
 研究論文

プリペイメント率と金利の長期的な変動特性を 考慮した RMBS の価格付け

黄文峰* 岸田則生† 室町幸雄‡

2015年10月2日投稿

2016年8月21日受理

概要

本稿ではプリペイメントとその金利依存性を考慮した RMBS の解析的な価格評価について議論する。最近、確率金利モデルを用いてプリペイメント率とその金利依存性の期間構造を価格に反映できるモデルが提案され、解析的な価格が導出されたが、RMBS の特徴であるネガティブ・コンベキシティの形状はやや現実と乖離していた。本稿ではそのモデルを踏まえ、非負プリペイメント率モデルを考案して価格の近似式を導出したところ、近似式の精度は証券会社による価格差の範囲内に十分収まる水準で、しかもネガティブ・コンベキシティの形状はより現実的になり、金利低下局面では顕著に現れるが、金利上昇局面では明確には見られないようになった。また、金利モデルとして区間分割 QG++ モデルを用いたところ、スワップションの市場価格へのフィッティングだけでなくパラメータ推定値もより現実的な値になった。さらに、プリペイメント率モデルのパラメータを観測データから推定する方法を考案して具体的に推定を行い、その結果を用いてモデル選択の価格への影響を定量的に評価した。これらの結果から、提案した RMBS の価格付けモデルはプリペイメント率と金利の長期的な変動特性を既存モデルよりも的確に表現し、かつ計算負荷の軽い、実務的に有益なモデルになったと考えられる。

キーワード：RMBS(住宅ローン債権担保証券)、非負プリペイメント率モデル、プリペイメント率の金利依存性、ベースラインプリペイメント率、(区間分割) Quadratic Gaussian++ モデル

1 はじめに

RMBS (住宅ローン債権担保証券) とは住宅ローン債権から構成されるポートフォリオを裏付資産として発行される証券化商品で、ABS (資産担保証券) の一種である。世界金融危機以降、国内外ともに証券化商品市場はひどく低迷してきたが、最近では復活の兆しが見え始めている。日本証券業協会・全国銀行協会 (2014) によると、国内の RMBS 発行額はここ数年安定的に推移しており、2013 年度には国内証券化商品発行額の約 74% を占め、その 75% は住宅金融支援機構が発行する債券であった。RMBS に対する信頼は厚く、住宅金融支援機構債券や住宅金融公庫債券は国内格付機関から AAA の評価を得ており、RMBS は金融機関にとって

* 株式会社 AFG 統計・金融先端テクノロジー本部 E-mail: wfhuang@afginc.co.jp

† 株式会社 AFG 統計・金融先端テクノロジー本部 (現在フリーランス) E-mail: nkishida@kuramae.ne.jp

‡ 首都大学東京大学院社会科学部研究科 E-mail: muromachi-yukio@tmu.ac.jp

長期投資の一端を担う金融商品となっている。一方で商品特性をみると、国債などの普通の債券とは異なり、RMBSには住宅ローン債務者によるプリペイメント（期限前償還）およびデフォルト（債務不履行）という不確定要因が存在し、しかもその発生比率は経済環境の影響を受けるため、通常の債券と同様に扱うことは望ましくない。

これまで RMBS に関して行われてきた多くの学術的・実務的な研究は、1) プリペイメント率のデータ分析及びモデル化と、2) プリペイメントリスク（およびデフォルトリスク）を考慮した RMBS の価格付け及びリスク評価、に分類できる。1) では、観測データに基づくプリペイメント率モデルが幾つか提案されている。実務では Public Securities Association(PSA) Standard Prepayment モデル（以後、PSA モデルと略記する）やその日本版である Prepayment Standard Japan(PSJ) モデル（例えば、日本証券業協会（2006）を参照）のようにプリペイメント率を経過期間の確定的な関数（具体的には区分的一次関数）で与える単純なモデルが有名であるが、他にもさまざまなモデルが提案されている*1。2) は、モンテカルロ法・格子法・偏微分方程式などコンピュータを駆使した数値計算により精緻な価格を求める研究と、単純化を行うことで価格の解析解*2を求める研究に分けられる。この分野で解析解の価格式が必要とされるのは、RMBS は通常の債券に比べて満期が長く、利払が頻繁であることから、特に、多様な経済環境下で価格計算を繰り返すことが要求されるリスク管理の分野において計算時間の短縮化が望まれるためである*3。

本研究は RMBS 価格の解析解を求める分野に属している。この分野の先駆けとなる Collin-Dufresne and Harding(1999) は、短期金利に Vasicek モデルを仮定し、プリペイメント率を短期金利の一次関数で表現して、連続的な元金払を行う RMBS の解析的な価格式を導出した。Kolbe(2007) はプリペイメント率を CIR 過程に従う金利の一次関数で表現し、さらに金利にキャップとフロアーを設けたモデルを考案し、RMBS 価格の近似式を導出した。Rom-Poulsen(2007) は金利とプリペイメント率を多変量 Affine モデルや多変量 Quadratic Gaussian モデルで表現して、RMBS 価格が満たす連立常微分方程式を数値的に解いて価格を求めた。山崎(2005) はさまざまなプリペイメント率モデルによる RMBS の価格付けについてまとめ、特に、プリペイメント率の独自の期間構造と金利依存性の両方に着目したモデルについて広く言及した。

この分野の既存研究ではプリペイメント率は金利の一次関数で表現されることが多いが、それは金利とプリペイメント率の同時的な変化の傾向を表現できて、しかも解析解を導出できる可能性が高いからである。実際のプリペイメント率のデータをみると、金利が低くなるほどプリペイメント率が上昇する傾向は認められるものの、一次関数で表現できるほど単純ではなく、時期による変動も大きい。しかも日本はここ 10 年以上超低金利状態が続き、さまざまな環境下のデータが豊富に得られているわけでもない。そのため、プリペイメント率の金利依存性をどのような関数で表現するのが適切かは必ずしも明確でない。モンテカルロシミュレーションを行うだけであれば、新生証券(2009)などのようにプリペイメント率が負にならないという特性を持つ比例ハザードモデルも使われるが、金利に対してプリペイメント率が指数的に変化する点には違和感も持たれている。さらに、市場で負の金利が見られるようになった昨今では、そのような環境にも対応可能で、かつ RMBS の特性を考慮した適切な金利とプリペイメント率のモデル化と RMBS 価格の解析解が求められている。

最近、岸田ら(2013)は将来の短期金利が負値にならず、しかも現在の金利期間構造と整合的になる CIR++ モデルと Quadratic Gaussian++ (QG++) モデルの 2 種類を用いて RMBS の解析解を導出した。QG モデ

*1 PSA および PSJ モデルともプリペイメント率が経過期間とともに線形に増大し、ある期間を過ぎると一定値に落ち着き満期までほとんど変化しなくなるという観測結果を反映するように作成されたモデルである。より具体的には経過年数が 5 年までは切片ゼロを起点とする直線で増大し、5 年超は一定のプリペイメント率を維持する。なお、PSJ モデルには切片をゼロとしないカスタマイズモデルも存在する。

*2 本稿では、解が既知の解析的な関数により閉じた形で表現できるものだけでなく、それらの時間積分により表現できるものも含めて解析解と呼ぶ。

*3 機構債では満期はおよそ 30 年または 35 年、支払は月次である。Kijima and Muromachi(2000)によると、時価ベースでリスク計測を行うには、将来シナリオをモンテカルロ法で多数生成し、各シナリオごとに将来時点で個々の資産の価格評価を行わねばならない。そのため、価格評価にモンテカルロ法を使う場合は二重のモンテカルロ法が必要になり、計算負荷は膨大になる。

ルと QG++ モデルについては後述するが、それらは近年の先進国のような超低金利環境を適切に表現しうる非負性を持つ確率金利モデルとして最近注目を集めている (Kijima et al.(2014)). さらに岸田ら (2013) のモデル (以下では KTM モデルと略) は、プリペイメント率が持つ独自の期間構造と金利依存性の期間構造も考慮できるように構築されており、数値計算の結果、それらが RMBS 価格の評価に無視できない影響を与えることを示している。しかしながら、KTM モデルには金利上昇期にも強いネガティブ・コンベキシティ^{*4}が現れるという解析的モデルに共通の欠点が残されている。金利モデルに関しても、実際にカリブレーションを行うと、スワップションの市場価格へのフィッティングが良くないことや、現時点の金利期間構造を再現しようとする絶対値の大きな負の金利が現れうるといふ欠点が見られる^{*5}。RMBS の満期は非常に長く、しかも金利変動は RMBS 価格に大きな影響を及ぼすので、RMBS ポートフォリオの定量的なリスク管理まで念頭に置く先進的な投資家は、長期的な金利変動の影響まで考慮した、市場データと整合的な価格付けを求めている。しかし、上述の欠点を抱える KTM モデルでは彼らのニーズを満たせない。

そこで本稿では、KTM モデルを基礎として、その問題点を解消するための幾つかのアイデアを提案し、解析的な価格評価が可能な範囲内で金利やプリペイメント率の長期的な特性を適切に反映できるモデルについて検討する。具体的には、まずプリペイメント率に関しては非負モデルを提案する。後述するように、KTM モデルにおける金利上昇期のネガティブ・コンベキシティは負のプリペイメント率が発生しうることが原因なので、非負性を持つプリペイメント率モデルを用いれば結果は大幅に改善する。金利モデルに関しては、QG++ モデルの定数パラメータが時間区間ごとに異なる値をとる区間分割 QG++ モデルに変更することで、カリブレーション結果が著しく改善することを示す。

本稿の構成は以下である。2 節では RMBS の無裁定価格の算出および KTM モデルとその問題点について述べ、その改善案として、3 節では非負プリペイメント率モデルを提案し、4 節では QG++ モデルの区間分割について述べる。5 節では提案モデルによる改善効果をパラメータスタディにより示し、さらに金利モデルとプリペイメント率モデルのカリブレーションを行い、6 節でまとめる。

2 RMBS の無裁定価格の算出と KTM モデル

本節では RMBS の無裁定価格算出の基礎と、本稿のモデルのもとになった KTM モデルについて説明する。

2.1 RMBS のキャッシュフローと無裁定価格

現在時刻を $t, t \geq 0$ で表し、考察する RMBS の満期を $T > t$, 直前の利払時点を $t_0 \leq t$, 将来の元利金支払時点を $t_i > t, i = 1, \dots, m, t_m = T$ とする。期限前償還もデフォルトもない場合の時刻 t_i における残存元本を $M(t_i)$, 利息額を $I(t_i)$ とし、これらは現時点 t において既知とする。実際の残存元本を $M^*(t_i)$, 元本償還額を $P^*(t_i)$, 利息額を $I^*(t_i)$, $S(t_i) = M^*(t_i)/M(t_i)$ を生存率とすると、時刻 t_i におけるキャッシュフロー $CF(t_i)$ は、

$$\begin{aligned} CF(t_i) &= M^*(t_{i-1}) - M^*(t_i) + I^*(t_i) = M(t_{i-1})S(t_{i-1}) - M(t_i)S(t_i) + I(t_i)S(t_{i-1}) \\ &= (M(t_{i-1}) + I(t_i))S(t_{i-1}) - M(t_i)S(t_i) \end{aligned} \quad (1)$$

^{*4} 通常の債券価格は金利の変化に対して凸型カーブを描き、この性質をコンベキシティという。これに対して RMBS 価格のカーブは凹型のカーブを描くことが知られており、この現象はネガティブ・コンベキシティと呼ばれ、ローン借入者のプリペイメント行動により説明される。金利下落時は、住宅ローンの貸付金利が下がるので借換えによるプリペイメントが増加するため、RMBS 価格は par 方向にシフトし (通常の債券ほど価格は上昇せず)、金利に対して凸型のカーブが現れる。これがネガティブ・コンベキシティである。一方、金利上昇時にはプリペイメントのインセンティブは低下し、通常の債券と同様にふるまうので、金利に対して凹型カーブを描く。

^{*5} 今や市場金利は負値をとりうるということが認識されているので、これは欠点ではないと受け止められるかもしれない。しかし実際に QG++ モデルでカリブレーションを行うと、まだ現実には発生していないほど絶対値の大きな負の金利が現れうるといふ結果が得られるので、現時点ではやはり欠点と呼ぶべきであろう。

で与えられるので、 $CF(t_i)$ の変動は $S(t_{i-1}), S(t_i)$ の変動により表現できる。

観測確率（統計確率とも呼ばれる、現実の確率）を P とする。ある時刻 $T^* \geq T$ まで観測確率 P と同値なリスク中立確率 Q がただ一つ存在すると仮定すると、リスク中立化法より、この RMBS の時刻 t における無裁定価格 $Price(t, T)$ は、

$$Price(t, T) = \sum_{i=1}^m E_t^Q \left[\exp \left\{ - \int_t^{t_i} r(s) ds \right\} CF(t_i) \right] \quad (2)$$

で与えられる。ただし、 $r(t)$ は時刻 t におけるリスクフリーな瞬間的な短期金利、 $E_t^Q[\cdot]$ は Q のもとにおける時刻 t の条件付期待値演算子である。時刻 t において $M(t_i)$ と $I(t_i)$ は既知なので、(1) と (2) より、

$$\begin{aligned} Price(t, T) &= \sum_{i=1}^m (M(t_{i-1}) + I(t_i)) E_t^Q \left[\exp \left\{ - \int_t^{t_i} r(s) ds \right\} S(t_{i-1}) \right] \\ &\quad - \sum_{i=1}^m M(t_i) E_t^Q \left[\exp \left\{ - \int_t^{t_i} r(s) ds \right\} S(t_i) \right] \end{aligned}$$

となるので、RMBS の価格 $Price(t, T)$ は関数

$$V(t, t_1, t_2) = E_t^Q \left[\exp \left\{ - \int_t^{t_2} r(s) ds \right\} S(t_1) \right], \quad t \leq t_1 \leq t_2 \quad (3)$$

の線形結合で表現できる。

ここで、観測確率 P のもとで

$$S(u) = \exp \left\{ - \int_0^u h(s) ds \right\}, \quad 0 \leq u \leq T$$

という関係にある $h(u)$ を観測確率 P のもとにおけるプリペイメント率（期限前償還率、生存時間解析におけるハザード率に相当）と定義し、同様にしてリスク中立確率 Q のもとにおけるプリペイメント率 $h^Q(u)$ も定義する。 $h(u)$ と $h^Q(u)$ の関係については後述する。(3) はリスク中立確率 Q のもとにおける $r(u)$ と $h^Q(u)$ の期間構造を与えれば一意に評価できる。RMBS の実務では、 $r(u)$ と $h(u)$ の期間構造を確定的な関数として与えることが多く、よく使われるのが PSA モデルや PSJ モデルである。しかし、理論研究では確率過程として表現することが多く、確率過程の選択次第でさまざまな性質のモデルを構築できる。なお、生存率でなくプリペイメント率をモデル化することが多いのは、単調減少性で特徴付けられる生存率よりもモデルの構築が容易になるためである。

