{y}^T \boldsymbol{\Omega} \mathbf{y}} W_{(t+1)-t}^{S/A}] \end{aligned} \quad (26)$$

となる。ここで

$$S/A_{t+1}^r = [S/A_t + P(1 - \varepsilon_P)] \cdot (1 + r_{t+1}) \cdot (1 - \varepsilon_V) \quad (27)$$

$$S/A_{t+1}^y = [S/A_t + P(1 - \varepsilon_P)] \cdot [(\mathbf{M} - r_{t+1}\mathbf{e})^T \mathbf{y} + \sqrt{\mathbf{y}^T \boldsymbol{\Omega} \mathbf{y}} W_{(t+1)-t}^{S/A}] \cdot (1 - \varepsilon_V) \quad (28)$$

とし、式 (22) を

$$S/A_{t+1} \approx S/A_{t+1}^r + S/A_{t+1}^y \quad (29)$$

と表現する。

同様にして、式 (23) を

$$G/A_{t+1} \approx G/A_{t+1}^r + G/A_{t+1}^{x,y} \quad (30)$$

とする。ただし、

$$G/A_{t+1}^r = [(G/A_t + P \cdot \varepsilon_P^1) + \varepsilon_V^1 \cdot \{S/A_t + P(1 - \varepsilon_P)\}] \cdot (1 + r_{t+1}) \quad (31)$$

$$\begin{aligned} G/A_{t+1}^{x,y} &= (G/A_t + P \cdot \varepsilon_P^1) \cdot [(\mathbf{M} - r_{t+1}\mathbf{e})^T \mathbf{x} + \sqrt{\mathbf{x}^T \boldsymbol{\Omega} \mathbf{x}} W_{(t+1)-t}^{G/A}] \\ &\quad + \varepsilon_V^1 \cdot [S/A_t + P(1 - \varepsilon_P)] \cdot [(\mathbf{M} - r_{t+1}\mathbf{e})^T \mathbf{y} + \sqrt{\mathbf{y}^T \boldsymbol{\Omega} \mathbf{y}} W_{(t+1)-t}^{S/A}] \end{aligned} \quad (32)$$

である。なお、我々が制御対象とするものは一般勘定ポートフォリオ \mathbf{x} のみである。特別勘定ポートフォリオ \mathbf{y} は制御対象とはならない。

3.2.3 BGSS 法による ALM アプローチ

式 (21) に基づき、第 t 時点における価値関数 $\mathcal{J}(t, G/A_t, S/A_t)$ を

$$\mathcal{J}(t, G/A_t, S/A_t) = \max_{\{\mathbf{x}_\tau\}_{\tau=t}^{T-1}} E[u(\mathbf{FR}(\mathbf{T})) | \mathcal{F}_t] \quad (33)$$

と定義し、更に

$$\mathcal{J}(t, G/A_t, S/A_t) := f[G/A_t^r + G/A_t^{x,y}, S/A_t^r + S/A_t^y] \quad (34)$$

なる関数 f を導入する。

次に

$$\mathcal{J}(t+1, G/A_{t+1}, S/A_{t+1}) = f[G/A_{t+1}^{r_{t+1}} + G/A_{t+1}^{x,y}, S/A_{t+1}^{r_{t+1}} + S/A_{t+1}^y]$$

を式 (27) 及び式 (31) で定義した $G/A_{t+1}^{r_{t+1}}$ 及び $S/A_{t+1}^{r_{t+1}}$ の周りでテイラー展開し、

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(t+1, G/A_{t+1}, S/A_{t+1}) &\approx f[G/A_{t+1}^{r_{t+1}}, S/A_{t+1}^{r_{t+1}}] \\ &\quad + G/A_{t+1}^{x,y} \cdot \frac{\partial}{\partial G/A_{t+1}} f[G/A_{t+1}^{r_{t+1}}, S/A_{t+1}^{r_{t+1}}] \\ &\quad + S/A_{t+1}^y \cdot \frac{\partial}{\partial S/A_{t+1}} f[G/A_{t+1}^{r_{t+1}}, S/A_{t+1}^{r_{t+1}}] \\ &\quad + \frac{1}{2} (G/A_{t+1}^{x,y})^2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial G/A_{t+1}^2} f[G/A_{t+1}^{r_{t+1}}, S/A_{t+1}^{r_{t+1}}] \\ &\quad + \frac{1}{2} (S/A_{t+1}^y)^2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial S/A_{t+1}^2} f[G/A_{t+1}^{r_{t+1}}, S/A_{t+1}^{r_{t+1}}] \\ &\quad + G/A_{t+1}^{x,y} \cdot S/A_{t+1}^y \cdot \frac{\partial^2}{\partial G/A_{t+1} \partial S/A_{t+1}} f[G/A_{t+1}^{r_{t+1}}, S/A_{t+1}^{r_{t+1}}] \end{aligned} \quad (35)$$

と近似する。以下では簡単のために $f[G/A_{t+1}^{r_{t+1}}, S/A_{t+1}^{r_{t+1}}]$ を f とのみ記述する。

最適性原理により

$$\mathcal{J}(t, G/A_t, S/A_t) = \max_{\mathbf{x}_t} E[\mathcal{J}(t+1, G/A_{t+1}, S/A_{t+1}) | \mathcal{F}_t] \quad (36)$$

が成立するので、式 (36) の右辺に式 (35) を適用すれば、1 階の条件から近似的な最適解 \mathbf{x}^* を求めることができる。

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^* = & -\frac{1}{G/A_t + P \cdot \varepsilon_P^1} \cdot \frac{E[\frac{\partial}{\partial G/A_{t+1}} f | \mathcal{F}_t]}{E[\frac{\partial^2}{\partial G/A_{t+1}^2} f | \mathcal{F}_t]} \cdot \Gamma^{-1}(\mathbf{M} - r_{t+1}\mathbf{e}) \\ & - \frac{S/A_t + P \cdot (1 - \varepsilon_P)}{G/A_t + P \cdot \varepsilon_P^1} \cdot \{ \varepsilon_V^1 + (1 - \varepsilon_V) \cdot \frac{E[\frac{\partial^2}{\partial G/A_{t+1} S/A_{t+1}} f | \mathcal{F}_t]}{E[\frac{\partial^2}{\partial G/A_{t+1}^2} f | \mathcal{F}_t]} \} \cdot \mathbf{y} \end{aligned} \quad (37)$$

ただし、

$$\Gamma = \Omega + (\mathbf{M} - r_{t+1}\mathbf{e})(\mathbf{M} - r_{t+1}\mathbf{e})^T \quad (38)$$

である。式 (35) における $G/A_{t+1}^{x,y}$ 及び S/A_{t+1}^y に関する積率評価は Appendix に示す。

前小節で示した「一般的な手法」では、最適解 \mathbf{x}^* を得るためには価値関数の解を導出する必要があったが、BGSS 法ではこれを要求しない。価値関数にテイラー展開を施すことにより、近似的最適解を直接に求めることを可能としているのである。

最適解 \mathbf{x}^* は、式 (17) と同様に、近視眼的成分と異時点間のヘッジ成分 (負債構造) により構成される。ただし、式 (17) では価値関数の偏微分として与えられた係数が、式 (37) では条件付期待値に代替され、近視眼的成分の要素が $\Omega^{-1}(\mathbf{M} - r_t\mathbf{e})$ から $\Gamma^{-1}(\mathbf{M} - r_{t+1}\mathbf{e})$ に変化している。

偏微分方程式を解き価値関数の解析解を導出することとは異なり、三種類の条件付期待値 $E[\frac{\partial}{\partial G/A_{t+1}} f | \mathcal{F}_t]$, $E[\frac{\partial^2}{\partial G/A_{t+1}^2} f | \mathcal{F}_t]$, $E[\frac{\partial^2}{\partial G/A_{t+1} S/A_{t+1}} f | \mathcal{F}_t]$ を評価することは Longstaff and Schwartz[2001] の最小二乗モンテカルロ (LSM; Least Square Monte-Carlo) 法のアイデアを利用すれば、比較的容易に行える。すなわち、 $\frac{\partial}{\partial G/A_{t+1}} f$, $\frac{\partial^2}{\partial G/A_{t+1}^2} f$, $\frac{\partial^2}{\partial G/A_{t+1} S/A_{t+1}} f$ を目的変数、時点 t までの情報に基づく状態変数の直交基底を説明変数として回帰するのである。条件付期待値の評価については、枇々木 [2007] に倣い、シミュレーション・パスの各点から格子を張ることによる対応も考えられる。ただし、平準払保険料を前提とすると、資産価格過程の格子が

再結合しないために計算負荷が高まることに留意が必要である。BGSS 法はシミュレーションを土台にすることで、4 階微分可能であることを前提とした式 (20) への任意の関数形の適用及び組入対象資産の任意の収益率分布への対応、潜在的な経路依存性の反映等を可能としている。

ただし、近似的手法であるために、誤差に留意する必要がある。Binsbergen and Brandt[2006] は価値関数を直接に解かず、期待効用を最大化する最適資産配分比の近似解を求める BGSS 法は、状態変数の多項式近似により効用関数が正確に記述できない場合には、価値関数を近似する等の他手法と比較して誤差の伝搬に差異が生ずる可能性を指摘している。また、梅内 [2008] は BGSS 法の近似誤差が価値関数のテイラー展開に起因するものと指摘し、当該誤差の抑制策として離散間隔の短縮、テイラー展開の高次化、無リスク資産収益率に代替する近視眼的ポートフォリオ収益率周りでの展開等を提案している。

なお、式 (37) から明らかなように、負債価値が経済環境において何ら不確実性を参照せず、資産価値とは独立であるならば \mathbf{y} に対応するヘッジ成分は存在しえない。別の表現をするならば、近視眼的成分、すなわち、分散ポートフォリオは何らヘッジ機能を有さないということである。

3.3 BGSS 法による最適資産構成比

前掲処理を満期時点から第 0 時点まで後進帰納的に反復することで、保険期間に亘る最適投資戦略が導出される。式 (37) により求められる最適資産構成比 \mathbf{x}^* を確認する。

3.3.1 (T-1) 時点

式 (20) を微分すれば、式 (37) における条件付期待値を次掲のように特定することができる。

$$E\left[\frac{\partial}{\partial G/A_T} f \mid \mathcal{F}_{T-1}\right] = E\left[2a \cdot \left\{\frac{1}{2a} - \mathbf{FR}(\mathbf{T})\right\} \frac{1}{S/A_T + H[S/A_T]} \mid \mathcal{F}_{T-1}\right] \quad (39)$$

$$E\left[\frac{\partial^2}{\partial G/A_T^2} f \mid \mathcal{F}_{T-1}\right] = E\left[-\frac{2a}{\{S/A_T + H[S/A_T]\}^2} \mid \mathcal{F}_{T-1}\right] \quad (40)$$

$$\begin{aligned} & E\left[\frac{\partial^2}{\partial G/A_T \partial S/A_T} f \mid \mathcal{F}_{T-1}\right] \\ &= E\left[2a \cdot \frac{2\{\mathbf{FR}(\mathbf{T}) - \frac{1}{4a}\} \cdot \left(1 + \frac{\partial}{\partial S/A_T} H[S/A_T]\right) - (1 + \varepsilon_V^1)}{\{S/A_T + H[S/A_T]\}^2} \mid \mathcal{F}_{T-1}\right] \end{aligned} \quad (41)$$

本稿では第 t 時点における条件付期待値の回帰における状態変数として積立比率 $\mathbf{FR}(t - \Delta t)$ を選択した。これは任意の時点における一般勘定資産額、特別勘定資産額及び責任準備金額が契約時点から当該時点までの不確実性と情報を蓄積した結果と解釈したことによる。

ここで一つの疑問が生ずるだろう。最適投資戦略は満期時点から後進帰納的に導出されるにもかかわらず、当該時点における資産価値が入力情報として必要となっている。当該時点における資産価値は、契約時点から当該時点までの最適投資行動に基づき決定されるのであるから、後進帰納的にポートフォリオを決定する限り、当該時点より過去における最適投資戦略は決定できないことになる。Brandt, Goyal, Santa-Clara and Stroud[2005] では当該問題を解消し、任意の目的関数を対応可能とするために、資産価値の上下限で最適資産構成比を求めればよいとしている。

資産価値の上下限設定には幾つかの手法が考えられるが、一般勘定が特別勘定資産価値に対するプット・オプションの役割を要求されることから、本稿では契約時以降、特別勘定資産収益率が反映された一般勘定 $G/A_t^{S/A}$ 、同無リスク利子率が反映された一般勘定 G/A_t^{rf} 、当該時点における最低保証水準 $t \cdot P$ に対し、上限 G/A_t^{\max} 及び下限 G/A_t^{\min} を次掲のように設定した。

$$G/A_t^{\max} = \max[t \cdot P, G/A_t^{S/A}, G/A_t^{rf}] \cdot (1 + k) \quad (42)$$

$$G/A_t^{\min} = \min[G/A_t^{S/A}, G/A_t^{rf}] \div (1 + k) \quad (43)$$

ここで k は範囲を保守的に設定するためのマージンで 10% としている。

当該 G/A_t^{\max} 及び G/A_t^{\min} に対する仮の最適資産構成比を後進帰納的に求めておき、0 時点から前進的に投資戦略を実行することにより事後的に判明する G/A_t に対して補間処理を施し、最終的な最適資産構成比 \mathbf{x}^* を決定している*12。

3.3.2 (T-2) 時点

同様にして、

$$E\left[\frac{\partial}{\partial G/A_{T-1}}f \mid \mathcal{F}_{T-2}\right] = E\left[\frac{\partial}{\partial G/A_T}f \cdot R_T^{G/A} \mid \mathcal{F}_{T-2}\right] \quad (44)$$

$$E\left[\frac{\partial^2}{\partial G/A_{T-1}^2}f \mid \mathcal{F}_{T-2}\right] = E\left[\frac{\partial^2}{\partial G/A_T^2}f \cdot (R_T^{G/A})^2 \mid \mathcal{F}_{T-2}\right] \quad (45)$$

$$\begin{aligned} E\left[\frac{\partial^2}{\partial G/A_T \partial S/A_T}f \mid \mathcal{F}_{T-2}\right] \\ = E\left[\frac{\partial^2}{\partial G/A_T^2}f \cdot R_T^{G/A} \cdot R_T^{S/A} \cdot \varepsilon_V^1 \cdot (1 - \varepsilon_V) \right. \\ \left. + \frac{\partial^2}{\partial G/A_T \partial S/A_T}f \cdot R_T^{G/A} \cdot R_T^{S/A} \cdot (1 - \varepsilon_V) \mid \mathcal{F}_{T-2}\right] \quad (46) \end{aligned}$$

を得る。各微分係数の展開は Appendix に示す。右辺に現れる微分係数 $\frac{\partial}{\partial G/A_T}f$, $\frac{\partial^2}{\partial G/A_T^2}f$ 及び $\frac{\partial^2}{\partial G/A_T \partial S/A_T}f$ は、式 (39), 式 (40) 及び式 (41) を参照されたい。なお、上掲式における $R_T^{G/A}$ は $(T-1)$ 時点の処理で得られた最適資産構成比 \mathbf{x}_{T-1}^* に基づく一般勘定進展率である。最適資産構成比を後進帰納的に解いていくため、 $(T-2)$ 時点では既知となる。換言すれば、将来において最適投資行動をとることを前提として、当該時点の最適投資戦略を決定しているのである。

3.3.3 t 時点 ($t \in [0, T-3]$)

条件付期待値は

$$E\left[\frac{\partial}{\partial G/A_{t+1}}f \mid \mathcal{F}_t\right] = E\left[\frac{\partial}{\partial G/A_T}f \cdot \left(\prod_{l=t+2}^T R_l^{G/A}\right) \mid \mathcal{F}_t\right] \quad (47)$$

$$E\left[\frac{\partial^2}{\partial G/A_{t+1}^2}f \mid \mathcal{F}_t\right] = E\left[\frac{\partial^2}{\partial G/A_T^2}f \cdot \left(\prod_{l=t+2}^T R_l^{G/A}\right)^2 \mid \mathcal{F}_t\right] \quad (48)$$

$$\begin{aligned} E\left[\frac{\partial^2}{\partial G/A_{t+1} \partial S/A_{t+1}}f \mid \mathcal{F}_t\right] \\ = E\left[\frac{\partial^2}{\partial G/A_T^2}f \cdot \left(\prod_{l=t+2}^T R_l^{G/A}\right) \cdot \varepsilon_V^1 \right. \\ \times \left[\prod_{l=t+2}^T R_l^{S/A} \cdot (1 - \varepsilon_V)^{T-(t+1)} + \sum_{l=t+2}^{T-1} \prod_{m=t+2}^l R_m^{S/A} \prod_{o=l+1}^T R_o^{G/A} (1 - \varepsilon_V)^{l-(t+1)}\right] \\ \left. + \frac{\partial^2}{\partial G/A_T \partial S/A_T}f \cdot \left(\prod_{l=t+2}^T R_l^{G/A}\right) \cdot \left(\prod_{l=t+2}^T R_l^{S/A}\right) \cdot (1 - \varepsilon_V)^{T-(t+1)} \mid \mathcal{F}_t\right] \quad (49) \end{aligned}$$

である。なお、0 時点では状態変数について判明している情報が存在しない。従って期待値は唯一となり、最適資産構成比 \mathbf{x}_0^* も唯一に特定される。これに対し、 t 時点 ($t \in [\Delta t, T - \Delta t]$) における最適資産構成比は各状態に対応して設定される。

12 二点の最適化ポートフォリオ \mathbf{x}^{\min} 及び \mathbf{x}^{\max} に挟まれる「真の」最適化ポートフォリオ \mathbf{x}^ を、 \mathbf{x}^{\min} 及び \mathbf{x}^{\max} の補間処理で表現できるとすることは強い仮定であり、とりわけ時間間隔が大きな場合には誤差の累積する可能性がある。

式 (41), 式 (46) 及び式 (49) の構成要素である $\frac{\partial^2}{\partial G/A_T \partial S/A_T} f$ の分子にある $\frac{\partial}{\partial S/A_T} H[S/A_T]$ は, 最低保証リスクに係る責任準備金の特別勘定資産価格に対する感応度, 所謂デルタである. 以上より一般勘定の最適投資戦略 (\mathbf{x}^*) と特別勘定投資戦略 (\mathbf{y}), 保証料 (ε_P 及び ε_V), 責任準備金のデルタ ($\frac{\partial}{\partial S/A_T} H[S/A_T]$) の関係を一意に特定できたことになる.

4 数値解析結果

4.1 前提条件

4.1.1 経済前提

投資対象資産の価格過程には対数正規過程, すなわち, 収益率分布に正規分布を仮定し, パラメータは表 2 に示すとおりとした.

表 2 期待収益率, 標準偏差及び相関係数

資産クラス	期待収益率	標準偏差	相関係数				
			短期資産	国内債券	国内株式	外国債券	外国株式
短期資産	0.57%	0.70%	1.000	0.143	△0.063	△0.009	△0.009
国内債券	2.47%	3.34%	0.143	1.000	△0.053	0.086	0.017
国内株式	4.42%	19.25%	△0.063	△0.053	1.000	△0.029	0.365
外国債券	4.28%	10.20%	△0.009	0.086	△0.029	1.000	0.540
外国株式	4.88%	16.65%	△0.009	0.017	0.365	0.540	1.000

(出典) 石井・大塚 [2008].

また, 将来の予定利率過程を記述するために必要となる利率モデルには 1 変量の Vasicek Model

$$dr = \alpha [\bar{r} - r] dt + \sigma dW_t$$

を適用し, 2008 年 8 月 1 日の金利・債券データによりパラメータ推定を行った. 結果として, α に 0.08210, \bar{r} に 0.03844, σ に 0.00585 を得た. なお, 表 2 における債券価格は当該利率モデルにより記述されるものではないが, 拡散項を構成するブラウン運動を共有させることにより, 利率と債券価格の関係を整合させている.

4.1.2 特別勘定資産構成比

架空の生命保険会社における特別勘定資産構成比として, 年金積立金管理運用独立行政法人の 2009 年 6 月現在における基本ポートフォリオを適用した.