2.2 KTM モデル

岸田ら (2013) の KTM モデルを説明する。時刻 t における短期金利 $r(t)$ はリスク中立確率 Q のもとで

$$dx(t) = -ax(t)dt + \sigma dz^Q(t), \quad x(0) = 0 \quad (4)$$

$$r(t) = (x(t) + \alpha + \beta t)^2 + \phi(t) \quad (5)$$

に従うと仮定する。ただし、 a, σ, α, β は定数、 $\phi(t)$ は時刻 t の確定関数、 $z^Q(t)$ はリスク中立確率 Q のもとにおける標準ブラウン運動である*6。これは Pelsser(1997) のモデルに Brigo and Mercurio(2006) の手法を適用して現時点の金利期間構造を再現できるように調整したもので、Kijima et al.(2009) により提案された。本稿ではこれを Quadratic Gaussian++ (QG++) モデルと呼ぶ。(5) より、 $\phi(t) \geq 0$ ならば将来の短期金利 $r(t)$ は負にならない。

*6 この後のモデリングの都合のため、 $z^Q(t)$ に対応する確率測度 P における標準ブラウン運動を $z(t)$ とする。

プリペイメント率に関しては、まずは観測確率 P のもとでモデルを構築し、それをもとにリスク中立確率下のモデルを記述する。この理由は、現実に観測されるプリペイメントのデータ特性を価格に反映できるようにするためである。 P のもとにおける時刻 t のプリペイメント率 $h(t)$ は

$$h(t) = \lambda(t)(L(t) - R(t, \tau)) + g(t) \quad (6)$$

に従うと仮定する。ただし、 $\lambda(t)$, $L(t)$ は時刻 t の確定関数、 $R(t, \tau)$ は時刻 t における期間 $[t, t+\tau]$ のゼロレート^{*7}である。(6) の右辺第 1 項はプリペイメント率の金利依存性を表す一次関数で、 $\lambda(t)$ は金利感応度、 $L(t)$ は金利の影響を考える際の基準金利である。 $L(t)$ には裏付資産である住宅ローンの WAC (weighted average coupon, 加重平均金利) が使われて定数とされることが多いが、ここでは一般化して時刻 t の確定関数とした。また、金利感応度も時刻 t の確定関数 $\lambda(t)$ としたので金利感応度の経年変化も表現できる。岸田ら (2013) は、時刻列 $\{s_i\}_{i=0, \dots, n}$, $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_n = T^*$, $\lambda_i, i = 1, \dots, n$ をそれぞれ定数として、 $\lambda(t)$ を階段関数

$$\lambda(t) = \lambda_i, \quad t \in [s_{i-1}, s_i)$$

で表現した。

(6) の右辺第 2 項 $g(t)$ はプリペイメント率に固有の経年依存性 (期間構造) を表す確率過程で、ベースラインプリペイメント率と呼び、

$$dg(t) = (\psi(t) - bg(t))dt + \eta(t)dz_g(t) \quad (7)$$

あるいは

$$dy(t) = -by(t)dt + \eta(t)dz_g(t) \quad (8)$$

$$g(t) = y(t) + \phi(t) \quad (9)$$

で表現する。ただし、 b は定数、 $\eta(t)$ と $\phi(t)$ は時刻 t の確定関数、 $\phi(t)$ は一回微分可能で $\psi(t) = d\phi(t)/dt$, $z_g(t)$ は観測確率 P のもとにおける標準ブラウン運動である。(7) およびそれと等価な (8)–(9) は金利でいう Hull-White モデル (1990) (HW モデルと略) なので、このモデルを使えば現時点で観測されるベースラインプリペイメント率の期間構造を正確に再現できる。

リスク中立確率 Q のもとにおけるプリペイメント率 $h^Q(t)$ を、時刻 t の確定的な関数 $\ell(t)$ (リスクプレミア調整率と呼ぶ) を用いて

$$h^Q(t) = h(t) + \ell(t) \quad (10)$$

と表現し、 P から Q への測度変換は $\ell(t)$ で表現されると仮定すると、 $z_g(t)$ はリスク中立確率 Q のもとでも標準ブラウン運動になる^{*8}。また、 $z_g(t)$ は $z(t)$ と独立であると仮定する。

以上の設定のもとで、岸田ら (2013) は RMBS の解析的な価格式を導出し、 $\lambda(t)$ の値がある程度大きくなると、通常の債券とは異なる RMBS 独自の金利依存性、ネガティブ・コンベキシティが現れることを示した。

2.3 KTM モデルの問題点

価格式が解析的に与えられ、現時点の金利期間構造とプリペイメント率の期間構造を再現できるなどの長所を持つ KTM モデルであるが、致命的な問題点が残されている。

*7 ゼロレートは時刻 t における満期 $t+\tau$ の割引債の最終利回りのことで、 $R(t, 0+) = r(t)$ である。岸田ら (2013) では (6) の $R(t, \tau)$ を $r(t)$ とする式から出発しているが、 $R(t, \tau)$ に変更した場合の結果も導出している。

*8 信用リスクで使われる測度変換に関しては室町 (2007) の付録 A.2 を、特に本稿で使われる測度変換については第 7 章を参照されたい。

まず、岸田ら (2013) の数値例をみると、金利感応度 $\lambda(t)$ の値が高い場合、金利が上昇すると RMBS 価格は非常に低くなり、通常の債券価格を大きく下回るが、実際にそのようなことは見られない。KTM モデルでは、 $\lambda(t)$ が高い値をとり、しかも将来金利 $r(t)$ が極端に高くなると、(6) より $h(t) < 0$ になるので生存確率 $S(t)$ は時刻 t とともに上昇する。 $S(t)$ が過度に上昇すると (1) より $CF(t_i) < 0$ となり、RMBS 保有者はキャッシュを支払うことになってしまうので、結果として RMBS 価格は大きく低下する。しかし現実には RMBS 保有者がキャッシュを支払うことはないで、これは明らかにモデル上の欠陥である。

また、RMBS はキャッシュフローが長期におよぶ投資商品であり、金利はプリペイメントに大きな影響を与えるので、先進的な投資家は長期的な金利変動を考慮した、しかも現時点の市場環境と整合的な価格付けを求めている。そのため、確率金利モデルのカリブレーションにはキャップやフロアーのような比較的短期のデリバティブの価格よりも、長期のテナーと満期を持つスワップション価格が使われることが多い。ところが、KTM モデルで使用している QG++ モデルで日本市場のデータからカリブレーションを行うと、本稿 5 節の数値例で示すように、市場で観測されるスワップション価格の期間構造を再現することは難しい。また、モデルの性質上現在の金利期間構造は再現できるものの、長期になると $|\phi(t)|$ が上昇し、0 近辺から大きく乖離する。 $\phi(t)$ は将来の短期金利の下限値を意味するので、 $\phi(t)$ が 0 から大きく乖離することは現実的でない。これらのことは、QG++ モデルは解析的な取り扱いが容易で、かつ超低金利環境を表現するのに適したモデルであるものの、単なる QG++ モデルでは日本の金利環境を適切には表現できないことを示唆している*9。

これらの問題は KTM モデルを含む解析的な RMBS 価格モデルに共通する欠点であり、理論モデルを実務で使用する際の大きな障害要因となっている。以下の節では、上述した KTM モデルの問題点への対処方法とその実装について述べ、数値例を用いて改善効果を定量的に評価する。

3 非負プリペイメント率モデル

本節では、負のプリペイメント率の発生を回避するための工夫として、金利依存性の項が非負になるモデルと、ベースラインプリペイメント率 $g(t)$ が非負になるモデルを提案する。

3.1 金利依存項の非負化

負のプリペイメント率の発生原因の一つは (6) の右辺第 1 項の金利依存性である。これは金利 $R(t, \tau)$ の一次関数なので、 $\lambda(t)$ が正の場合、金利の上昇とともに低下し、場合によっては負値になりうる。そこで、ここでは負値になる可能性を排除するため、 $(x)^+ = \max(x, 0)$ を用いて、(6) を

$$h(t) = \lambda(t)(L(t) - R(t, \tau))^+ + g(t) \quad (11)$$

に変更したモデルを提案する。(11) の右辺第 1 項の金利依存項の RMBS 価格への寄与を一般化して、 $t \leq t_i < t_{i+1} \leq t_j \leq t_n$ に対して

$$Z(t, t_i, t_j, t_n) \equiv E_t^Q \left[\frac{B(t)}{B(t_n)} S(t_i, t_j) \right] \quad (12)$$

および

$$S(t_i, t_j) \equiv \exp \left\{ - \int_{t_i}^{t_j} \lambda(s)(L(s) - R(s, \tau))^+ ds \right\}, \quad B(t) \equiv \exp \left\{ \int_0^t r(s) ds \right\}$$

*9 この現象をより広い視点で捉えるならば、金利モデルのボラティリティ・サーフェスへのフィッティングを検討すべきである。しかし一方で、短期間で形状が大きく変動しうるサーフェスの情報を超長期的な投資商品である RMBS 価格に反映させることにも疑問はある。本稿ではこれらの中間的な立場をとり、恒常的に見られるボラティリティの期間構造パターンに着目し、ATM スワップションのボラティリティの期間構造へのフィッティングを改善することで長期的な金利変動特性を RMBS 価格に反映させることまでを考える。

を定義すると,

$$\frac{V(t, t_1, t_2)}{Z(t, t, t_1, t_2)} = E_t^Q \left[\exp \left\{ - \int_t^{t_1} (g(s) + \ell(s)) ds \right\} \right] = \exp \left\{ -\mu_G(t, t_1) + \frac{1}{2} S_G(t, t_1) \right\} L(t, t_1) \quad (13)$$

と表現できる. ただし,

$$\begin{aligned} \mu_G(t, s) &\equiv g(t) \frac{1 - e^{-b(s-t)}}{b} + \int_t^s \psi(u) \frac{1 - e^{-b(s-u)}}{b} du, \\ S_G(t, s) &\equiv \int_t^s \eta^2(u) \left(\frac{1 - e^{-b(s-u)}}{b} \right)^2 du, \quad L(t_i, t_j) \equiv \exp \left\{ - \int_{t_i}^{t_j} \ell(s) ds \right\} \end{aligned}$$

である. しかし $Z(t, t, t_1, t_2)$ の解析式は得られないので, 以下では $Z(t, t, t_1, t_2)$ の解析的近似を考える.

まず, 志立 (2004) のプリペイメントデータの分析結果によると, $\lambda(t)$ は短い期間 (1-2 ヶ月程度) ごとに異なる値をとりうるので, Δt をそれと同程度の定数として $t_k = k\Delta t, k = 0, 1, \dots, (\lambda(t), L(t)) = (\lambda_k, L_k), t \in [t_k, t_{k+1})$ と表現して, $S(t_i, t_j)$ の指数部の積分をオイラー法で離散化し, さらにテイラー展開 $e^x \simeq 1 + x$ を用いて,

$$S(t_i, t_j) \simeq \prod_{k=i}^{j-1} (1 - \lambda_k (L_k - R(t_k, \tau))^+ \Delta t) \quad (14)$$

と近似する. (14) を使い, 満期 t_{i+1} の割引債を基準財とするフォワード中立化法で $Z(t, t_i, t_j, t_n)$ を表現すると,

$$\begin{aligned} \frac{Z(t, t_i, t_j, t_n)}{v(t, t_{i+1})} &= E_t^{t_{i+1}} \left[\frac{B(t_{i+1})}{B(t_n)} S(t_i, t_j) \right] \simeq E_t^{t_{i+1}} \left[\frac{B(t_{i+1})}{B(t_n)} \prod_{k=i}^{j-1} (1 - \lambda_k (L_k - R(t_k, \tau))^+ \Delta t) \right] \\ &= E_t^{t_{i+1}} [X(t_i, \Delta t) Y(t_{i+1}, t_j, t_n; t_i)] \\ &= E_t^{t_{i+1}} [X(t_i, \Delta t)] Y(t_{i+1}, t_j, t_n; t) + \text{Cov}_t^{t_{i+1}}(X, Y) \quad (15) \end{aligned}$$

となる. ただし, $v(t, T)$ は時刻 t における満期 T の割引債価格, $E_t^T[\cdot]$ は満期 T のフォワード中立確率 Q^T における条件付期待値, $\text{Cov}_t^T(X, Y)$ は Q^T における X, Y の条件付共分散,

$$\begin{aligned} X(t_i, \Delta t) &= 1 - \lambda_i (L_i - R(t_i, \tau))^+ \Delta t \\ Y(t_{i+1}, t_j, t_n; t_i) &= E_{t_i}^{t_{i+1}} \left[\frac{B(t_{i+1})}{B(t_n)} \prod_{k=i+1}^{j-1} (1 - \lambda_k (L_k - R(t_k, \tau))^+ \Delta t) \right] \\ \text{Cov}_t^{t_{i+1}}(X, Y) &= \text{Cov}_t^{t_{i+1}} [X(t_i, \Delta t), Y(t_{i+1}, t_j, t_n; t_i)] \end{aligned}$$

で, (15) の最後の等号では条件付期待値の連鎖公式を用いた. (15) より, もしも

$$|\text{Cov}_t^{t_{i+1}}(X, Y)| \ll |E_t^{t_{i+1}} [X(t_i, \Delta t)] Y(t_{i+1}, t_j, t_n; t)|,$$

となり $\text{Cov}_t^{t_{i+1}}(X, Y)$ を無視できるならば, X と Y は条件付独立となり, (15) と (12) より,

$$Z(t, t_i, t_j, t_n) \simeq v(t, t_{i+1}) E_t^{t_{i+1}} [X(t_i, \Delta t)] Y(t_{i+1}, t_j, t_n; t) \simeq E_t^{t_{i+1}} [X(t_i, \Delta t)] Z(t, t_{i+1}, t_j, t_n) \quad (16)$$