表 3 特別勘定の資産構成比

短期資産	国内債券	国内株式	外国債券	外国株式
5%	67%	11%	8%	9%

4.1.3 責任準備金評価の計算基礎

契約開始時点の予定利率は1.5%、将来における予定利率は前述のとおり、当該時点における10年利付債券のパー・クーポンを適用した。最低保証に係る責任準備金評価に際し適用される資産価格のボラティリティは表4のとおりとし、各資産収益率は独立とした。当該内容は社団法人日本アクチュアリー会 [2003]、平成8年2月29日大蔵省告示第48号に準拠している。

表4 資産価格の予想変動率

国内債券	国内株式	外国債券	外国株式
3.5%	18.4%	12.1%	18.1%

粗死亡率は1因子のリー・カーター・モデル

$$\ln(q_{x,t}) = \alpha_x + \beta_x \gamma_t + \varepsilon_{x,t} \quad (50)$$

により記述、責任準備金評価に適用する標準死亡率は当該粗死亡率に対し安全割増を計上するものとして設定した。粗死亡率については簡易生命表を入力情報、1987年から2005年を観測期間としたパラメータ推定を特異値分解により行った。誤差項は年齢及び時点に依存しない正規分布 $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ を適用し、 σ の推定結果として0.03456を得た。

なお、安全割増は2005年簡易生命表に対する生保標準生命表2007(死亡保険用)の比が一定であるものと仮定し、当該年齢別係数を粗死亡率に乗ずることで標準死亡率を定義した。従って、標準生命表における安全割増は粗死亡率の水準に比例することになり、粗死亡率が低下すれば安全割増が圧縮されることになる。

また、処理においては、死亡率と利子率及び投資資産収益率の独立性を前提としている。

表5 Lee-Carter Model におけるパラメータ

年齢	α	β	年齢	α	β
0	Δ 5.5101	0.0208	50	Δ 5.5243	0.0055
10	Δ 8.9957	0.0222	60	Δ 4.5930	0.0101
20	Δ 7.2709	0.0161	70	Δ 3.6958	0.0081
30	Δ 7.1823	0.0015	80	Δ 2.6523	0.0126
40	Δ 6.5086	0.0028	90	Δ 1.6839	0.0105

年数	γ	年数	γ
1987	11.8330	1997	Δ 2.4740
1988	11.9430	1998	Δ 0.4088
1989	10.2490	1999	Δ 2.4175
1990	9.9979	2000	Δ 6.3878
1991	7.3512	2001	Δ 9.7975
1992	7.8563	2002	Δ 12.1780
1993	5.7392	2003	Δ 13.6380
1994	4.3411	2004	Δ 14.8040
1995	7.0338	2005	Δ 13.8480
1996	Δ 0.3937		

4.1.4 契約内容

モデルにおける保険契約の内容は次掲のとおりとした。

表 6 評価対象の契約内容

被保険者年齢	30 歳
性別	男性
保険期間	10 年間
保険料	10,000 円 (年払)
最低保証内容	被保険者の死亡時若しくは満期到達時に既払込保険料相当額を保証.
保証料, 予定事業費及び信託報酬	$\varepsilon_P^1 + \varepsilon_P^2 = 5\%$ $\varepsilon_V^1 + \varepsilon_V^2 = 2\%, \varepsilon_V^3 = 0.2\%$

4.1.5 その他の注記事項

関数 u のパラメータ $u(\mathbf{FR}(\mathbf{T})) = \mathbf{FR}(\mathbf{T}) - a \cdot \mathbf{FR}(\mathbf{T})^2$ において, a は 0.5 とした.

キャッシュフローのタイミング 単位時間を n 分割する場合, 保険料の払込は期始, 積立金からの保証料取崩は期末で発生するものとした.

基底関数 条件付期待値評価を回帰により行う場合の説明変数となる基底関数を構成する直交多項式には, 5 次の Laguerre 多項式を適用した.

単位時間あたりの試行回数 保険期間全体では「(保険期間) × (分割数) × (状態数)」のグリッドを持つことになる. 本稿では単位時間あたりの状態数, すなわち, 試行回数を 1,000 回とした.

ソフトウェア 数値解析は Compaq Visual Fortran で行い, 回帰分析には IMSL 数値計算ライブラリの DLSBRR を適用した.

ハードウェア プロセッサは Intel Pentium4 CPU 3.40GHz, メモリは 4.0GB, OS は Windows VISTA である.

4.2 数値解析結果

4.2.1 保証料水準の十分性

保証料に保険料比例部分・積立金比例部分等のように複数の決定基準を与える場合、各基準に対応する保証料を一意に特定することは困難であろう。実践的な対応の一つとしては、予め定められる予算制約の範囲内で各基準に対応する保証料を与え、契約時点の最低保証リスクに係る責任準備金額を確認することが考えられる。当該金額が正値をとるならば、それは給付現価が保険料収入現価を上回っているということであり、保証料は十分ではないと考えられるためである。図2は横軸に保険料比例の保証料、縦軸に積立金比例の保証料をとり、契約時責任準備金額が正値となる範囲を網かけしたものである。

ただし、契約時点における責任準備金評価においては、参照資産となる特別勘定 S/A_t^{INDEX} を構成する要素は平成8年2月29日大蔵省告示第48号に規定される資産価格のボラティリティ及び期待収益率のみであり、眼前及び将来の経済環境を想定したものではないことに留意が必要である。設定された保証料の組み合わせが図2の白い領域に位置づけられるものであったとしても、投資資産の現実の収益率及びボラティリティが責任準備金の計算基礎より乖離する場合、また、適切な投資戦略が執行されない場合等には、当該保険契約の財政状況は将来において望ましくない状態に陥る可能性を否定できないということである。

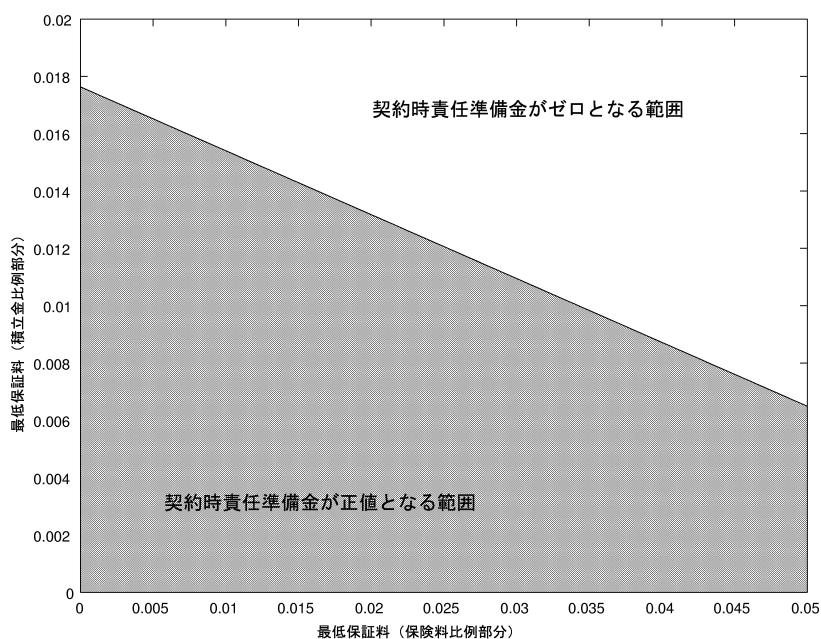


図2 契約時責任準備金と保証料水準

4.2.2 最適投資戦略の計算例

満期時点の単位時点前 ($T - \Delta t$ 時) において、最適資産構成比を持つ一般勘定と特別勘定基本ポートフォリオをそれぞれの資産規模で加重平均した全勘定資産構成比を図3に示す。ただし、単位時間の分割数は50であり、横軸は最低保証水準に対する特別勘定の充足率の5%タイル値、10%-90%タイル値、95%タイル値を適用している。何れの資産構成比も合計は1.0となるが、最低保証水準に対する特別勘定の充足率が1.0を超える範囲(50%タイル値以降)では各投資資産の構成比が $[0, 1]$ であることに対し、充足率が1.0を下回る範囲では短期資産の構成比が負値となり、他資産の構成比が1.0を超過している。つまり、短期資産を売り建て調達した資

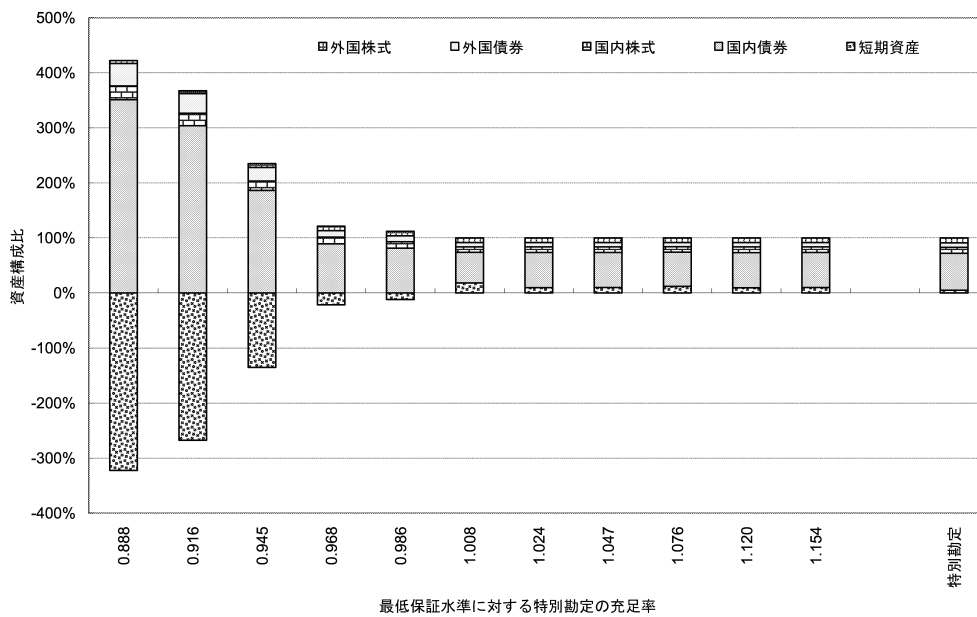


図3 全勘定の資産構成比 ($T - \Delta t$ 時点)

金を他資産に配賦することでレバレッジをかけている。当該資産構成比に対するリスク寄与度^{*13}は図4のとおりとなる。最低保証水準に対する特別勘定の充足率が高くなるに伴い、全勘定ポートフォリオ収益率の標準偏

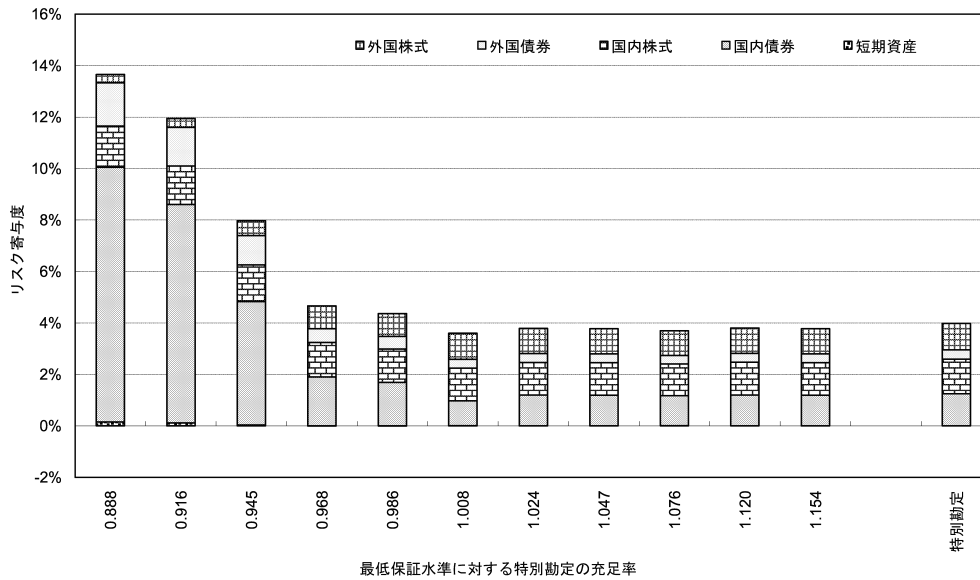


図4 全勘定のリスク寄与度 ($T - \Delta t$ 時点)

差の低下する様子が確認できる。

*13 当該ポートフォリオ収益率の標準偏差を投資対象資産毎に分解したもの。

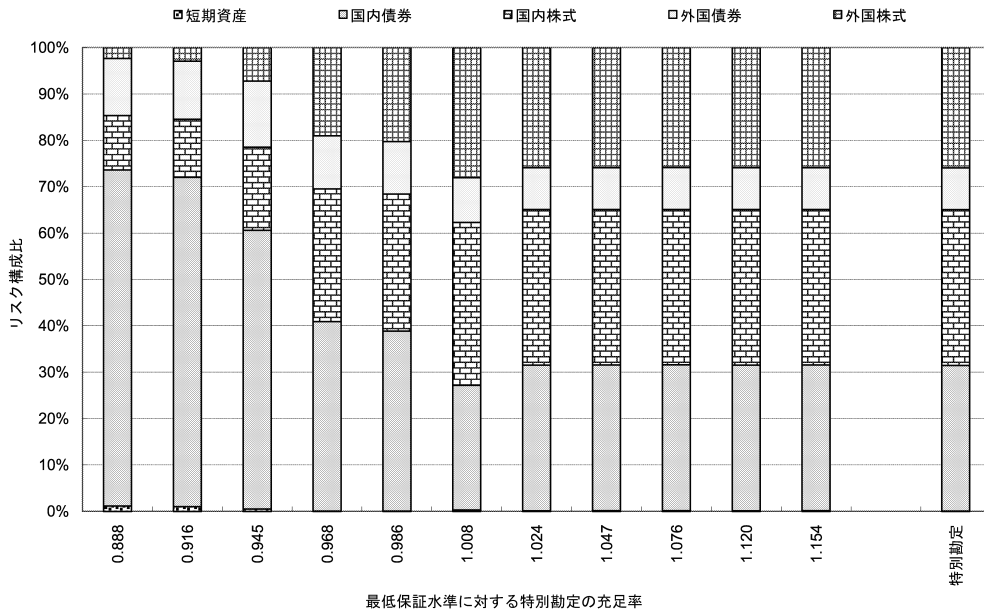


図5 全勘定のリスク構成比 ($T - \Delta t$ 時点)

また、リスク寄与度を基準化して見れば、どの投資資産にリスク配分を行っているかを確認することもできる。最低保証水準に対する特別勘定の充足率が低い範囲では国内債券へのリスク配分が高くなるが、充足率の上昇に伴い、内外株式へのリスク配分が増加している。

全勘定ポートフォリオ収益率の標準偏差を横軸、同期期待値を縦軸にプロットした結果が図6である。積立比率 $FR(t)$ の低下に伴い、全勘定の構造は特別勘定基本ポートフォリオと比較し、期待値・標準偏差ともに高くなっている。これは既述のとおり、一般勘定でレバレッジをかけるためである。

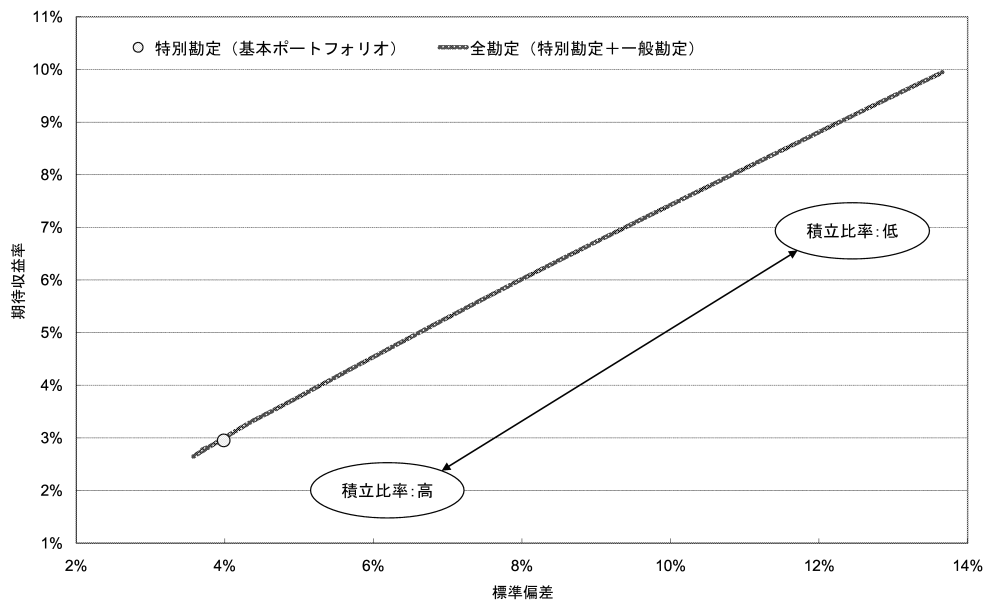


図6 ポジションの比較

4.2.3 最適投資戦略の結果

積立金比例部分及び保険料比例部分の保証料をそれぞれ1%とし、一般勘定を多期間動的最適化戦略に基づき運用するものとする。当該保証料の組み合わせは、図2の網かけ部分に位置するものであり、契約時責任準備金をゼロとできる水準ではない。このとき、満期時点における積立比率が各状態に対応しどのように分布するかを可視化したものが図7から図12である。

各図は「特別勘定資産構成比に基づき運用した一般勘定資産額と特別勘定資産額の合計額を既払込保険料で基準化した値」を横軸にとり、縦軸に「多期間動的最適化戦略に基づき運用した一般勘定資産額と特別勘定資産額の合計額を既払込保険料で基準化した値」を(*)、「特別勘定資産構成比に基づき運用した一般勘定資産額と特別勘定資産額の合計額を既払込保険料で基準化した値」及び「最低保証水準」を(・)でプロットしている。各図の差異は単位時間あたりの分割数である。すなわち、1年間におけるリバランス回数の差異が投資効果に及ぼす影響を確認することができる。高々年2回程度のリバランス(図7及び図8)では、最低保証水準を運用成果で確保できそうにはないが、年4回のリバランス(図9)以降では徐々に最低保証水準に迫り、日次基準(図12)では意図するペイオフを概ね再現できている。

表7は満期時点における積立比率の期待値、標準偏差、下方積率を「一般勘定を多期間動的最適化戦略に基づき運用した場合」を左側、「一般勘定を特別勘定基本ポートフォリオに基づき運用した場合^{*14}」を右側に示したものである。一般勘定における最低保証は、特別勘定資産が払込保険料額を下回る場合にのみ行われるのであるから、投資戦略の効果は下方積率により評価することができるだろう。何らヘッジ戦略を採らない場合に比較して、近似的ながらも一般勘定で最適化戦略を採った結果は下方積率、すなわち、積立不足が発生した場合の期待損失額は圧縮されている。また、リバランスを月次基準で行う場合には、ヘッジ戦略を採らない場合の4割程度、週次基準で行う場合には同2割程度、日次基準で行う場合には同1割程度まで下方積率は圧縮されており、リバランス回数の増加が望ましい結果となっている。ただし、当該結果においては取引コストを考慮していない。取引コストを考慮すると、コストが目的関数の改善度を上回る範囲ではリバランスが禁止されるため、回数の増加が必ずしも比例して下方積率の圧縮をもたらさない場合もあることに留意が必要である。

取引コストは保有資産の規模等の影響を受けるものと想定されるが、この他にヘッジ効果を低下させる要因としては、投資資産の保有制約、引受保険会社の格付低下、想定を超える契約者行動等が考えられる。