となるので, (16) を繰り返し使うと,

$$\begin{aligned} Z(t, t_i, t_j, t_n) &\simeq E_t^{t_{i+1}} [X(t_i, \Delta t)] Z(t, t_{i+1}, t_j, t_n) \simeq \dots \simeq Z(t, t_j, t_j, t_n) \prod_{k=i}^{j-1} E_t^{t_{k+1}} [X(t_k, \Delta t)] \\ &= v(t, t_n) \prod_{k=i}^{j-1} \left(1 - \lambda_k \Delta t E_t^{t_{k+1}} [(L_k - R(t_k, \tau))^+] \right) \quad (17) \end{aligned}$$

が得られる。

ここまで金利 $R(t, \tau)$ については特定しなかったが、以下では $R(t, \tau)$ に (a) フォワード金利, (b) ゼロレート, (c) スワップレート, を使う場合について簡単に議論する。

(a) 時刻 t における期間 $[T_i, T_i + \Delta T_i]$ のフォワード金利

$$L(t, T_i, \Delta T_i) = \frac{v(t, T_i) - v(t, T_i + \Delta T_i)}{v(t, T_i + \Delta T_i) \Delta T_i}, \quad \Delta T_i = T_{i+1} - T_i$$

を使い, $R(t, \tau) = L(t, t, \Delta t)$, $\Delta t = \tau - t$ とすると,

$$\begin{aligned} Z(t, t_i, t_j, t_n) &\simeq v(t, t_n) \prod_{k=i}^{j-1} \left(1 - \lambda_k \Delta t E_t^{t_{k+1}} [(L_k - L(t_k, t_k, \Delta t))^+] \right) \\ &= v(t, t_n) \prod_{k=i}^{j-1} \left(1 - \frac{\lambda_k}{v(t, t_{k+1})} P_{\text{floorlet}}(t, t_k, t_{k+1}, L_k) \right) \end{aligned} \quad (18)$$

となる。ここで, $P_{\text{floorlet}}(t, t_k, t_{k+1}, L_k)$ は時刻 t における $L(t_k, t_k, \Delta t)$ に対するフロアレートの L_k のフロアレートの価格であり, QG++ モデルでは解析解 (付録 A を参照) が得られるので瞬時に計算できる。(18) の近似式には (14) や (16) により生じる誤差, および $R(t, \tau) = L(t, t, \Delta t)$ という恣意的な設定の影響が含まれるので, その良し悪しは 5.1 節の数値例をもとに議論する。

(b) 金利 $R(t, \tau)$ として期間 τ のゼロレートを使うと, 岸田ら (2013) の (4.5) より,

$$\begin{aligned} R(t_k, \tau) &= A_k (x(t_k) + B_k)^2 + C_k \\ (A_k, B_k, C_k) &= \left(\frac{C_Q(t_k, t_k + \tau)}{\tau}, \frac{B_Q(t_k, t_k + \tau)}{2C_Q(t_k, t_k + \tau)}, \frac{\int_{t_k}^{t_k + \tau} \phi(s) ds - A_Q(t_k, t_k + \tau) - \frac{B_Q^2(t_k, t_k + \tau)}{4C_Q(t_k, t_k + \tau)}}{\tau} \right) \end{aligned}$$

と表現できる^{*10}。 $x(t_k)$ はフォワード中立確率 $Q^{t_{k+1}}$ のもとで正規分布に従うので,

$$\begin{aligned} E_t^{t_{k+1}} [(L_k - R(t_k, \tau))^+] &= (L_k - C_k - A_k (B_k + \mu_k)^2) (F_k(x^+) - F_k(x^-)) \\ &\quad + A_k \sigma_k^2 ((x^+ + 2B_k + \mu_k) f_k(x^+) - (x^- + 2B_k + \mu_k) f_k(x^-)) \end{aligned} \quad (19)$$

が得られる。ここで, f_k と F_k は $P^{t_{k+1}}$ のもとにおける $x(t_k)$ の密度関数と分布関数, (μ_k, σ_k^2) は $x(t_k)$ の期待値と分散で, $L_k > C_k$ のときは

$$x^\pm = -B_k \pm \sqrt{\frac{L_k - C_k}{A_k}} \quad (\text{複号同順})$$

で, $L_k \leq C_k$ のときは $E_t^{t_{k+1}} [(L_k - R(t_k, \tau))^+] = 0$ である。(19) を用いても (17) は瞬時に計算できる。ただし, $R(t, \tau)$ として短期でなく中長期のゼロレートを用いる場合, (16) の近似は成立しにくくなる。なぜならば, τ が長くなるほど $R(t_k, \tau)$, $k = i, \dots, j-1$ の相互の相関は高まるからである。

(c) 金利 $R(t, \tau)$ として長期のスワップレートを使うことは実務的にはもっともらしい。なぜならば, 住宅ローンの貸付金利は期間 10 年程度の市場金利を参考に決まると考えられているからである。しかしその場合,

$$E_t^{t_{k+1}} [(L_k - R(t_k, \tau))^+]$$

は Constant Maturity Swap オプションと同じ形になるため, 解析的に厳密な評価はできない^{*11}。

^{*10} 関数 A_Q, B_Q, C_Q の具体的な表現は岸田ら (2013) を参照されたい。

^{*11} 級数展開による近似は可能である。例えば Tanaka et al.(2010) を参照されたい。

3.2 ベースラインプリペイメント率への QG++ モデルの適用

さらにベースラインプリペイメント率 $g(t)$ を QG++ モデルで表現すれば、プリペイメント率の非負化はより確実になる。そこで、観測確率 P のもとにおける (8)–(9) を

$$dx_p(t) = -a_p x_p(t)dt + \sigma_p dz_p(t), \quad x_p(0) = 0 \quad (20)$$

$$g(t) = (x_p(t) + \alpha_p + \beta_p t)^2 + \phi_p(t) \quad (21)$$

に変更する。ただし、 $a_p, \sigma_p, \alpha_p, \beta_p$ は定数、 $\phi_p(t)$ は時刻 t の確定的な関数で、 $z_p(t)$ は確率測度 P のもとにおける $z(t)$ とは独立な標準ブラウン運動とする。このとき、観測確率 P のもとにおける条件付期待値演算子を $E_t^P[\cdot]$ とすると、

$$E_t^P \left[\exp \left\{ - \int_t^{t_1} g(s) ds \right\} \right]$$

は QG++ 金利モデルにおける割引債価格に相当するので解析的に表現できる。具体的な表現は岸田ら (2013) を参照されたい。

このモデルを用いると、(21) より、

$$E^P[g(t)] = E^P[x_p^2(t)] + 2(\alpha_p + \beta_p t)E^P[x_p(t)] + (\alpha_p + \beta_p t)^2 + \phi_p(t)$$

となるが、(20) より、 $x_p(t)$ は期待値 $E^P[x_p(t)] = 0$ 、分散

$$V^P[x_p(t)] = \sigma_p^2 \int_0^t e^{-2a_p(t-s)} ds = \frac{\sigma_p^2}{2a_p} (1 - e^{-2a_p t}) \quad (22)$$

の正規分布に従うので、

$$E^P[g(t)] = \frac{\sigma_p^2}{2a_p} (1 - e^{-2a_p t}) + (\alpha_p + \beta_p t)^2 + \phi_p(t) \quad (23)$$

が得られる。さらに、 $x_p(t)$ が正規分布に従うことから $E^P[x_p^4(t)] = 3(V^P[x_p(t)])^2$ であり、(22) も使うと、

$$V^P[g(t)] = E^P[(g(t) - E^P[g(t)])^2] = \frac{\sigma_p^4}{2a_p^2} (1 - e^{-2a_p t})^2 + \frac{2\sigma_p^2}{a_p} (\alpha_p + \beta_p t)^2 (1 - e^{-2a_p t}) \quad (24)$$

が得られる。

(23) と (24) はそれぞれベースラインプリペイメント率の期待値と分散の期間構造を表しているので、これらがプリペイメントの観測データから推定した期待値と分散の期間構造にあうようにパラメータを決定すれば、現時点で観測されるベースラインプリペイメント率の情報をモデルに的確に反映できる。特に、(23) には時刻 t の確定的な関数 $\phi_p(t)$ が含まれているので、期待値の期間構造はこのモデルで正確に再現できる。

4 区間分割 QG++ モデル

2.3 節で挙げた課題のうち、スワップション価格へのフィッティングを改善するには区間分割 QG++ モデルの使用が有効である。具体的には、 $t \in [t_{i-1}, t_i)$ において

$$\begin{aligned} dx(t) &= -a_i x(t)dt + \sigma_i dz(t) \\ r(t) &= (x(t) + \alpha_i + \beta_i t)^2 + \phi(t) \end{aligned}$$

に従うと仮定する。ただし、 $x(0) = 0$ とし、 $t_i, i = 1, \dots, k-1$ は $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_{k-1} < t_k = T^*, T^* \geq T$ を満たす実数列で、 $(\alpha_i, \beta_i), i = 1, \dots, k-1$ は

$$\alpha_i + \beta_i t_i = \alpha_{i+1} + \beta_{i+1} t_i \quad (25)$$

を満たす定数とする。(25) は金利 $r(t)$ が $t = t_i$ で連続であるための条件である。

4.1 割引債の価格式

このモデルでも、満期 T の割引債の時刻 $t, t \leq T \leq T^*$ における価格

$$v(t, T; x(t)) = E_t^Q \left[\exp \left\{ - \int_t^T r(s) ds \right\} \right]$$

は解析的に表現できる。まず、Feynman-Kac の定理より、 $v(t, T; x(t))$ は

$$\frac{\partial v}{\partial t} - a_i x(t) \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma_i^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = [(x(t) + \alpha_i + \beta_i t)^2 + \phi(t)] v, \quad t_{i-1} \leq t \leq t_i$$

を満たす。ここで、 $t \in [t_{i-1}, t_i]$ において

$$\log v(t, T; x(t)) = - \int_t^T \phi(s) ds + D_0(t, T, i) - D_1(t, T, i)x(t) - D_2(t, T, i)x^2(t) \quad (26)$$

とおくと、 D_0, D_1, D_2 は連立常微分方程式

$$\frac{dD_2(t, T, i)}{dt} = 2a_i D_2(t, T, i) + 2\sigma_i^2 D_2^2(t, T, i) - 1 \quad (27)$$

$$\frac{dD_1(t, T, i)}{dt} = [a_i + 2\sigma_i^2 D_2(t, T, i)] D_1(t, T, i) - 2(\alpha_i + \beta_i t) \quad (28)$$

$$\frac{dD_0(t, T, i)}{dt} = -\frac{\sigma_i^2}{2} [D_1^2(t, T, i) - 2D_2(t, T, i)] + (\alpha_i + \beta_i t)^2 \quad (29)$$

の解で、境界条件は、

$$D_2(t_i, T, i) = D_2(t_i, T, i+1) \quad (30)$$

$$D_1(t_i, T, i) = D_1(t_i, T, i+1) \quad (31)$$

$$D_0(t_i, T, i) = D_0(t_i, T, i+1) \quad (32)$$

で与えられる。特に、時刻 t を含む区間を p 、満期 T を含む区間を q 、すなわち、 $t \in [t_{p-1}, t_p]$ 、 $T \in [t_{q-1}, t_q]$ とすると、満期における境界条件は

$$D_2(T, T, q) = D_1(T, T, q) = D_0(T, T, q) = 0 \quad (33)$$

である。連立常微分方程式 (27)–(29) を、(33) を境界条件として区間 $i = q$ から前に向かって（区間の端点では (30)–(32) を境界条件として）区間 $i = p$ まで解くことにより $D_j(t, T, p)$ 、 $j = 0, 1, 2$ 、そして $v(t, T; x(t))$ が得られる。 $D_j(t, T, p)$ 、 $j = 0, 1, 2$ の具体的な表現は付録 B を参照されたい。

区間分割 QG++ モデルへ変更しても、KTM モデルによる RMBS 価格式は使用できる。ただし、割引債価格を区間分割 QG++ モデルによる式に変更し、RMBS 価格式に含まれる金利モデルのパラメータ値を区間に応じて使い分けることは必要である。

4.2 スワップション価格の近似式

金利モデルのパラメータ $(a, \sigma, \alpha, \beta)$ と $\phi(t)$ 、 $t \in [0, T^*]$ は、現時点の金利期間構造と流動性の高い金利デリバティブの市場価格から推定する。RMBS は満期が長いので、長期的な金利変動性を価格に反映して評価するためにはカリブレーションでスワップションの市場価格を用いるのが適切である。その際、QG++ モデルではスワップション価格の解析解が得られないので、本稿では Piterbarg(2009) による近似式を使用する。Piterbarg の近似の考え方は QG++ モデルだけでなく、区間分割 QG++ モデルにも適用できる。これらのモデルにおける近似式の具体的な表現は付録 D を参照されたい。なお、近似式の導出に必要な詳細を付録 C にまとめる。

5 数値例

本節ではまず、3節で提案した非負プリペイメント率モデルにより得られるRMBSの理論価格の特性分析を行い、KTMモデルの理論価格よりもプリペイメントの特性をより良く表現できること、具体的にはネガティブ・コンベキシティが金利低下局面では顕著に表れるが、金利上昇局面では明確には現れないことを示す。次に、モデルが実用に耐えうることを示すため、スワップション価格の近似式^{*12}を用いて観測データから金利モデルのパラメータを推定し、区間分割により推定結果がどの程度改善するかを示す。さらに、観測データからプリペイメント率モデルのパラメータを推定する方法を具体的に示し、モデル選択のRMBS価格への影響についても数値例で示す。

5.1 非負プリペイメント率モデルの効果

本項では、3節で述べた非負プリペイメント率モデルに基づく(18)を用いたRMBS価格の近似式の振る舞いがKTMモデルに比べてどの程度改善するかを数値例で示す。なお、以下の計算では(10)のリスクプレミアム調整率を $\ell(t) = 0$ とする^{*13}。

表1に、計算で使用するRMBSの諸元、QG++モデル（ここでは区間分割でないモデルを使用）およびプリペイメント率モデルのパラメータを示す。また、現時点におけるゼロレートは期間によらず連続複利5%で一定とした。ただし、ベースラインプリペイメント率過程には(8)–(9)を使用し、単純化のため $\eta(t) = \eta$ （定数）として、 $\psi(t)$ はモデルによる期待値 $E[g(t)]$ がPSAモデルのCPR(Conditional Prepayment Rate)曲線を再現するように与えた。これらは岸田ら(2013)の数値例と同じ設定であり、彼らの結果との比較により3節で提案したプリペイメント率の金利依存項の非負化の効果を明確に示す。