表7 投資戦略及び時間分割数の比較

分割数	多期間動的最適化戦略の場合			特別勘定投資戦略を準用の場合			処理時間(秒)
	期待値	標準偏差	下方積率	期待値	標準偏差	下方積率	
1	1.0377	0.0416	0.0065	1.0375	0.0451	0.0078	37.471
2	1.0337	0.0498	0.0085	1.0320	0.0482	0.0099	41.091
4	1.0469	0.0435	0.0052	1.0355	0.0473	0.0089	40.529
12	1.0456	0.0397	0.0040	1.0324	0.0481	0.0098	68.828
50	1.0515	0.0361	0.0022	1.0361	0.0483	0.0093	1189.601
100	1.0541	0.0340	0.0014	1.0390	0.0452	0.0075	8519.963
250	1.0520	0.0314	0.0008	1.0356	0.0471	0.0087	99274.403

(注1) 保証料は $\varepsilon_p^1 = \varepsilon_v^1 = 1\%$ としている。

^{*14} 当該投資行動は払込保険料を全て特別勘定で運用し、何らヘッジ戦略を取らない場合に相当する。

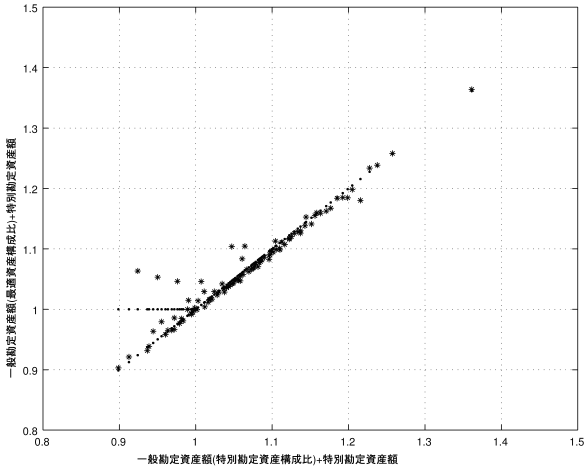


図 7 単位時間の分割数=1

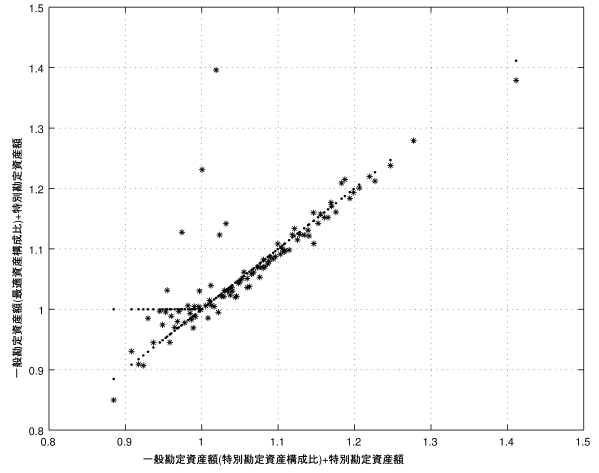


図 8 単位時間の分割数=2

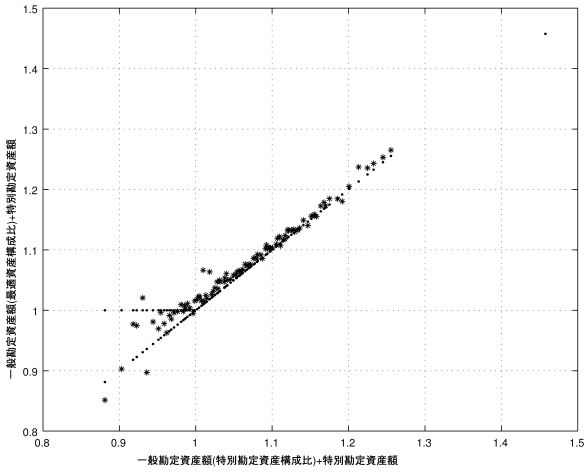


図 9 単位時間の分割数= 4

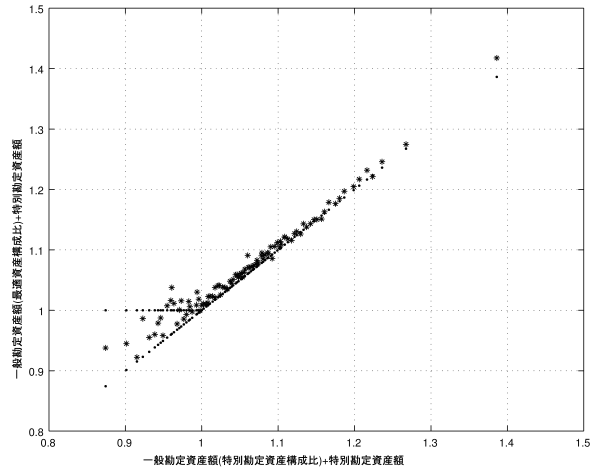


図 10 単位時間の分割数= 12

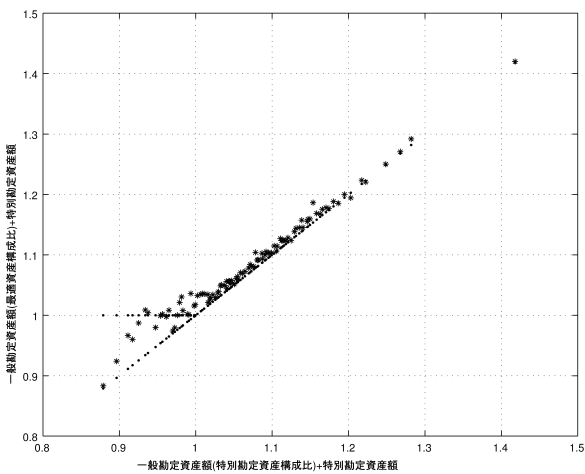


図 11 単位時間の分割数= 50

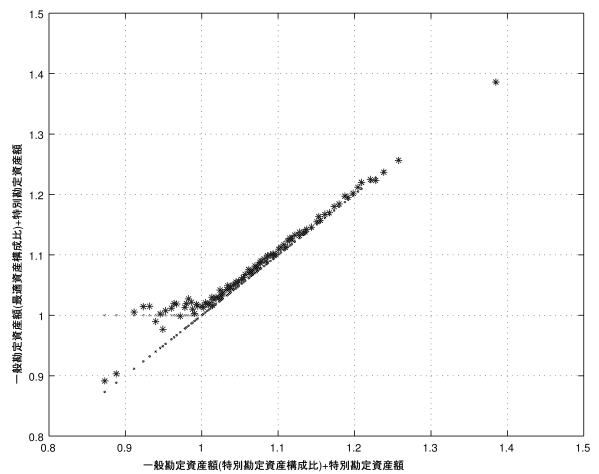


図 12 単位時間の分割数= 250

表 8 は、保証料水準が契約時責任準備金をゼロとする場合と、当該水準に満たない場合を比較したものである。保証料の保険料比例部分 (ε_P^1) と積立金比例 (ε_V^1) の位置は図 13 で確認することができる。

図 13 の右下がりの直線より下の部分は図 2 の網かけ部分であり、直線からの乖離は保証料収入の減少を意味する。 $(\varepsilon_P^1, \varepsilon_V^1) = (1\%, 0.5\%)$ 程度に乖離すると、下方積率の圧縮はヘッジ戦略を採らない場合の 85% 程度である。直線近傍に位置する $(\varepsilon_P^1, \varepsilon_V^1) = (0.5\%, 1.6\%)$ 及び $(4\%, 0.8\%)$ ではヘッジ戦略を採らない場合に比較して下方積率を 2 割強に、直線の上に位置する $(\varepsilon_P^1, \varepsilon_V^1) = (3.5\%, 1.9\%)$ では下方積率を 1 割未満に圧縮できており、保証料の水準も投資戦略の前に検討されるべきということが再確認できる。

表 8 保証料水準の比較

保証料		多期間動的最適化戦略の場合			特別勘定投資戦略を準用の場合		
保険料比例	積立金比例	期待値	標準偏差	下方積率	期待値	標準偏差	下方積率
0.005	0.016	1.0767	0.0398	0.0011	1.0663	0.0500	0.0046
0.01	0.005	1.0023	0.0389	0.0144	1.0059	0.0462	0.0169
0.04	0.008	1.0676	0.0384	0.0012	1.0588	0.0493	0.0055
0.015	0.015	1.0784	0.0401	0.0007	1.070	0.0497	0.0036
0.035	0.019	1.1125	0.0403	0.0000	1.1193	0.0496	0.0004
0.045	0.009	1.0776	0.0385	0.0005	1.0729	0.0486	0.0035

(注) 単位時間の分割数は 50 回としている。

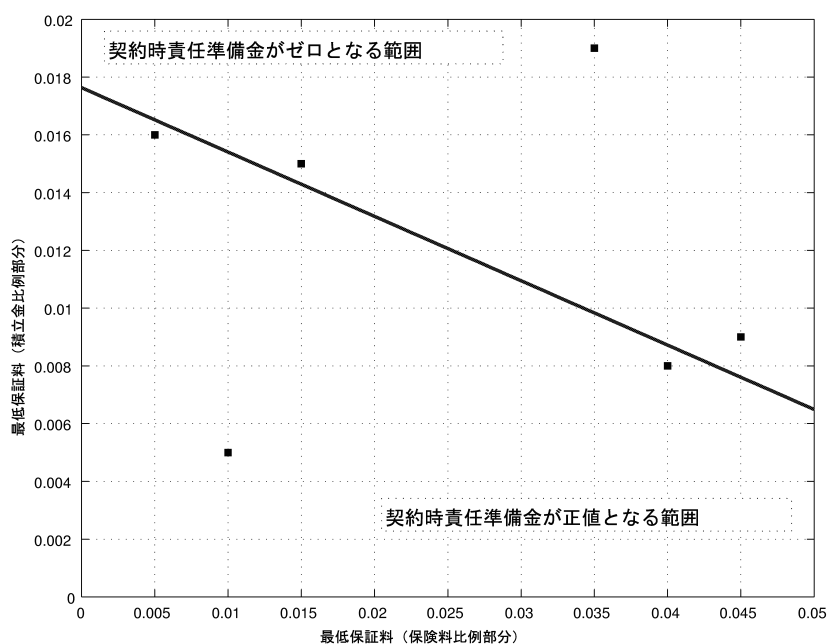


図 13 保証料水準の比較

5 結論

本稿では多期間動的最適化の枠組みにより、最低保証を付した変額年金保険の投資戦略構築手法を提示した。任意の時点、4階微分可能であることを前提とした目的関数への任意の関数形の適用及び任意の給付形態における一般勘定と特別勘定、保証料及び最低保証部分の価格感応度（所謂デルタ）、保険料払込方法、投資資産収益率の期待収益率・標準偏差・相関係数を通じた経済環境の関係を式(37)に明示できたことが主たる成果である。