表1 使用するモデルパラメータ（岸田ら(2013)と同じ）

MBS 諸元		QG++ モデル		プリペイメント率モデル	
当初元本(円)	100	a	0.1	λ	4種類
クーポン率(%)	4.5	σ	0.05	L	5.0%
満期(年)	30	α	0	b	0.734
		β	0	η	0.02
				PSA 倍率	167%

まず、(18)の近似式の妥当性を検討する。3節でも述べたように、この近似式の導出には大胆な離散化や確率変数 $X(t_i, \Delta t)$ と $Y(t_{i+1}, t_j, t_n; t)$ の条件付独立性の仮定、恣意的な変数の設定が使われているので、その妥当性は明らかではない。そこで、数値計算により近似の精度を調べる。表2に、後述する数値例の中で金利の影響が最も強い $\lambda = 3$ の場合^{*14}の(18)による Z の近似値と、(12)で定義された Z の10万シナリオ(1000回ずつ100バッチ)のモンテカルロ法による推定値を示す。モンテカルロ法の推定誤差には信頼水準99%の数値を示している。金利シフト幅がゼロ、すなわち現時点のゼロレートが5%フラットの場合、モンテカルロ

^{*12} 近似式の精度は数値積分により得られる厳密解と比較して確認した。本稿で使用した設定のもとでほとんどの価格の相対誤差は1%未満であったが、スワップションの満期が10年、あるいはスワップのテナーが15年以上になると1%を超えるものも現れた。

^{*13} 本稿の数値例の目的は提案モデルの特性分析なので $\ell(t) = 0$ とした。理論上、 $\ell(t)$ は測度変換の効果を示しているが、今後はこの項を銘柄ごとに異なると考えて $\ell_j(t)$ とみなし、理論価格を市場価格と一致させることで $\ell_j(t)$ を推定する実証分析の実施を考えている。その場合、 $\ell_j(t)$ は個々の銘柄による流動性リスクやプリペイメント率の違いなど、本稿のモデルで明示的に扱わなかったリスクの価格への影響を表現することになる。

^{*14} 後述する図4によると、 $\lambda(t) = 3$ （期間によらず一定）による金利の影響は現実よりも強い。

法による推定値と (18) による近似値の相対誤差は約 30 年でも 0.6% 以下 (99% 信頼水準) であるが、金利シフト幅が 5%, すなわち現時点のゼロレートが 10% フラットと高くなると、相対誤差は同信頼水準で 3% 近くにまで上昇する。表 3 には Z 値の累積としての RMBS 価格の相対誤差を示す。こちらもモンテカルロ法の推定誤差には信頼水準 99% の数値を示している。RMBS 価格の近似値とモンテカルロ法による推定値の相対誤差は、金利シフト幅ゼロで 0.1%, シフト幅 5% でも 0.56% である。これらの値は RMBS 価格提供各社が提示する値付けの違いよりも十分に小さく、VaR 等のリスク量把握に際して実務上問題となることは無い。このように RMBS 価格の相対誤差が小さくなるのは、相対誤差が高まる長期部分のキャッシュフローが RMBS 価格に与える影響は相対的に小さいため、また、Z 値の誤差は経過月数によって変動し符号も変わるので、Z 値の和からなる RMBS 価格の相対誤差は小さくなるためである。

表 2 Z 値の近似式による値とモンテカルロ法による推定値 ($\lambda = 3.0$)

経過月数	金利シフト幅 (0%)			金利シフト幅 (5%)		
	近似値	モンテカルロ法	相対誤差 (%)	近似値	モンテカルロ法	相対誤差 (%)
60	0.7508	0.7533 ± 0.0001	-0.32 ± 0.01	0.6061	0.6063 ± 0.0001	-0.03 ± 0.02
120	0.5476	0.5486 ± 0.0002	-0.18 ± 0.03	0.3697	0.3676 ± 0.0002	0.56 ± 0.06
180	0.3952	0.3954 ± 0.0002	-0.04 ± 0.05	0.2254	0.2227 ± 0.0002	1.19 ± 0.09
240	0.2844	0.2840 ± 0.0002	0.15 ± 0.07	0.1375	0.1351 ± 0.0002	1.74 ± 0.11
300	0.2045	0.2038 ± 0.0002	0.34 ± 0.09	0.0838	0.0819 ± 0.0001	2.26 ± 0.14
359	0.1478	0.1470 ± 0.0001	0.52 ± 0.10	0.0515	0.0501 ± 0.0001	2.74 ± 0.15

表 3 RMBS 価格の近似式による値とモンテカルロ法による推定値 ($\lambda = 3.0$)

金利シフト幅	近似計算	モンテカルロ法	相対誤差 (%)
0%	96.89	96.79 ± 0.024	0.10 ± 0.025
5%	73.04	72.63 ± 0.014	0.56 ± 0.019

図 1 と表 4 に、KTM モデルと (18) の近似を用いた新モデルによる RMBS 価格を示す。ここでは現時点のゼロレートカーブを金利シフト幅だけ平行に上下させたときの RMBS の理論価格を、いくつかの金利感応度 λ に対して算出している。これらの図表によると、金利シフト幅がマイナスの場合、新モデルによる価格はいずれも KTM モデルに近い値をとる。しかし、金利シフト幅がプラスの場合、KTM モデルによる RMBS 価格は金利シフトとともに下落し、しかも λ によって価格に大きな差が生じるが、新モデルによる価格は $\lambda = 1.0$ でも $\lambda = 3.0$ でもほとんど変わらず、その値は KTM モデルにおける $\lambda = 0$ の場合、すなわちプリペイメント率が金利の影響を受けない場合の価格に近い。このような新モデルによる RMBS 価格の振る舞いは、プリペイメントの影響が金利下落時には明確に現れるが、金利上昇時には現れにくい、もしくは現れないという経験とも整合的である。これらの結果から、(18) の近似を用いた新モデルは KTM モデルよりも RMBS の価値を適切に表現していると考えられる。

5.2 金利モデルのカリブレーション

次に、観測データを用いた金利モデルのパラメータの推定例を示す。ここでは目的関数

$$f(a, \sigma, \alpha, \beta) = \sum_{i=1}^m \left| \frac{S_i - S_{i(Black)}}{S_{i(Black)}} \right| + p_\phi \sum_{i=1}^l |\phi_i| + p_\sigma \sum_{i=1}^{k-1} |\sigma_{i+1} - \sigma_i| + p_{\sigma_2} \sum_{i=1}^{k-2} |\sigma_{i+2} + \sigma_i - 2\sigma_{i+1}| \quad (34)$$

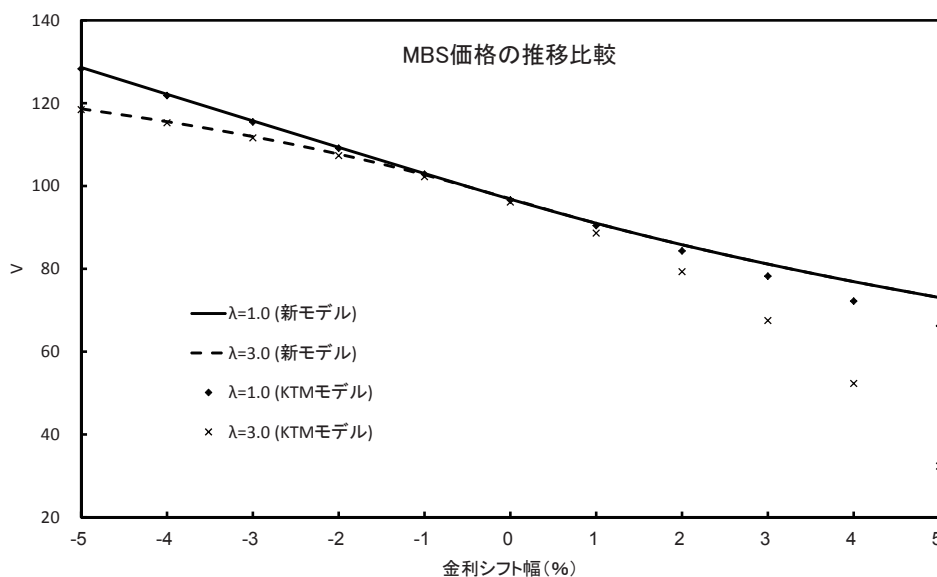


図1 KTMモデルと新モデルによるRMBS価格

表4 KTMモデルと新モデルによるRMBS価格

金利シフト幅 (%)	新モデル			KTMモデル			
	λ			λ			
	1.0	2.0	3.0	0.0	1.0	2.0	3.0
-5.0	128.63	122.63	118.64	138.05	128.29	122.35	118.44
-4.0	122.15	118.30	115.54	127.60	121.85	118.00	115.28
-3.0	115.72	113.58	111.93	118.43	115.46	113.28	111.62
-2.0	109.34	108.45	107.71	110.35	109.13	108.15	107.33
-1.0	103.02	102.85	102.71	103.17	102.85	102.55	102.24
0.0	96.80	96.85	96.89	96.78	96.62	96.41	96.11
1.0	90.99	90.99	90.99	91.06	90.44	89.67	88.62
2.0	85.81	85.81	85.81	85.91	84.31	82.22	79.30
3.0	81.14	81.14	81.14	81.26	78.23	73.98	67.51
4.0	76.90	76.90	76.90	77.05	72.20	64.82	52.32
5.0	73.04	73.04	73.04	73.22	66.21	54.58	32.35

を最小化するパラメータを求めた。ただし、金利モデルの区間分割数を k 、各区間 $i, i = 1, \dots, k$ におけるパラメータを $(a, \sigma_i, \alpha_i, \beta_i)$ とし、 $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_k)$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_k)$ と表現し、平均回帰力 a は区間によらず一定とした。 $S_i, S_{i(Black)}$, $i = 1, \dots, m$ は i 番目のスワップションの理論価格と Black 式による市場価格、 $\phi_i, i = 1, \dots, l$ はそれぞれ確定関数 $\phi(\cdot)$ のサンプリング時刻 t_i における値 $\phi_i = \phi(t_i)$ である。この方法は Hull(2012) に因んだペナルティ関数法で、目的関数 (34) の第 1 項はノルム、定数 $p_\phi, p_\sigma, p_{\sigma_2}$ はそれぞれ ϕ_i へのペナルティ、 σ_i の勾配へのペナルティ、 σ_i の湾曲へのペナルティの相対

的な重要度を示す係数である。以下では $p_\phi = p_\sigma = p_{\sigma_2} = 10$ のときの結果を示す^{*15}。区間分割はイールドカーブの形状をもとに [0, 1], [1, 5], [5, 15], [15, 30] 年とした。最適化によりスワップション価格をほぼ再現するように区間分割を決定することも可能であるが、それは overfitting であると考えて実施しなかった。

推定に使用した割引率を表5に、スワップションのボラティリティマトリックスを表6に^{*16}、パラメータの推定結果を表7に示す。表7より、QG++モデルと区間分割QG++モデルのパラメータ推定値は大きく異なり、ノルムは区間分割によって大幅に低下することがわかる。図2には推定パラメータによるスワップション価格の理論値と市場価格を示す。点線はQG++モデルによる理論価格、実線は区間分割モデルによる理論価格、菱形のマーカーは市場価格である。QG++モデルによる理論価格は、テナー（Swap Tenor）5年未満のフィッティングは比較的良好だが、10年以上では市場価格からの乖離が顕著になる。また、テナー1, 2年でスワップションの満期（Expiration）4年以下の理論価格は明らかに高い。一方、区間分割QG++モデルによる理論価格は、テナーが長くなってもQG++モデルほど市場価格から乖離せず、テナー1, 2年かつ満期4年以下の理論価格も市場価格に近付いている。

表7の推定値を区間別にみると、区間分割QG++モデルの α と β はイールドカーブの形状にあわせて大きく変動している。また、 σ は15年以下では3%程度であるが、15年超では1%へと低下している。一方、QG++モデルの σ は区間分割QG++モデルのどの期間の σ よりも高く、このためテナー1, 2年で満期4年以下の理論価格が高くなっているが、それでも長期での理論価格は市場価格よりもかなり低い。このことは、QG++モデルの非確率変動項 $\alpha + \beta t$ の表現が期間構造を表現するには不適切であることを示唆している。

表5 カリブレーションに使用した割引率

Tenor	0	1W	1M	2M	3M	6M	9M	1Y	2Y	3Y	4Y
DF	1	0.99997	0.99985	0.99972	0.99956	0.99897	0.99806	0.99660	0.99311	0.99020	0.98510
Tenor	5Y	6Y	7Y	8Y	9Y	10Y	12Y	15Y	20Y	25Y	30Y
DF	0.97993	0.97110	0.96038	0.94643	0.93060	0.91267	0.87370	0.81174	0.71624	0.63924	0.57510

表6 スワップションのボラティリティマトリックス (%)

	Swap Tenor											
Expiration	1Y	2Y	3Y	4Y	5Y	6Y	7Y	8Y	9Y	10Y	15Y	20Y
1Y	38.2	40.4	44.2	48.1	49.2	48.5	46.2	43.5	41.1	39.1	30.1	27.9
2Y	51.3	52.4	53.8	52.1	49.6	46.6	43.9	41.6	39.5	37.5	30.5	28.7
3Y	57.4	56.1	53.4	50.2	47.4	44.3	41.6	39.5	37.7	36.0	30.5	29.2
4Y	58.6	53.2	48.9	44.9	42.5	40.0	38.0	36.3	35.0	33.9	30.1	29.3
5Y	55.4	49.5	44.4	41.1	38.4	36.5	35.1	33.9	33.0	32.2	29.7	29.5
7Y	43.0	39.6	36.9	34.9	33.4	32.3	31.5	30.9	30.5	30.2	29.5	29.8
10Y	33.5	32.3	31.5	30.8	30.3	29.9	29.7	29.5	29.4	29.4	30.1	30.7

*15 ベナルティ関数法の係数の設定には恣意性が残されている。ここではさまざまな ($p_\phi, p_\sigma, p_{\sigma_2}$) で推定を行った中で、ノルム、 $|\phi(t)|$ 、各区分ごとのパラメータ推定値の差（変化）がどれも小さくなったときの結果を示している。なお、本稿では価格の相対誤差をノルムとしたが、インプライドボラティリティの相対誤差をノルムとして最適化してもよい。