当該投資戦略は完備市場を想定するデルタ・ヘッジとは異なり、保険事故発生時における利得の複製を意図するものではない。決算処理に重点を置き、責任準備金額の確保を意図したものである。本稿では期中の保険事故発生を想定せず、目的関数も満期時点の積立比率に対してのみ定義しているが、自然な拡張として複数の保険年度末決算時における積立比率に対する目的関数を再定義すること、期中のキャッシュフローに不確実性を与え、解約・転換等契約者行動に状態依存を想定すること等が検討できよう。ただし、当該拡張に際しては計算負荷の増加が当然に予想される。実務への適用に際しては、実行可能性に留意する必要がある。

また、「真」の最適化ポートフォリオを資産価格の上下限に対応するポートフォリオで補間する手法にも、挟み込むグリッド間隔をより狭くする等の改善が望まれる。

価格設定の誤り、投資戦略の失敗そして想定を超える経済環境の変化等により、一般勘定において財源不足が懸念される場合には、責任準備金の追加積立、自己資本（ソルベンシー・マージン）の充当、営業戦略の変更等により対応することとなる。シミュレーションをベースとするBGSS法の長所の一つは、一般勘定における最適投資戦略を求めると同時に、①デフォルト状態の発生率評価による保証料水準の適正性を確認し、②予想不足財源額の評価による必要内部留保水準の把握を可能とすることである。従って、当該モデルの確保は保険会社における商品設計及び投資戦略の意思決定のみならず、監督官庁における商品概要及び内部留保水準のチェック、格付機関及び販売を代理する金融機関における当該商品のデューデリジェンスにも有効なものとなる。

また、本稿では対象を変額年金に限定しているが、企業年金制度・公的年金制度に適用することも当然に考えられる。例えば確定給付企業年金制度では、確定給付企業年金法第61条、同第62条及び同第63条で財政検証制度が規定され、責任準備金及び最低積立基準額に対する保有資産の下限水準が明示されている。確定給付企業年金法施行規則第84条において「長期にわたり維持すべき資産の構成割合を適切な方法により定めること」が要求されているため、基本ポートフォリオそのものを動的に管理することは望ましいことではなく、そもそもとして実践的でないが、基本ポートフォリオ(y)を所与として、ヘッジ戦略の実践(x)を運用機関に委託する等の対応ができるだろう。本稿で示したモデルを適用すれば、投資戦略に加え、どの程度の資金配賦が必要となるかも(ε_P)を通じて把握することが可能である。

A Appendices

A.1 保険数学における記号の説明

年齢 x の生存者数を l_x , 死亡者数を d_x とする. 任意の時点 t において, 生存者数と死亡者数の関係は次掲のとおりとなる.

$$l_{x+t} - d_{x+t} = l_{x+t+1} \quad (51)$$

年齢 x の被保険者に対する保険金額 1, 保険期間 n , 年払の養老保険の保険料 $P_{x:\overline{n}|}$ は, 次の手順により求めることができる.

給付現価 養老保険とは保険事故発生時 (死亡時) 及び保険事故未発生下での満期時に保険金額を給付する保険商品である. 従って, 給付額の現在価値 S_x は, 保険金を期末払, 予定利率を i とすると次式により定義される.

$$\begin{aligned} S_x &= \frac{1}{l_x} \sum_{u=0}^{n-1} \frac{d_{x+u}}{(1+i)^{u+1}} + \frac{l_{x+n}}{l_x(1+i)^n} \\ &= \sum_{u=0}^{n-1} \left(\frac{1}{1+i} \right)^{u+1} \frac{l_{x+u}}{l_x} \frac{d_{x+u}}{l_{x+u}} + \left(\frac{1}{1+i} \right)^n \frac{l_{x+n}}{l_x} \end{aligned} \quad (52)$$

ここで, $v = \frac{1}{1+i}$, $\frac{l_{x+t}}{l_x} = {}_t p_x$, $\frac{d_x}{l_x} = q_x$, $D_x = v^x l_x$, $C_x = v^{x+1} d_x$ とすると, 式 (52) は

$$S_x = \sum_{u=0}^{n-1} v^{u+1} {}_u p_x q_{x+u} + v^n {}_n p_x \quad (53)$$

$$= \sum_{u=0}^{n-1} \frac{C_{x+u}}{D_x} + \frac{D_{x+n}}{D_x} \quad (54)$$

となる. 更に, $N_x = \sum_{u=0}^{\infty} D_{x+u}$, $M_x = \sum_{u=0}^{\infty} C_{x+u}$, とすれば,

$$S_x = \frac{(M_x - M_{x+n}) + D_{x+n}}{D_x} := A_{x:\overline{n}|} \quad (55)$$

と記述できる.

収入現価 同様にして保険料の収入現価 G_x を求められる. 保険料拠出が平準的に行われるものとすれば,

$$G_x = P_{x:\overline{n}|} \cdot \frac{1}{l_x} \sum_{u=0}^{n-1} \frac{l_{x+u}}{(1+i)^u} \quad (56)$$

$$= P_{x:\overline{n}|} \cdot \sum_{u=0}^{n-1} v^u {}_u p_x \quad (57)$$

$$= P_{x:\overline{n}|} \cdot \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} := P_{x:\overline{n}|} \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|} \quad (58)$$

保険料の決定 給付現価と収入現価が等価となるように, すなわち, 収支相当の原則に則り, 保険料を決定すればよい.

$$P_{x:\overline{n}|} \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = A_{x:\overline{n}|} \quad (59)$$

$$\therefore P_{x:\overline{n}|} = \frac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} := \frac{(M_x - M_{x+n}) + D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} \quad (60)$$

責任準備金 責任準備金は将来法若しくは過去法により評価される。将来法では「将来の給付を賄うために現時点で留保しておくべき金額」として、過去法では「これまでに収受された保険料から支払われた給付金額を控除した残額」として責任準備金が評価される。第 t 時点の責任準備金 ${}_tV_{x:\overline{n}|}$ を将来法により記述すれば、

$$S_{x+t} = A_{x+t:\overline{n-t}|} \quad (61)$$

$$= \frac{(M_{x+t} - M_{x+n}) + D_{x+n}}{D_{x+t}} \quad (62)$$

$$G_{x+t} = P_{x:\overline{n}|} \cdot \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|} \quad (63)$$

$$= P_{x:\overline{n}|} \cdot \frac{N_{x+t} - N_{x+n}}{D_{x+t}} \quad (64)$$

$$\therefore {}_tV_{x:\overline{n}|} = S_{x+t} - G_{x+t} \quad (65)$$

$$:= A_{x+t:\overline{n-t}|} - P_{x:\overline{n}|} \cdot \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|} \quad (66)$$

となる。

ファクラーの再帰式 x 歳契約の任意の保険契約について、第 t 時点の責任準備金を V_t 、保険料を P とする。第 $t+1$ 時点の責任準備金は、第 t 時点の責任準備金及び拠出保険料に 1 期間付利し、期末に当該年度に発生する給付金を控除すればよいので、次掲のように記述される。

$$l_{x+t+1} \cdot V_{t+1} = l_{x+t} \cdot (V_t + P) \cdot (1+i) - d_{x+t} \quad (67)$$

ただし、ここでは期中での解約を想定していない。

さて、式 (67) の両辺に v^{x+t+1} を乗ずれば、

$$D_{x+t+1} \cdot V_{t+1} = D_{x+t} \cdot (V_t + P) - C_{x+t} \quad (68)$$

を得る。 $t = 0 \sim (n-1)$ まで辺々加えれば、

$$D_{x+n} \cdot V_n = D_x \cdot V_0 + P \sum_{t=0}^{n-1} D_{x+t} - \sum_{t=0}^{n-1} C_{x+t}$$

$$\therefore P = \frac{D_{x+n} \cdot V_n - D_x \cdot V_0 + (M_x - M_{x+n})}{N_x - N_{x+n}} \quad (69)$$

契約時責任準備金 (V_0) を 0、満期時責任準備金 (V_n) を 0 とすれば定期保険の保険料 $P_{x:\overline{n}|}^1$ を、1 とすれば養老保険の保険料 $P_{x:\overline{n}|}$ が得られる。

また、 $t = 0 \sim (t-1)$ まで辺々加えれば過去法責任準備金が、 $t = t \sim (n-1)$ まで辺々加えれば将来法責任準備金を得られる。この場合にも、満期時責任準備金 (V_n) を 0 とすれば定期保険の第 t 年度末責任準備金 ${}_tV_{x:\overline{n}|}^1$ を、1 とすれば養老保険の第 t 年度末責任準備金 ${}_tV_{x:\overline{n}|}$ が求められる。

A.2 異なる計算基礎率の下における契約価値の差異

適用される計算基礎率が異なる場合の責任準備金の差異は、式 (67) に示したファクターの再帰式の適用により評価することができる。死亡率及び予定利率に差異を与えるものとし、生存者数 l_x 、死亡者数 d_x 及び責任準備金額 V_t ではプライムの有無により計算基礎率の差異を表現する。一方、保険料 P は適用される計算基礎率に依存せず同一であるものとし^{*15}、予定利率を i 、時点 t で期間 $[s, s+1]$ をカバーするフォワード LIBOR レートを $L_t(s, s+1)$ とする。ただし、信用リスクの無い満期 T 年の割引債の時点 t における価格 $B(t, T)$ に対し、フォワード LIBOR レートは次式により定義される。

$$L_t(s, s+1) = \frac{B(t, s) - B(t, s+1)}{B(t, s+1)} \quad (70)$$

今、異なる計算基礎率下において、次掲式が成立している。

$$l_{x+t} \cdot (V_t + P) \cdot (1+i) - d_{x+t} = l_{x+t+1} \cdot V_{t+1} \quad (71)$$

$$l_{x+t'} \cdot (V_t' + P) \cdot [1 + L_t(t, t+1)] - d_{x+t'} = l_{x+t'+1} \cdot V_{t'+1} \quad (72)$$