*16 割引率とボラティリティは2012/5/7のThomson Reuters社提示値である。表の行と列にはそれぞれスワップションの満期（＝スワップの開始時点）とテナー（スワップの期間）を表示した。例えば、満期2年テナー3年のスワップションは、スワップションの満期が2年、すなわち2年後開始のスワップに対するオプションで、開始後のスワップ期間は3年間であることを意味する。

表7 スワップション価格による金利モデルのパラメータの推定値

モデル	分割区間 (年)	σ	a	α	β	ノルム
QG++	-	0.03905	0.00100	0.00528	0.00648	10.03
区間分割 QG++	0 ~ 1	0.03276	0.00100	0.04288	-0.02372	3.25
	1 ~ 5	0.03032		0.04056	-0.02140	
	5 ~ 15	0.03061		-0.02817	-0.00765	
	> 15	0.01001		-0.12981	-0.00088	

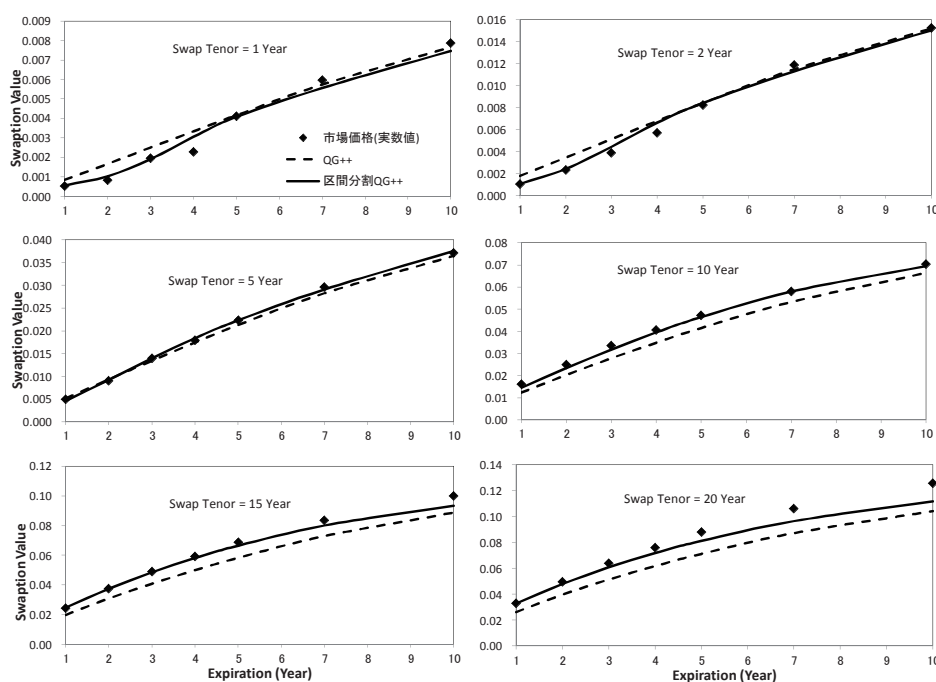


図2 スワップションの理論価格と市場価格

図3に示した $\phi(t)$ の期間構造をみると、QG++モデルの $|\phi(t)|$ は特に長期の部分で大きく、しかも $\phi(t)$ が負値で-1.5%程度になっている。 $\phi(t)$ は時刻 t における短期金利の下限値を意味するので、 $|\phi(t)|$ が大きな値をとることや変動が激しいこと、特に $\phi(t)$ が絶対値の大きな負値をとることは、マイナス金利が現実のものとなった今でも好ましくない。一方、区間分割QG++モデルでも $\phi(t)$ が負になる領域は現れるが、 $\phi(t) > -0.5\%$ なのでQG++モデルほど絶対値の大きな負の金利が現れることはない。

ペナルティ関数法の係数をどのように設定するか、スワップションの市場価格からの乖離幅や $\phi(t)$ の下限値をどの程度まで許容するかという課題は未解決である。また、常に上述のような現実に近い推定結果が得られるとも限らないが、区間分割が $\phi(t)$ のゼロからの大幅な乖離に対して抑制効果があることは確かである。以上の結果と考察から、区間分割QG++モデルは現実的な確率金利モデルの有望な選択肢の一つと考えられる。

5.3 プリペイメント率モデルのパラメータ推定

本項ではプリペイメントモデルの金利感応度係数とベースラインプリペイメント率モデルのパラメータを実際のプリペイメント率のデータから推定し、さらに、モデル選択のRMBS価格への影響を調べる。

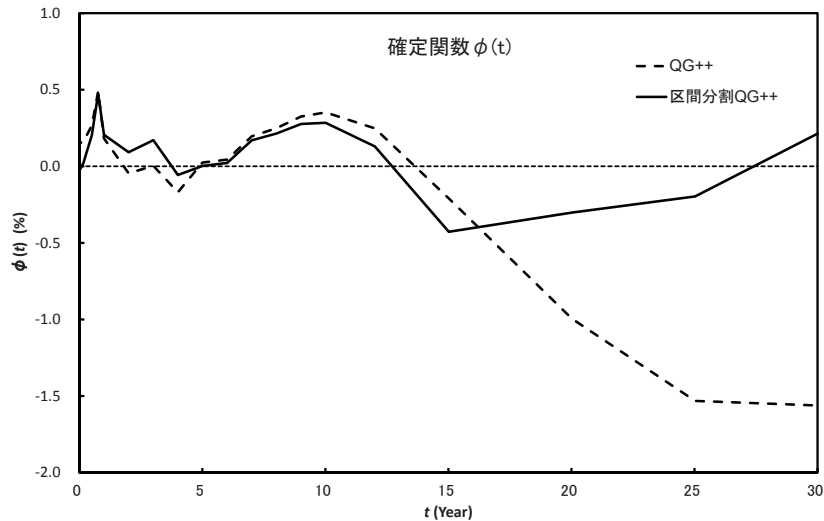


図3 $\phi(t)$ の期間構造

5.3.1 金利感応度係数の推定

5.1 項の RMBS 価格の数値例では金利感応度係数 λ を時間に依存しない定数として扱ったが、志立 (2004) などの実証分析によれば発行時点からの経過時間に依存することが知られているので、まず λ の期間構造の推定を志立 (2004) の分析手法に基づいて実行した。プリペイメント率データは 1983 年 4 月 15 日から 2011 年 6 月 3 日までに発行された住宅金融公庫および住宅金融支援機構の貸付債権担保債券のものを使用した。2011 年 7 月 31 日時点で入手可能なプリペイメント率は加重平均経過期間 (WALA) にして 24 年までであったが、23 年以下のデータは各年数あたり 80 個以上あるのに対し、24 年のデータは 8 個と少なかったので、推定誤差を考慮して 23 年までを使用した。

具体的には以下の回帰式で経過年 1 年毎に金利感応度 λ を推定する。

$$CPR_i = \lambda \Delta r_i + \alpha + \varepsilon_i$$

ただし、 CPR_i は i 番目のデータのプリペイメント率、 Δr_i は i 番目のデータの金利差で、当該債券の WAC (加重平均金利) から CPR を算出した時点における期間 10 年のスワップレート^{*17}を引いた値、 ε_i は i 番目のデータの残差、 α は回帰定数である。

図 4 に λ の推定値を実線で示す。また、この推定のイメージを示すため、図 5 に経過年が [5, 6] 年および [20, 21] 年の CPR 値とその回帰直線を示す。図 4 によると、11 年以降の λ には一定の傾向は見られないが、この原因は図 5 を見ると判明する。[5, 6] 年の間のデータには一定の傾向、金利差が高いほど CPR 値が高くなる傾向が見られるが、[20, 21] 年の間のデータには明確な依存関係は見出しにくい。このような一定の傾向を持たない分析結果に関しては、推定値をそのまま使用するのも一つの方法であるが、ここでは金利感応度の影響は経過 10 年付近までで十分に表現できていると考えて、11 年以降は経過 30 年で金利依存性がなくなるように単純化して使用する (図 4 の破線を参照)^{*18}。

^{*17} プリペイメント率には長期金利が反映されると考えて 10 年スワップレートで回帰したため、短期のフォワード金利を想定した価格近似式とは整合的でない。一方、近似式にあわせて短期の金利を使って分析すると、長期間におよぶ超低金利の影響を受けるため、推定結果が本来想定している金利感応度を示すかどうか疑わしい結果が得られる。そこで、問題が残ることは認識しつつ、10 年スワップレートによる回帰を選択した。

^{*18} 他にもさまざまな設定がありうるが、その違いによる価格差は小さく、後述の結果にほとんど影響しない。

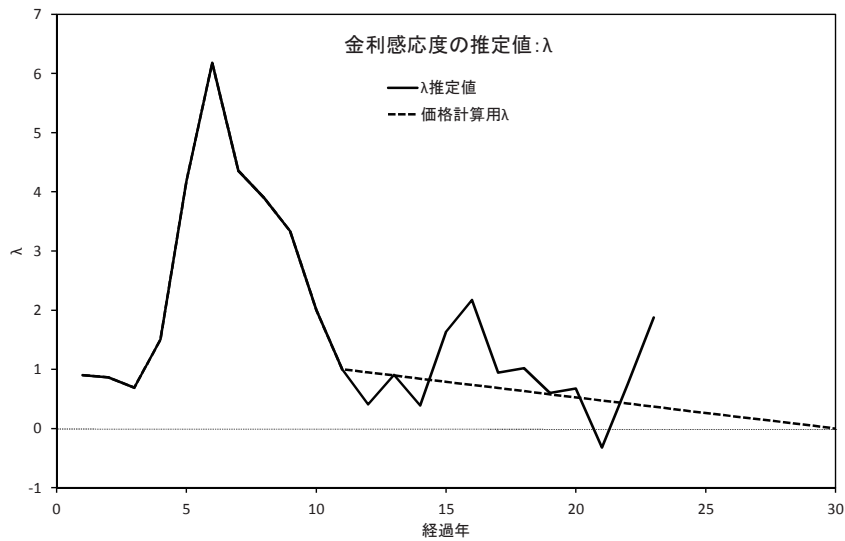


図4 金利感応度係数λの期間構造

5.3.2 ベースラインプリペイメント率モデルのパラメータ推定

次にベースラインプリペイメント率モデルのパラメータを推定するが、比較のため HW モデルに従う場合も推定する。以後、本項では金利効果除去後の CPR 観測値を単に CPR 観測値と呼び、期間と区間を同じ意味で用いる。

図6に CPR 観測値の平均値の期間構造を黒丸で示す。本来の CPR がこのように短時間で振動的振舞をするとは考えにくいので、最小曲率3次スプライン法（例えば Hutchinson(1986)を参照）によるスムージングを行ってからシフト関数 $\phi(t)$ を推定した。図6の太い実線がスムージングした結果である。3年目から5年目にかけて CPR が減少するのは、この期間において金利感応度係数が大きな値をとるためである（図4参照）。

図7には CPR 観測値の標準偏差を黒丸で示す。標準偏差は11年頃までは増加するが、それ以降は減少に転じているのが見て取れる。このような期間構造を全期間同一のモデルパラメータを用いる1期間モデルで再現することは困難なので、ここでは2期間モデルを用いて表現する。第1区間を $[0, t_1)$ 、第2区間を $[t_1, t_2)$ とすると、2期間モデルの期待値と分散は以下で与えられる。

■状態変数モデル 区間1

$$\begin{aligned} dx_{p1}(t) &= -a_{p1}x_{p1}(t)dt + \sigma_{p1}dz_{p1}(t), & x_{p1}(0) &= 0 \\ E^P[x_{p1}(t)] &= 0 \\ V^P[x_{p1}(t)] &= \frac{\sigma_{p1}^2}{2a_{p1}}(1 - e^{-2a_{p1}t}) \end{aligned}$$

■状態変数モデル 区間2

$$\begin{aligned} dx_{p2}(t) &= -a_{p2}x_{p2}(t)dt + \sigma_{p2}dz_{p2}(t) \\ E^P[x_{p2}(t)] &= 0 \\ V^P[x_{p2}(t)] &= e^{-2a_{p2}(t-t_1)}V^P[x_{p1}(t_1)] + \frac{\sigma_{p2}^2}{2a_{p2}}(1 - e^{-2a_{p2}(t-t_1)}) \end{aligned}$$

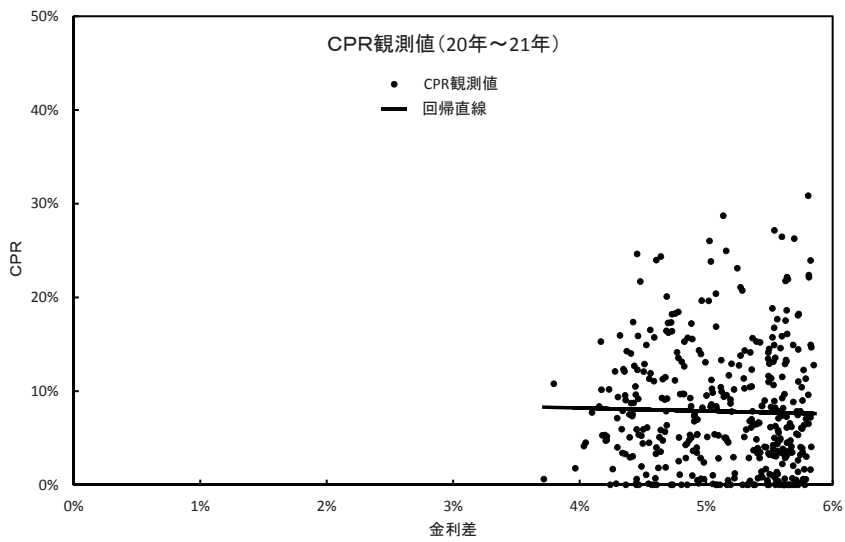
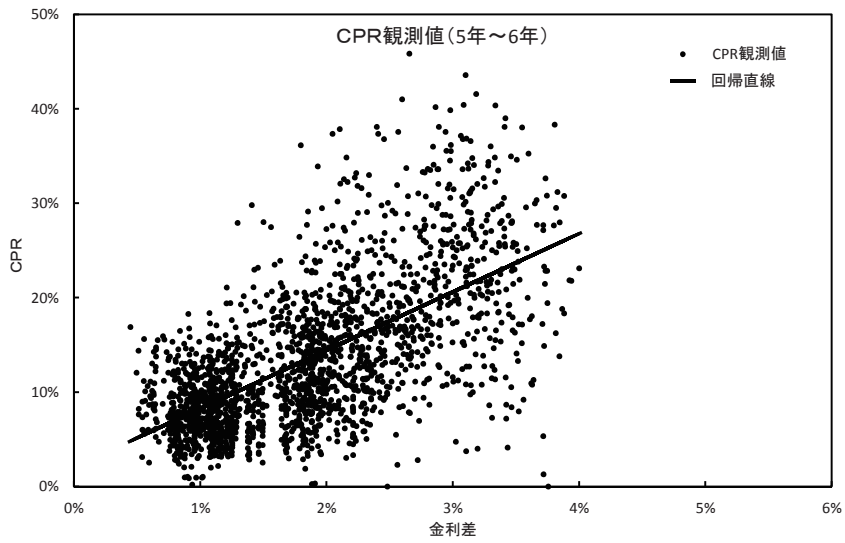