ここで、 $l_{x'} = l_x + \Delta l_x$ 、 $V_t' = V_t + \Delta V_t$ として、式 (72) より式 (71) を控除すると、

$$\begin{aligned} l_{x+t} \cdot (V_t + P) \cdot [L_t(t, t+1) - i] + l_{x+t'} \cdot \Delta V_t \cdot [1 + L_t(t, t+1)] - \Delta d_{x+t} \\ + \Delta l_{x+t} \cdot (V_t + P) \cdot [1 + L_t(t, t+1)] = l_{x+t'+1} \cdot \Delta V_{t'+1} + \Delta l_{x+t'+1} \cdot V_{t'+1} \end{aligned} \quad (73)$$

両辺に $B(t, t+1)$ を乗じ整理すると

$$\begin{aligned} (\Delta V_t \cdot l_{x+t'} + \Delta l_{x+t} \cdot V_t) - (\Delta V_{t+1} \cdot l_{x+t'+1} + \Delta l_{x+t+1} \cdot V_{t+1}) \cdot B(t, t+1) \\ = [l_{x+t} \cdot (V_t + P) \cdot [i - L_t(t, t+1)] + \Delta d_{x+t}] \cdot B(t, t+1) - \Delta l_{x+t} \cdot P \end{aligned} \quad (74)$$

となる。同様の処理を $(n-1)$ 時点まで反復し、辺々を加算すれば

$$\begin{aligned} (\Delta V_t \cdot l_{x+t'} + \Delta l_{x+t} \cdot V_t) - (\Delta V_n \cdot l_{x+n'} + \Delta l_{x+n} \cdot V_n) \cdot B(t, n) \\ = \sum_{k=t}^{n-1} B(t, k+1) \cdot [l_{x+k} \cdot (V_k + P) \cdot [i - L_t(k, k+1)] + \Delta d_{x+k}] - \sum_{k=t}^{n-1} \Delta l_{x+k} \cdot P \cdot B(t, k) \end{aligned} \quad (75)$$

を得る。

不確実性を利子率にのみ想定するのであれば、 Δd_x 及び Δl_x はゼロであり、 $l_{x'} = l_x$ となるので、

$$\Delta V_t \cdot l_{x+t} - \Delta V_n \cdot l_{x+n} \cdot B(t, n) = \sum_{k=t}^{n-1} B(t, k+1) \cdot l_{x+k} \cdot (V_k + P) \cdot [i - L_t(k, k+1)] \quad (76)$$

保険金額及び保険種類が同一であれば、満期時点の責任準備金額は同一、すなわち、 $\Delta V_n = 0$ であるので、

$$\begin{aligned} \Delta V_t &= \sum_{k=t}^{n-1} B(t, k+1) \cdot \frac{l_{x+k}}{l_{x+t}} \cdot (V_k + P) \cdot [i - L_t(k, k+1)] \\ &\equiv V_t' - V_t \end{aligned}$$

以上より、式 (2) が証明された。

^{*15} 保険料と責任準備金の計算基礎率が異なることに何ら問題はない。保険業法施行規則第 10 条は、第 1 号を計算基礎率を含む保険料の計算方法、第 2 号を計算基礎率を含む責任準備金の計算方法に充てており、保険料及び責任準備金に対し必ずしも同一の計算基礎率適用を要求していない。実務においても、変額保険の保証料には年齢に依存せず、同一の料率が適用されている例を見ることができる。

A.3 式 (35) の $G/A_{t+1}^{x,y}$ 及び S/A_{t+1}^y に関する積率評価

$$\begin{aligned}
E[G/A_{t+1}^{x,y} | \mathcal{F}_t] &= (G/A_t + P \cdot \varepsilon_P^1) \cdot (\mathbf{M} - r_{t+1}\mathbf{e})^T \mathbf{x} \\
&\quad + [S/A_t + P \cdot (1 - \varepsilon_P)] \cdot \varepsilon_V^1 \cdot (\mathbf{M} - r_{t+1}\mathbf{e})^T \mathbf{y}
\end{aligned} \tag{77}$$

$$\begin{aligned}
E[(G/A_{t+1}^{x,y})^2 | \mathcal{F}_t] &= (G/A_t + P \cdot \varepsilon_P^1)^2 \cdot \mathbf{x}^T \Gamma \mathbf{x} + \{S/A_t + P \cdot (1 - \varepsilon_P)\}^2 \cdot (\varepsilon_V^1)^2 \cdot \mathbf{y}^T \Gamma \mathbf{y} \\
&\quad + 2\varepsilon_V^1 \cdot (G/A_t + P \cdot \varepsilon_P^1) \cdot [S/A_t + P \cdot (1 - \varepsilon_P)] \cdot \mathbf{x}^T \Gamma \mathbf{y}
\end{aligned} \tag{78}$$

$$\begin{aligned}
E[S/A_{t+1}^y | \mathcal{F}_t] &= [S/A_t + P \cdot (1 - \varepsilon_P)] \cdot (1 - \varepsilon_V) \cdot (\mathbf{M} - r_{t+1}\mathbf{e})^T \mathbf{y}
\end{aligned} \tag{79}$$

$$\begin{aligned}
E[(S/A_{t+1}^y)^2 | \mathcal{F}_t] &= (1 - \varepsilon_V)^2 \cdot [S/A_t + P \cdot (1 - \varepsilon_P)]^2 \cdot \mathbf{y}^T \Gamma \mathbf{y}
\end{aligned} \tag{80}$$

$$\begin{aligned}
E[G/A_{t+1}^{x,y} \cdot S/A_{t+1}^y | \mathcal{F}_t] &= (1 - \varepsilon_V) \cdot [S/A_t + P \cdot (1 - \varepsilon_P)] \cdot (G/A_t + P \cdot \varepsilon_P^1) \cdot \mathbf{x}^T \Gamma \mathbf{y} \\
&\quad + \varepsilon_V^1 \cdot (1 - \varepsilon_V) \cdot [S/A_t + P \cdot (1 - \varepsilon_P)]^2 \cdot \mathbf{y}^T \Gamma \mathbf{y}
\end{aligned} \tag{81}$$

ただし, $\Gamma = (\mathbf{M} - r_{t+1}\mathbf{e})(\mathbf{M} - r_{t+1}\mathbf{e})^T + \Omega$ である.

A.4 t 時点の目的関数を構成する微分係数

式 (44) から式 (49) の微分係数の展開は次掲のとおりである.

$$\frac{\partial}{\partial G/A_{t+1}} f = \frac{\partial}{\partial G/A_T} f \cdot \frac{\partial G/A_T}{\partial G/A_{t+1}} + \frac{\partial}{\partial S/A_T} f \cdot \frac{\partial S/A_T}{\partial G/A_{t+1}} \tag{82}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2}{\partial G/A_{t+1}^2} f \\
&= \frac{\partial^2}{\partial G/A_T^2} f \cdot \left(\frac{\partial G/A_T}{\partial G/A_{t+1}}\right)^2 + 2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial G/A_T \partial S/A_T} f \cdot \frac{\partial G/A_T}{\partial G/A_{t+1}} \cdot \frac{\partial S/A_T}{\partial G/A_{t+1}} \\
&\quad + \frac{\partial^2}{\partial S/A_T^2} f \cdot \left(\frac{\partial S/A_T}{\partial G/A_{t+1}}\right)^2 + \frac{\partial}{\partial G/A_T} f \cdot \frac{\partial^2 G/A_T}{\partial G/A_{t+1}^2} + \frac{\partial}{\partial S/A_T} f \cdot \frac{\partial^2 S/A_T}{\partial G/A_{t+1}^2}
\end{aligned} \tag{83}$$

$$\frac{\partial}{\partial S/A_{t+1}} f = \frac{\partial}{\partial G/A_T} f \cdot \frac{\partial G/A_T}{\partial S/A_{t+1}} + \frac{\partial}{\partial S/A_T} f \cdot \frac{\partial S/A_T}{\partial S/A_{t+1}} \tag{84}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2}{\partial S/A_{t+1}^2} f \\
&= \frac{\partial^2}{\partial G/A_T^2} f \cdot \left(\frac{\partial G/A_T}{\partial S/A_{t+1}}\right)^2 + 2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial G/A_T \partial S/A_T} f \cdot \frac{\partial G/A_T}{\partial S/A_{t+1}} \cdot \frac{\partial S/A_T}{\partial S/A_{t+1}} \\
&\quad + \frac{\partial^2}{\partial S/A_T^2} f \cdot \left(\frac{\partial S/A_T}{\partial S/A_{t+1}}\right)^2 + \frac{\partial}{\partial G/A_T} f \cdot \frac{\partial^2 G/A_T}{\partial S/A_{t+1}^2} + \frac{\partial}{\partial S/A_T} f \cdot \frac{\partial^2 S/A_T}{\partial S/A_{t+1}^2}
\end{aligned} \tag{85}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2}{\partial G/A_T \partial S/A_T} f \\
&= \frac{\partial^2}{\partial G/A_T^2} f \cdot \frac{\partial G/A_T}{\partial G/A_{t+1}} \cdot \frac{\partial G/A_T}{\partial S/A_{t+1}} + \frac{\partial^2}{\partial S/A_T^2} f \cdot \frac{\partial S/A_T}{\partial G/A_{t+1}} \cdot \frac{\partial S/A_T}{\partial S/A_{t+1}} \\
&\quad + \frac{\partial^2}{\partial G/A_T \partial S/A_T} f \cdot \left(\frac{\partial G/A_T}{\partial G/A_{t+1}} \cdot \frac{\partial S/A_T}{\partial S/A_{t+1}} + \frac{\partial G/A_T}{\partial S/A_{t+1}} \cdot \frac{\partial S/A_T}{\partial G/A_{t+1}} \right) \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial G/A_T} f \cdot \frac{\partial^2 G/A_T}{\partial G/A_{t+1} \partial S/A_{t+1}} + \frac{\partial}{\partial S/A_T} f \cdot \frac{\partial^2 S/A_T}{\partial G/A_{t+1} \partial S/A_{t+1}}
\end{aligned} \tag{86}$$

A.5 Mortality Index, Mortality Derivatives の事例

A.5.1 Mortality Index

2009年6月現在において、すでに4つのインデックスが市場に投入されている。後掲する SCOR Global Life の SWAP 契約は JP Morgan の LifeMetrix を参照するものである。

表9 取引可能な死亡率インデックス

名称	提供会社	対象国	提供開始時期	更新頻度
Credit Suisse Longevity Index	Credit Suisse	米国	2006年3月	年次
LifeMetrix	JP Morgan	米国	2007年3月	年次
		イギリス・ウェールズ	2007年3月	
		オランダ	2007年10月	
		ドイツ	2008年4月	
Xpect	Deutsche Börse	ドイツ	2008年3月	月次
		オランダ	2008年4月	
QxX	Goldman Sachs	米国	2008年3月	月次

A.5.2 Mortality Derivatives

次掲の取引事例は、参照する死亡率インデックスに対しキャッシュフローを増減することにより、死亡率上昇に伴うリスクを投資家若しくは取引の相手方に移転するものとなっている。すなわち、デリバティブ取引が再保険の代替機能を果たしている。

表10 Mortality Swap の契約例

契約年月	スポンサー	期間	ノックイン/上限	キャッシュフロー
Jan-2008	SCOR Global Life	4年	115%/125%	1億ドル+3600万ユーロ
Feb-2008	Lucida	—	—	—

(出典1) "Trading Risk", Issue Number 2, March/April 2008.