図5 CPR観測値と回帰直線による推定値

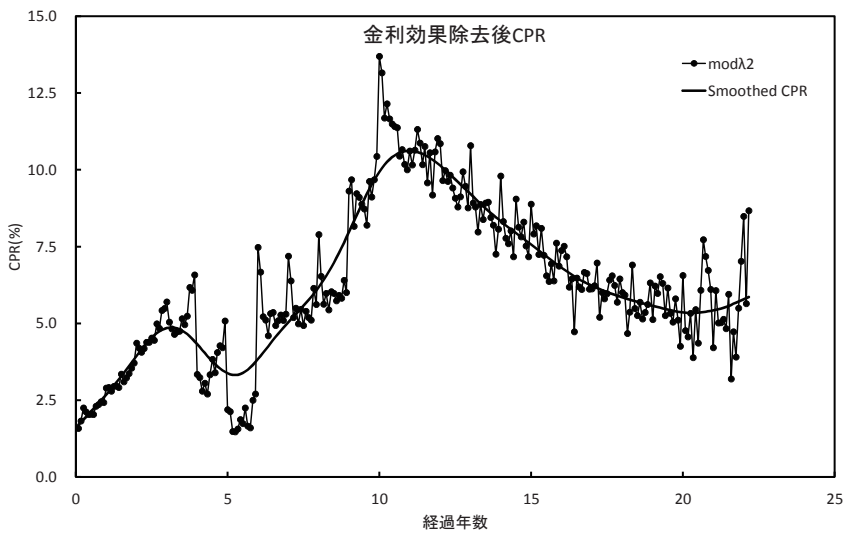


図6 金利効果除去後の CPR 観測値 (黒丸) とスムージングした CPR 値 (太い実線)

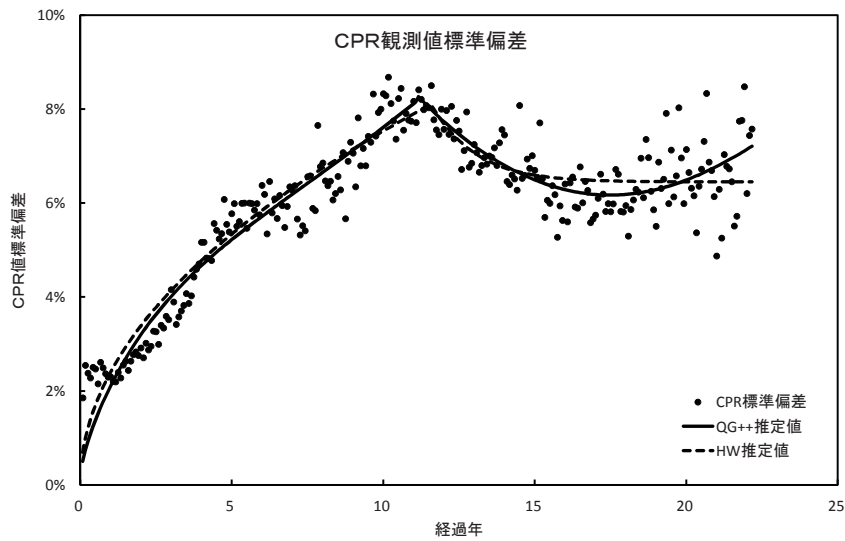


図7 CPR 観測値の標準偏差の期間構造.

■HW モデル 区間1

$$g_{p1}(t) = x_{p1}(t) + \phi_p(t)$$

$$E^P[g_{p1}(t)] = \phi_p(t)$$

$$V^P[g_{p1}(t)] = V^P[x_{p1}(t)]$$

■HW モデル 区間2

$$g_{p2}(t) = x_{p2}(t) + \phi_p(t)$$

$$E^P[g_{p2}(t)] = \phi_p(t)$$

$$V^P[g_{p2}(t)] = V^P[x_{p2}(t)]$$

■QG++ モデル 区間1

$$g_{p1}(t) = (x_{p1}(t) + \alpha_{p1} + \beta_{p1}t)^2 + \phi_p(t)$$

$$E^P[g(t)] = \frac{\sigma_{p1}^2}{2a_{p1}}(1 - e^{-2a_{p1}t}) + (\alpha_{p1} + \beta_{p1}t)^2 + \phi_p(t)$$

$$V^P[g(t)] = \frac{\sigma_{p1}^4}{2a_{p1}^2}(1 - e^{-2a_{p1}t})^2 + \frac{2\sigma_{p1}^2}{a_{p1}}(\alpha_{p1} + \beta_{p1}t)^2(1 - e^{-2a_{p1}t})$$

■QG++ モデル 区間2

$$g_{p2}(t) = (x_{p2}(t) + \alpha_{p2} + \beta_{p2}t)^2 + \phi_p(t)$$

$$E^P[g(t)] = V^P[x_{p2}(t)] + (\alpha_{p2} + \beta_{p2}t)^2 + \phi_p(t)$$

$$V^P[g(t)] = 2(V^P[x_{p2}(t)])^2 + 4(\alpha_{p2} + \beta_{p2}t)^2 V^P[x_{p2}(t)]$$

CPR の WALA は 24 年まで使用可能であったが、267 ヶ月以降は月毎のデータ数が 10 以下なので、ここでは $t_2 = 266$ ヶ月を採用した。平均回帰係数とボラティリティおよび t_1 はモデルによる標準偏差と観測値の標準偏差の残差 2 乗和が最小になるように推定した。その結果を表 8 に示す。また、モデルによる標準偏差を図

表8 ベースラインプリペイメントモデルのカリブレーション結果

モデル	区間 (年)	ボラティリティ	平均回帰係数	α	β
QG++ モデル	[0, 11.1)	0.1184	0.1468	-0.0711	0.0168
	[11.1, 30)	0.1854	0.3941	0.3327	-0.0191
HW モデル	[0, 11.6)	0.0239	0.0010	—	—
	[11.6, 30)	0.0556	0.3712	—	—

7の実線 (QG++ モデル) と破線 (HW モデル) に示す。両モデルとも観測値をよく再現できているが、11年目以降では推定値に違いが見られる。

図8は、QG++ モデルとHW モデルによるシフト関数 $\phi_p(t)$ である。ただし、267ヶ月以降は、266ヶ月目と同じ値をとるものとした。状態変数方式のHW モデルでは $\phi_p(t)$ の値はCPR 観測値そのものである。QG++ モデルでは $\phi_p(t)$ が全期間で正值を取ればベースラインプリペイメント率の正值性は保証されるが、カリブレーションの結果は5.5年目近傍でわずかに負値をとる。しかし、その絶対値は小さく期間も短いので、価格計算に大きな影響はないと考えられる。なお、この5.5年付近は金利感応度係数 λ が非常に高い値をとる領域でもあるので、回帰分析により金利効果がやや高めに推定されたためにベースライン部分が負値になった可能性も考えられる。

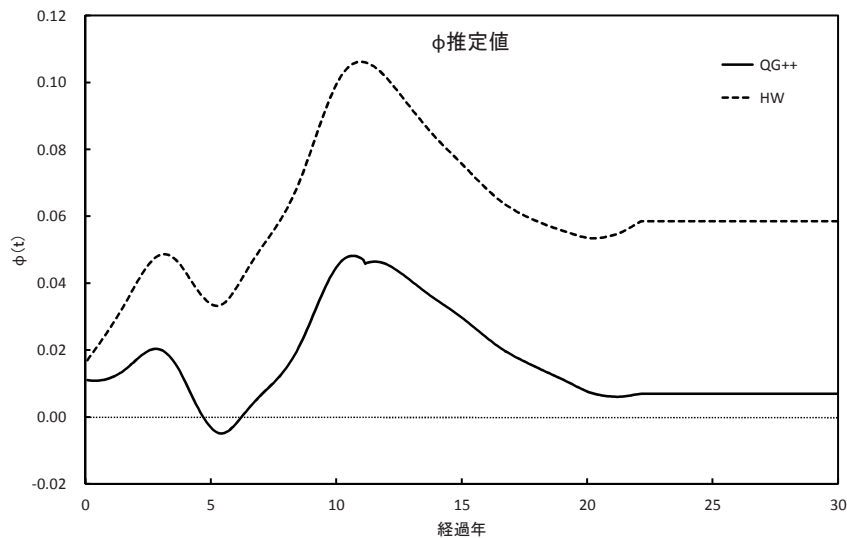


図8 ベースラインプリペイメント率のシフト関数の期間構造

5.3.3 カリブレーション結果を使用した価格計算

最後に、ベースラインプリペイメント率モデルの違いが価格に与える影響を数値例で示す。

表1のMBS諸元、表7の区間分割QG++モデルパラメータ、表8のベースラインプリペイメント率モデルパラメータ、図4の金利感応度カーブを用いて得られた結果を図9に示す。図9の上図では5%の連続複利一定を仮定して算出したDFカーブを使用し、下図ではカリブレーション日付(2012/5/7)のDFカーブ(表5)を使用した。金利シフトは連続複利ゼロレートを全期間一定の幅で変化させ、もしも、ゼロレートが負になる場合はフローア金利0.001%で置き換えた。図9下図において金利減少幅が0.5%以下で価格がほとんど変化しなくなるのはフローア金利に達したためである。また、図9上図は発行時点においてWAC(=L(t))が

4.5%で10年ゼロレートが5%なので、(11)の右辺第1項の金利感応度項の当初の値はゼロである。一方、図9下図は10年ゼロレートが0.91%でWAC(= $L(t)$)と大きく乖離しているが、当初は $\lambda(t) \simeq 1$ なので、やはり金利感応度項の当初の値は小さいが、4年以降では $\lambda(t)$ の上昇とともに大きな値になる。

図9上下図ともQG++モデルとHWモデルは相対誤差1%未満で一致している。図9上図では金利感応度項は主に金利シフトが負の領域で働き、図9下図では広い領域で働く設定となっているが、これらのプリペイメントが生じしやすい領域ではRMBSの特徴であるネガティブ・コンベキシティが見て取れる。

HWモデルは負のプリペイメント率を生じるモデルであるが、QG++モデルとほとんど価格に差が無いのは次の理由によると考えられる。ベースラインプリペイメント率 $g(t)$ が価格式に入ってくるのは(13)のみであり、観測確率 P のもとにおける条件付期待値演算子を $E_t^P[\cdot]$ とすると、その効果は

$$E_t^P \left[\exp \left\{ - \int_t^{t_1} g(s) ds \right\} \right] \quad (35)$$

で表現される。ところで5.3.2節で提案した推定手法では $E^P[g(t)]$ と $V^P[g(t)]$ 、すなわち2次モーメントまでをカリブレーションによりCPRの観測値に適合させており、その再現性は両モデルともかなり高い(図7参照)。そのため、どちらのモデルでも(35)は近い値となり、価格も近い値になったと考えられる。両モデルの価格は常にこのように近い値をとるわけではなく、CPR観測値の分散曲線を各モデルがよく再現する場合には限られることに注意されたい。

本稿では負のプリペイメント率の発生を回避する工夫として金利感応度項の非負化とベースラインプリペイメント率の非負化を提案したが、これらの結果から、効果としては前者の寄与が大きく、後者に関しては、負のプリペイメント率が生じるモデルを用いても、平均と分散の期間構造を使ったカリブレーションを経ることで明確な差が現れにくくなることがわかった。

6 おわりに

本稿では、岸田ら(2013)による期限前償還リスクの期間構造と金利依存性を考慮したRMBSの価格付けモデル(KTMモデル)を発展させて、観測データにより整合的で、プリペイメントの現実に即したモデルを提案した。まず、プリペイメント率を金利依存項とベースライン項の和で表現して、それぞれの項が非負になるモデルを提案し、RMBS価格の近似式を導出して数値例でモデルの特性を分析した。その近似式をモンテカルロ法による結果と比較すると近似精度は良好であり、しかも理論価格はプリペイメントの現実と整合的に振る舞うこと、すなわち、ネガティブ・コンベキシティは金利低下局面では顕著に表れるが、金利上昇局面では明確でなくなることがわかった。金利モデルに関しては区間分割QG++モデルを提案し、カリブレーションのためにスワップション価格の精度の良い近似式を導出した。また、提案モデルが実用に耐えることを示すため、実際の金利デリバティブとプリペイメントの観測データからモデルパラメータを推定したところ、将来の金利に関しては-0.5%程度までの負値を許容する一方、将来のプリペイメント率に関してはほぼ非負となる結果が得られた。さらに、ある条件のもとでは負のプリペイメント率が生じるモデルを用いてもRMBS価格があまり変わらないことも示した。

将来の金利変動に対するリスク管理業務においては、多くの金利変動シナリオのもとでRMBS価格やグリークスを計算する必要があるが、長時間の計算を必要とする価格評価手法は現実的ではない。これに対して、提案モデルは市場で観測される金利とプリペイメント率の長期変動特性を価格に反映できるだけでなく、RMBS価格の精度のよい近似値を解析的に算出できるため、偏微分方程式の差分法やモンテカルロシミュレーション等の価格評価手法に比べて計算時間が短く*19、金融リスク管理の実務でも十分役に立つと考えられる。

*19 メモリ2GB、周波数2.4GHzのPCで、月払で満期30年のRMBS価格算出は30秒未満、金利のカリブレーションは3分未満で完了する。

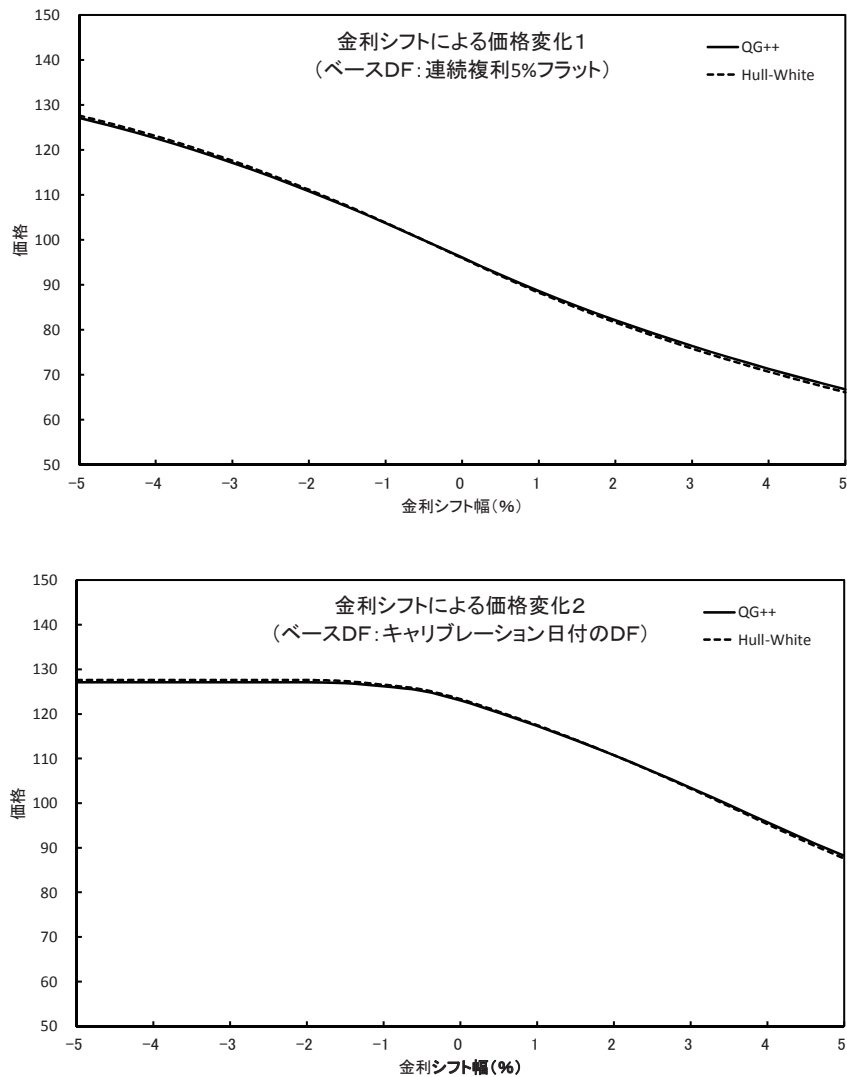


図9 ベースラインプリペイメント率モデルの違いによるRMBS価格の相違

さらに、本稿のモデルはRMBSだけでなく、将来キャッシュフローに深く関連するリスクファクターが独自の期間構造および金利依存性を持つ商品、例えば中途解約を考慮すべき投資商品や貯蓄性のある保険商品などにもそのまま適用可能である。ただし、保険商品では市場価格は観測できないので、価格評価ではなく、将来のリスク評価のためのシミュレーションモデルとして使うことになると思われる。

一方、パラメータ推定においてはペナルティ関数法の係数の設定方法、 $\phi(t)$ の下限値の設定方法などの未解決の課題も残されている。これらの課題の解決と、実際のRMBSの市場価格とプリペイメント率データを併用した実証分析、およびRMBSポートフォリオのリスク計測モデルの提案が今後の重要な研究課題である。

付録A フロアーの価格式

時刻 t における期間 $[T_i, T_{i+1}]$, $t \leq T_i < T_{i+1}$ のフォワード金利を $L(t, T_i, \Delta T_i)$, $\Delta T_i = T_{i+1} - T_i$ とすると、

$$1 + L(T_i, T_i, \Delta T_i) \Delta T_i = \frac{1}{v(T_i, T_{i+1})}$$

なので、フロアレートを K とするフロアレット価格は、

$$\begin{aligned} P_{\text{floorlet}}(t, T_i, T_{i+1}, K) &= E_t^Q \left[e^{-\int_t^{T_{i+1}} r(s) ds} (K - L(T_i, T_i, \Delta T_i))^+ \Delta T_i \right] \\ &= (1 + K \Delta T_i) P_{\text{call}} \left(t, T_i, T_{i+1}, \frac{1}{1 + K \Delta T_i} \right) \end{aligned}$$

と書ける。ただし、 $P_{\text{call}}(t, T, \tau, K)$, $t \leq T \leq \tau$ は満期 τ の割引債の上にかかれた満期 T , 行使価格 K のヨーロッパコールオプションの時刻 t における価格である。よって、時刻 t における利払時点 T_1, \dots, T_n , フロアレート K のフロア価格 $P_{\text{cap}}(t, \mathbf{T}, K)$ は、

$$P_{\text{cap}}(t, \mathbf{T}, K) = \sum_{i=0}^{n-1} (1 + K \Delta T_i) P_{\text{call}} \left(t, T_i, T_{i+1}, \frac{1}{1 + K \Delta T_i} \right)$$

で与えられる。さらに、Pelsser(1997) より、QG++ モデルによる満期 τ の割引債を原資産とする満期 T , 行使価格 K のヨーロッパプットオプションの時刻 t における価格は、

$$P_{\text{put}}(t, T, \tau, K, x(t)) = v(t, T; x(t)) K \{1 - \Phi(h_1) + \Phi(\ell_1)\} - v(t, \tau; x(t)) \{1 - \Phi(h_2) + \Phi(\ell_2)\}$$

で与えられる。ただし、 $\Phi(\cdot)$ は標準正規分布の分布関数で、

$$\begin{aligned} \ell_1 &= \frac{\ell(T, \tau, K(T, \tau)) - \mu_x(t, T, x(t))}{\sqrt{\Sigma(t, T)}}, & \ell_2 &= \frac{\ell(T, \tau, K(T, \tau)) - \frac{\chi(t, T, \tau, x(t))}{\omega(t, T, \tau)}}{\sqrt{\frac{\Sigma(t, T)}{\omega(t, T, \tau)}}} \\ h_1 &= \frac{h(T, \tau, K(T, \tau)) - \mu_x(t, T, x(t))}{\sqrt{\Sigma(t, T)}}, & h_2 &= \frac{h(T, \tau, K(T, \tau)) - \frac{\chi(t, T, \tau, x(t))}{\omega(t, T, \tau)}}{\sqrt{\frac{\Sigma(t, T)}{\omega(t, T, \tau)}}} \\ \ell(t_1, t_2, a) &= \frac{-B_Q(t_1, t_2) - \sqrt{d(t_1, t_2, a)}}{2C_Q(t_1, t_2)}, & h(t_1, t_2, a) &= \frac{-B_Q(t_1, t_2) + \sqrt{d(t_1, t_2, a)}}{2C_Q(t_1, t_2)} \\ K(t, T) &= K \exp \left\{ \int_t^T \phi(s) ds \right\}, & d(t_1, t_2, a) &= B_Q^2(t_1, t_2) + 4C_Q(t_1, t_2) \{A_Q(t_1, t_2) - \log a\} \end{aligned}$$

である。 $\Sigma(t, T)$, $\mu_x(t, T, x)$, $\omega(t, T, \tau)$, $\chi(t, T, \tau, x)$ は付録 C を、QG++ モデルの A_Q , B_Q , C_Q は岸田ら(2013)を参照。区間分割 QG++ モデルの A_Q , B_Q , C_Q にはそれぞれ付録 B の D_0 , D_1 , D_2 が対応する。

付録 B 区間分割 QG++ モデルにおける割引債価格式

区間分割 QG++ モデルにおける割引債価格 (26) に含まれる関数 $D_j(t, T, i)$, $j = 0, 1, 2$ は、

$$\begin{aligned} D_2(t, T, i) &= \frac{\gamma_i A_7(t, T, i)}{2\sigma_i^2 A_5(t, T, i)} - \frac{a_i}{2\sigma_i^2} = \frac{A_8(t, i) + A_{10}(t, i) D_2(t, T, i+1)}{A_5(t, T, i)} \\ D_1(t, T, i) &= \frac{2\{\gamma_i D_1(t_i, T, i+1) + B_1(t, T, i)\}}{\gamma_i^2 A_5(t, T, i)} \\ D_0(t, T, i) &= D_0(t_i, T, i+1) - \sigma_i^2 \left\{ \frac{A_4(t, T, i)}{\gamma_i^5 A_5(t, T, i)} + A_6(t, T, i) \right\} - \alpha_i^2 (t_i - t) - \alpha_i \beta_i (t_i^2 - t^2) - \frac{\beta_i^2}{3} (t_i^3 - t^3) \\ &\quad + \frac{\sigma_i^2}{2} \left\{ 4D_1(t_i, T, i+1) \frac{A_{11}(t, i)}{\gamma_i^2 A_5(t, T, i)} + D_1^2(t_i, T, i+1) \frac{A_8(t, i)}{A_5(t, T, i)} \right\} \end{aligned}$$

で与えられる。ただし、

$$\begin{aligned} A_{1a}(t, i) &= -e^{\gamma_i(t_i-t)} + 4 - e^{-\gamma_i(t_i-t)} (3 + 2\gamma_i(t_i - t)) \\ A_{1b}(t, i) &= e^{-\gamma_i(t_i-t)} - 4 + e^{\gamma_i(t_i-t)} (3 - 2\gamma_i(t_i - t)) \\ A_{2a}(t, i) &= e^{\gamma_i(t_i-t)} (1 - \gamma_i t_i) - 2(1 - \gamma_i(t + t_i)) + e^{-\gamma_i(t_i-t)} (1 - \gamma_i(2t + t_i) + \gamma_i^2(t^2 - t_i^2)) \\ A_{2b}(t, i) &= e^{-\gamma_i(t_i-t)} (1 + \gamma_i t_i) - 2(1 + \gamma_i(t + t_i)) + e^{\gamma_i(t_i-t)} (1 + \gamma_i(2t + t_i) + \gamma_i^2(t^2 - t_i^2)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{3a}(t, i) &= -4\gamma_i t(1 - \gamma_i t_i) - e^{\gamma_i(t_i-t)}(1 - \gamma_i t_i)^2 + e^{-\gamma_i(t_i-t)} \left\{ 1 + 2\gamma_i t - \gamma_i^2(2t^2 + t_i^2) + \frac{2}{3}\gamma_i^3(t^3 - t_i^3) \right\} \\
A_{3b}(t, i) &= -4\gamma_i t(1 + \gamma_i t_i) + e^{-\gamma_i(t_i-t)}(1 + \gamma_i t_i)^2 - e^{\gamma_i(t_i-t)} \left\{ 1 - 2\gamma_i t - \gamma_i^2(2t^2 + t_i^2) - \frac{2}{3}\gamma_i^3(t^3 - t_i^3) \right\} \\
A_4(t, T, i) &= Q_i \{ \alpha_i^2 \gamma_i^2 A_{1b}(t, i) + 2\alpha_i \beta_i \gamma_i A_{2b}(t, i) + \beta_i^2 A_{3b}(t, i) \} \\
&\quad + R_i \{ \alpha_i^2 \gamma_i^2 A_{1a}(t, i) + 2\alpha_i \beta_i \gamma_i A_{2a}(t, i) + \beta_i^2 A_{3a}(t, i) \} \\
A_5(t, T, i) &= Q_i e^{\gamma_i(t_i-t)} + R_i e^{-\gamma_i(t_i-t)} \\
A_6(t, T, i) &= \frac{1}{2\sigma_i^2} \log \left(\frac{A_5(t, T, i)}{2\gamma_i} \right) - \frac{a_i}{2\sigma_i^2} (t_i - t) \\
A_7(t, T, i) &= Q_i e^{\gamma_i(t_i-t)} - R_i e^{-\gamma_i(t_i-t)} \\
A_8(t, i) &= e^{\gamma_i(t_i-t)} - e^{-\gamma_i(t_i-t)} = 2 \sinh(\gamma_i(t_i - t)) \\
A_9(t, i) &= e^{\gamma_i(t_i-t)} + e^{-\gamma_i(t_i-t)} = 2 \cosh(\gamma_i(t_i - t)) \\
A_{10}(t, i) &= (\gamma_i - a_i) e^{\gamma_i(t_i-t)} + (\gamma_i + a_i) e^{-\gamma_i(t_i-t)} = 2\gamma_i \cosh(\gamma_i(t_i - t)) - 2a_i \sinh(\gamma_i(t_i - t)) \\
A_{11}(t, i) &= \gamma_i(\alpha_i + \beta_i t_i) A_9(t, i) - 2\gamma_i(\alpha_i + \beta_i t) - \beta_i A_8(t, i) \\
B_1(t, T, i) &= \alpha_i \gamma_i \left\{ Q_i e^{\gamma_i(t_i-t)} - R_i e^{-\gamma_i(t_i-t)} - (Q_i - R_i) \right\} \\
&\quad + \beta_i \gamma_i \left\{ t(Q_i e^{\gamma_i(t_i-t)} - R_i e^{-\gamma_i(t_i-t)}) - t_i(Q_i - R_i) \right\} + \beta_i \left\{ Q_i e^{\gamma_i(t_i-t)} + R_i e^{-\gamma_i(t_i-t)} - 2\gamma_i \right\} \\
Q_i &= \gamma_i + (a_i + 2\sigma_i^2 D_2(t_i, T, i + 1)) \\
R_i &= \gamma_i - (a_i + 2\sigma_i^2 D_2(t_i, T, i + 1)) \\
\gamma_i &= \sigma_i \sqrt{2H_i} = \sqrt{2\sigma_i^2 + a_i^2}
\end{aligned}$$

である． $D_j(t_i, T, i + 1)$, $j = 0, 1, 2$ は区間 i の終端 t_i における境界条件で，満期 T を含む区間 $i = q$ では $t_q = T$ を区間終端とみなして (33) を境界条件とすればよい．なお，

$$\Phi(t) \equiv \int_0^t \phi(s) ds$$

を定義すると， $x(0) = 0$ と (26) より，

$$\Phi(T) = \int_0^T \phi(s) ds = D_0(0, T, 1) - \log v(0, T; 0)$$

なので，

$$v(t, T; x(t)) = \frac{v(0, T; 0)}{v(0, t; 0)} e^{D_0(0, t, 1) - D_0(0, T, 1) + D_0(t, T, p) - D_1(t, T, p)x(t) - D_2(t, T, p)x^2(t)}, \quad t \in [t_{p-1}, t_p]$$