(出典2) Johanna Symmons, "Lucida guards against longevity", Financial News, 19th February 2008.

(出典3) SCOR Press Release, "SCOR enters fully collateralized USD 100 million and EUR 36 million mortality risk swap", 3rd March 2008.

表 11 Mortality Index Bond の発行例

発行年月	スポンサー	SPV	規模	期間	削減/没収水準	クーポン
Dec-2003	Swiss Re	Vita Capital I	4 億米ドル	3 年	130%/150%	L+135bps
Apr-2005	Swiss Re	Vita Capital II	6200 万米ドル	5 年	120%/125%	L+90bps
			2 億米ドル	5 年	115%/120%	L+140bps
			1 億米ドル	5 年	110%/115%	L+190bps
May-2006	Scottish Re	Tartan Capital	7500 万米ドル	3 年	115%/120%	L+19bps
			8000 万米ドル	3 年	110%/115%	L+300bps
Nov-2006	AXA	Osiris Capital	1 億米ドル	4 年	114%/119%	E+20bps
			5000 万米ドル	4 年	114%/119%	E+120bps
			1.5 億米ドル	4 年	110%/114%	L+285bps
			1 億米ドル	4 年	106%/110%	L+500bps
Jan-2007	Swiss Re	Vita Capital III	9000 万米ドル	4 年	120%/125%	L+110bps
			5000 万米ドル	5 年	120%/125%	L+112bps
			3000 万ユーロ	4 年	120%/125%	E+110bps
			1 億米ドル	4 年	120%/145%	L+21bps
			1 億米ドル	5 年	120%/145%	L+20bps
			5000 万米ドル	5 年	120%/125%	L+21bps
			5500 万ユーロ	4 年	120%/145%	E+21bps
			5500 万ユーロ	4 年	120%/125%	E+22bps
			1 億ユーロ	5 年	125%/145%	E+80bps
Feb-2008	Munich Re	Nathan	1 億米ドル	5 年	120%/130%	L+135bps

(注) クーポン欄の”L”は LIBOR, ”E”は EULIBOR である。

(出典 1) JP Morgan, ”LifeMetrics Technical Document”, 13th March 2007.

(出典 2) ”Trading Risk”, Issue Number 2, March/April 2008.

参考文献

- [1] 石井文彦・大塚一嘉 [2008], 「マーケット・ビジョン (2008 年 6 月)」, 野村証券, 2008 年 7 月 25 日.
- [2] 内山朋規 [2005], 「負債を完全にヘッジできない場合の確定給付年金の動的最適ポートフォリオ」, 『日本保険・年金リスク学会誌』, Vol.1, No.1, 2005 年 9 月, 23-43 頁.
- [3] 内山朋規 [2008], 「長期投資のアセットアロケーション」, 『最新金融工学に学ぶ資産運用戦略』, 東洋経済新報社, 2008 年 1 月 31 日, 221-251 頁.
- [4] 梅内俊樹 [2008], 「多期間最適ポートフォリオ問題ー LSM 法を利用した近似的解法の近似精度ー」, 『非市場資産の価格付けとリアルオプション ジャフイー・ジャーナルー金融工学と市場計量分析ー』, 朝倉書店, 2008 年 3 月 15 日, 184-212 頁.
- [5] 小守林克哉 [2002], 「株価連動型保険の商品設計と運用戦略」, 『資産運用の最先端理論』, 日本経済新聞社, 2002 年 3 月 18 日, 201-227 頁.
- [6] 田畑吉雄 [2004], 『リスク測度とポートフォリオ理論』, 朝倉書店, 2004 年 8 月 31 日.
- [7] 塚原英敦 [2001], 「証券市場の完備性と不完備性」, 『金融工学の新展開 ジャフイー・ジャーナル 2001』, 東洋経済新報社, 2001 年 7 月 3 日, 121-158 頁.

- [8] 社団法人日本アクチュアリー会 [2003], 「変額年金保険等の最低保証リスクに係る責任準備金の積立等について」, 平成 15 年 12 月 17 日.
- [9] 枇々木規雄 [2007], 「多期間最適化資産配分モデル」, 『リスクと科学—金融と保険のモデル分析—』, 朝倉書店, 2007 年 11 月 15 日, 1-31 頁.
- [10] 松山直樹 [2005], 「変額年金保険のリスク管理」, 『日本保険・年金リスク学会誌』, Vol.1, No.1, 2005 年 9 月, 69-82 頁.
- [11] 山下友信 [2005], 『保険法』, 有斐閣, 2005 年 3 月 10 日.
- [12] 山田雄二・飯田愛美・椿広計 [2006], 「トレンド予測に基づく天候デリバティブの価格付けと事業リスクヘッジ」, 『統計数理』, 第 54 巻第 1 号, 2006 年, 57-78 頁.
- [13] 山田雄二 [2008], 「風速予測誤差に基づく風力デリバティブの最適化設計」, 『非流動性資産の価格付けとリアルオプション ジャッキー・ジャーナル—金融工学と市場計量分析—』, 朝倉書店, 2008 年 3 月 15 日, 153-181 頁.
- [14] Pelsser, Antoon [2003], "*Pricing and Hedging Annuity Options via Static Option Replication*", *Insurance: Mathematics and Economics*, 33, 2003, P283-296.
- [15] Binsbergen, Jules H. van and Michael W. Brandt [2007], "*Solving dynamic portfolio choice problems by recursing on optimized portfolio weights or on the value function?*", *Computational Economics*, Volume 29, Issue 3-4, 355-367.
- [16] Brandt, Michael W., Amit Goyal, Pedro Santa-Clara and Jonathan R. Stroud [2005], "*A Simulation Approach to Dynamic Portfolio Choice with an Application to Learning About Return Predictability*", *Review of Financial Studies*, 18, 831-873.
- [17] Brandt, Michael W. and Pedro Santa-Clara [2006], "*Dynamic Portfolio Selection by Augmenting the Asset Space*", *The Journal of Finance*, Vol. LXI, No.5, 2187-2218, October 2006.
- [18] Campbell, John Y. and Luis M. Viceira [2002], "*Strategic Asset Allocation: Portfolio Choice for Long-Term Investors*", [訳] 野村証券金融経済研究所, [監訳] 木島正明, 『戦略的アセットアロケーション: 長期投資のための資産配分の考え方』, 東洋経済新報社, 2005 年 2 月 10 日.
- [19] Dahl, Mikkel and Møller, Thomas [2006], "*Valuation and hedging of life insurance liabilities with systematic mortality risk*", *Insurance: Mathematics and Economics*, 39, 2006, P193-217.
- [20] Hardy, Mary [2003], "*Investment Guarantees: Modeling and Risk Management for Equity-Linked Life Insurance*", John Wiley & Sons Inc, 14th February 2003.
- [21] International Association of Insurance Supervisors [2006], "*Standard on Asset-Liability Management*", Standard No.13, October 2006.
- [22] Longstaff, Francis A. and Eduardo Schwartz [2001], "*Valuing American Option by Simulation: A Simple Least-Squares Approach*", *The Review of Financial Studies*, Vol.14 No.1, 2001.
- [23] Schweizer, Martin [2001], "*A Guided Tour through Quadratic Hedging Approaches*", *Option Pricing, Interest Rates and Risk Management*, Cambridge University Press, 2001.
- [24] Merton, R. C. [1971], "*Optimum Consumption and Portfolio Rules in a Continuous Time Model*", *Journal of Economic Theory*, 3, 373-413.

A dynamic optimal portfolio strategy for the insurance liability exposed to uncertainty in the capital market

Shinichi Monden *†

Received 1st December 2008; received in revised form 3rd September 2009

Abstract

In current accounting system for Japanese insurance company, the amount of the liability reserve based on the insurance mathematical principle is recognized as value of the contract. However, when we plan the investment or hedge strategy, it is preferable to consider derivatives to which the value of the insurance contract is written on the actuarial assumptions, and to refer to a fundamental uncertainty. But, the practice of this action is not easy. The first cause is that all of actuarial assumptions are not tradable in the capital market. For the second cause, in the case of level premium, hedge source are not always enough. In this paper, we will improve Brandt, Goyal, Santa-Clara and Stroud[2005] to ALM-approach, and structure the hedging strategy for the variable annuity with minimum guarantee benefits under the assumption that can trade a part of the fundamental risk in the capital market. As a result, an approximation to derive the optimal solution of the general account portfolio, to show a numerical analysis of dynamic optimization.

Keyword : Incomplete Market, Multi-period Dynamic Optimization, Asset and Liability Management, Liability Driven Investment, Variable Annuity

* Nomura Securities Co.,Ltd. / University of Tsukuba, Graduate School of Business Sciences

† E-mail: smonden@js6.so-net.ne.jp