とも表現できる．

付録 C フォワード中立確率のもとにおける状態変数 $x(T)$ の分布

本節では，スワップション価格の近似式導出のもとになる状態変数 $x(T)$ の分布を導出する．(4)–(5) を一般化し，リスク中立確率 Q のもとで時刻 t , $0 \leq t \leq T^*$ におけるリスクフリーな短期金利 $r(t)$ が

$$\begin{aligned}
dx(t) &= -a(t)x(t)dt + \sigma(t)dz^Q(t) \\
r(t) &= (x(t) + \nu(t))^2 + \phi(t)
\end{aligned}$$

に従うと仮定する．ただし， $a(t)$, $\sigma(t)$, $\phi(t)$ は時刻 t の確定的な関数， $\nu(t)$ は t の一次関数， $z^Q(t)$ は Q のもとにおける標準ブラウン運動とする．このとき，時刻 t における満期 T の割引債価格 $P(t, T)$, $t \leq T \leq T^*$

が³, 確定的な関数 $E_i(t, T)$, $i = 0, 1, 2$ を用いて

$$P(t, T; x(t)) = \exp \left\{ - \int_t^T \phi(s) ds + E_0(t, T) - E_1(t, T)x(t) - E_2(t, T)x^2(t) \right\} \quad (36)$$

と表現できるならば^{*20}, $x(t)$ はフォワード中立確率 P^τ のもとで

$$\begin{aligned} dx(t) &= g(t, x(t))dt + \sigma(t)dz^\tau(t) \\ g(t, x(t)) &= -\sigma^2(t)E_1(t, \tau) - \{a(t) + 2\sigma^2(t)E_2(t, \tau)\}x(t) \end{aligned}$$

に従うので,

$$\begin{aligned} x(T) &= x(t) \exp \left\{ - \int_t^T (a(s) + 2\sigma^2(s)E_2(s, \tau)) ds \right\} \\ &\quad - \int_t^T \sigma^2(s)E_1(s, \tau) \exp \left\{ - \int_s^T (a(v) + 2\sigma^2(v)E_2(v, \tau)) dv \right\} ds \\ &\quad + \int_t^T \sigma(s) \exp \left\{ - \int_s^T (a(v) + 2\sigma^2(v)E_2(v, \tau)) dv \right\} dz^\tau(s), \quad t \leq T \leq \tau \end{aligned} \quad (37)$$

となる. ただし, $z^\tau(t)$ は P^τ における標準ブラウン運動である. (37) より, $x(T)$ は P^τ のもとで期待値 $\mu_x(t, T, \tau; x(t))$, 分散 $\Sigma(t, T, \tau)$ の正規分布に従う. ここで,

$$\begin{aligned} \mu_x(t, T, \tau; x(t)) &\equiv E_t^\tau[x(T)] = x(t)F(t, T, \tau) - I(t, T, \tau) \\ \Sigma(t, T, \tau) &\equiv V_t^\tau[x(T)] = \int_t^T \sigma^2(s)F^2(s, T, \tau)ds \end{aligned} \quad (38)$$

$$F(t, T, \tau) = \exp \left\{ - \int_t^T (a(s) + 2\sigma^2(s)E_2(s, \tau)) ds \right\} \quad (39)$$

$$I(t, T, \tau) = \int_t^T \sigma^2(s)E_1(s, \tau)F(s, T, \tau)ds \quad (40)$$

である. 特に $\tau = T$ の場合を $\mu_x(t, T; x(t)) \equiv \mu_x(t, T, T; x(t))$, $\Sigma(t, T) \equiv \Sigma(t, T, T)$, $F(t, T) \equiv F(t, T, T)$, $I(t, T) \equiv I(t, T, T)$ とおく. フォワード中立確率 P^T と P^τ における $x(T)$ の密度関数をそれぞれ $f^T(z)$, $f^\tau(z)$ とすると, $dP^\tau/dP^T = P(T, \tau)/(P(t, \tau)/P(t, T))$ で, $P(t, \tau)/P(t, T)$ は P^T のもとでマルチンゲールなので,

$$f^\tau(z) = \frac{dP^\tau}{dP^T} f^T(z) = \frac{P(T, \tau; z)}{E_t^T[P(T, \tau; z)]} f^T(z) \quad (41)$$

が成り立つ. ここで (36) を使って $P(T, \tau, z)$ を表して, (41) を具体的に計算すると,

$$f^\tau(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \frac{\Sigma(t, T)}{\omega(t, T, \tau)}}} \exp \left\{ - \frac{\left(z - \frac{\chi(t, T, \tau, x(t))}{\omega(t, T, \tau)} \right)^2}{2 \frac{\Sigma(t, T)}{\omega(t, T, \tau)}} \right\} \quad (42)$$

$$\omega(t, T, \tau) = 1 + 2E_2(T, \tau)\Sigma(t, T) \quad (43)$$

$$\chi(t, T, \tau, x(t)) = \mu_x(t, T, x(t)) - E_1(T, \tau)\Sigma(t, T) \quad (44)$$

が得られる. (42) より, 確率測度 P^τ のもとで $x(T)$ は平均 $\mu_x(t, T, \tau; x(t))$, 分散 $\Sigma(t, T, \tau)$ の正規分布に従う. ただし,

$$\mu_x(t, T, \tau; x(t)) = E_t^\tau[x(T)] = \frac{\chi(t, T, \tau, x(t))}{\omega(t, T, \tau)} \quad (45)$$

$$\Sigma(t, T, \tau) = V_t^\tau[x(T)] = \frac{\Sigma(t, T)}{\omega(t, T, \tau)} \quad (46)$$

^{*20} 4.1 節より, 本稿の QG++ モデルと区間分割 QG++ モデルはこの条件を満たしている.

である。

C.1 QG++ モデル

QG++ モデルは $a(t) = a, \sigma(t) = \sigma, \nu(t) = \alpha + \beta t$ (a, σ, α, β は定数) とした場合である。このとき、 $E_0(t, T) = A_Q(t, T), E_1(t, T) = B_Q(t, T), E_2(t, T) = C_Q(t, T)$ であり、

$$I(t, T) = \sigma^2 \left[\frac{B_Q(t, T)}{F(t, T)} C_Q(t, T) + \frac{\alpha}{\gamma^2} (2 - A_9(t, T)) + \frac{\beta}{\gamma^2} (2T - tA_9(t, T)) - \frac{\beta}{\gamma^3} A_8(t, T) \right]$$

$$\Sigma(t, T) = \sigma^2 C_Q(t, T)$$

が得られる。これらと (43)–(46) より $\mu_x(t, T, \tau; x(t))$ と $\Sigma(t, T, \tau)$ が得られる。

C.2 区間分割 QG++ モデル

4 節の設定による区間分割 QG++ モデルを考えると、 $t \in [t_{i-1}, t_i], i = 1, \dots, m$ において $E_0(t, T) = D_0(t, T, i), E_1(t, T) = D_1(t, T, i), E_2(t, T) = D_2(t, T, i)$ である。(39) の $F(t, T, \tau)$ の引数 t, T, τ を含む区間をそれぞれ k_t, k_T, k_τ , すなわち $t \in [t_{k_t-1}, t_{k_t}], T \in (t_{k_T-1}, t_{k_T}], \tau \in (t_{k_\tau-1}, t_{k_\tau}]$ とすると、 $D_n(t, T, i), n = 0, 1, 2, i < k_\tau$ は τ に境界条件を通してしか依存しない。このため、(38)–(40) の時間積分は容易に計算できて、特に $\tau = T$ のときの結果のみ示すと、

$$F(t, T) = \frac{2\gamma_{k_t} J(k_t, T)}{A_5(t, t_{k_t}, k_t)}$$

$$I(t, T) = \sigma_{k_t}^2 D_1(t, T, k_t) J(k_t, T) \frac{A_8(t, t_{k_t}, k_t)}{A_5(t, t_{k_t}, k_t)} + \sum_{j=k_t+1}^{k_T-1} \sigma_j^2 D_1(t_j, T, j) J(i, T) \frac{A_8(t_{j-1}, t_j, j)}{A_5(t_{j-1}, t_j, j)}$$

$$+ \frac{4\sigma_{k_t}^2}{\gamma_{k_t}} J(k_t, T) I_B(t, t_{k_t}, k_t) + \sum_{j=k_t+1}^{k_T-1} \frac{4\sigma_j^2}{\gamma_j} J(j, T) I_B(t_{i-1}, t_i, j) + \frac{4\sigma_{k_T}^2}{\gamma_{k_T}} I_B(t_{k_T-1}, T, k_T)$$

$$\Sigma(t, T) = \sigma_{k_t}^2 J^2(k_t, T) \frac{A_8(t, t_{k_t}, k_t)}{A_5(t, t_{k_t}, k_t)} + \sum_{j=k_t+1}^{k_T-1} \sigma_j^2 J^2(j, T) \frac{A_8(t_{j-1}, t_j, j)}{A_5(t_{j-1}, t_j, j)} + \sigma_{k_T}^2 C_Q(t, T, k_T)$$

$$J(i, T) = \left(\prod_{j=i+1}^{k_T-1} \frac{2\gamma_j}{A_5(t_{j-1}, t_j, j)} \right) \frac{2\gamma_{k_T}}{A_5(t_{k_T-1}, T, k_T)}$$

$$I_B(t, T, i) = \frac{(\alpha_i + \beta_i T) A_9(t, T, i) - 2(\alpha_i + \beta_i t) - \beta_i A_8(t, T, i)}{2A_5(t, T, i)}$$

で与えられる。ただし、 $C_Q(t, T, i)$ は区間 i のパラメータを使って定義される $C_Q(t, T)$ である。これらと (43)–(46) より $\mu_x(t, T, \tau; x(t))$ と $\Sigma(t, T, \tau)$ が得られる。

付録 D スワップション価格の近似式

Piterbarg(2009) は、スワップ測度 P^A のもとで QG モデルの潜在変数 $x(t)$ が混合正規分布に従うことを用いてスワップション価格の厳密解を導出した。しかし、具体的に価格を得るにはモンテカルロ法が必要になるため、彼はスワップレートを $x(t)$ で Taylor 展開して低次の項までで近似し、さらに $x(t)$ が正規分布に従うとみなしてスワップション価格の近似式を導出した。

時刻 t における時刻 T_0 スタート、 T_N 満期のフォワードスワップレート $S(t)$ は

$$S(t) = \frac{v(t, T_0) - v(t, T_N)}{A(t)}, \quad A(t) = \sum_{i=1}^N \delta_i v(t, T_i)$$

で表現される。ただし、 $T_i, i = 1, \dots, N$ は利払日で、 $\delta_i = T_i - T_{i-1}$ である。 $A(t)$ をニューメレールとする相対価格がマルチンゲールになるスワップ測度 P^A を用いると、時刻 $t = 0$ における行使価格 K のペイヤー・スワップシヨンの価格は

$$P_{\text{swptn}}(0, T_0, K; x(T_0)) = A(0)E^A [(S(T_0, x(T_0)) - K)^+]$$

と書ける。ただし、 $E^A[\cdot]$ はスワップ測度 P^A のもとにおける期待値演算子である。ここで、本来は確率測度 P^A のもとで混合正規分布に従う $x(T_0)$ を、同じ平均 $E^A[x(T_0)]$ と分散 $V^A[x(T_0)]$ をもつ正規分布に従うものとして近似すると、その密度関数は

$$\begin{aligned} \psi^A(x) &\simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi V^A[x(T_0)]}} \exp\left\{-\frac{(x - E^A[x(T_0)])^2}{2V^A[x(T_0)]}\right\} \\ E^A[x(T_0)] &= \sum_{i=1}^N w_i^A E^{T_i}[x(T_0)] \\ V^A[x(T_0)] &= \sum_{i=1}^N w_i^A (V^{T_i}[x(T_0)] + (E^{T_i}[x(T_0)])^2) \end{aligned} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} w_i^A &= \frac{\delta_i P(0, T_i)}{A(0)}, \quad i = 1, \dots, N \\ E^{T_i}[x(T_0)] &= \frac{\chi(0, T_0, T_i, 0)}{\omega(0, T_0, T_i)} \\ V^{T_i}[x(T_0)] &= \frac{\Sigma(0, T_0)}{\omega(0, T_0, T_i)} \end{aligned}$$

で与えられる。 $\chi(0, T_0, T_i, 0)$, $\Sigma(0, T_0)$, $\omega(0, T_0, T_i)$ の導出過程と、具体的なモデルにおけるそれらの表現は付録 C を参照されたい。このときスワップシヨン価格の近似式は、Taylor 展開の一次近似を使うと

$$P_{\text{swptn}}(0, T_0, K; x(T_0)) = A(0)S'(T_0, \bar{x})OPT_{\text{call}}\left(K_1, E^A[x(T_0)], \sqrt{V^A[x(T_0)]}\right)$$

二次項までの近似を使うと

$$P_{\text{swptn}}(0, T_0, K; x(T_0)) = A(0)I(\gamma, \delta, K_2)$$

で与えられる。ただし、 $\phi(\cdot), \Phi(\cdot)$ はそれぞれ標準正規分布の密度関数と分布関数で、

$$\begin{aligned} OPT_{\text{call}}(K, a, b) &= b\phi\left(\frac{K-a}{b}\right) + (a-K)\left(1 - \Phi\left(\frac{K-a}{b}\right)\right) \\ I(a, b, c) &= \int_{-\infty}^{\infty} (ax^2 + bx - c)^+ \psi^A(x) dx \\ K_1 &= E^A[x(T_0)] - \frac{S(0, x(0)) - K}{S'(T_0, \bar{x})} \\ K_2 &= K - S(0, x(0)) + \frac{1}{2}S''(T_0, \bar{x})E^A[x^2(T_0)] \\ &\quad + S'(T_0, \bar{x})E^A[x(T_0)] - S''(T_0, \bar{x})(E^A[x(T_0)])^2 \\ \gamma &= \sqrt{2\sigma^2 + a^2} \\ \delta &= S'(T_0, \bar{x}) - S''(T_0, \bar{x})E^A[x(T_0)] \\ S'(T_0, x) &= \frac{dS(T_0, x)}{dx} = -\frac{v'_{0,N} \sum_{i=1}^N \delta_i v_{0,i} + (1 - v_{0,N}) \sum_{i=1}^N \delta_i v'_{0,i}}{A_0^2} \\ S''(T_0, x) &= \frac{d^2S(T_0, x)}{dx^2} = -\frac{v''_{0,N} A_0 - 2v'_{0,N} A'_0 + (1 - v_{0,N}) A''_0}{A_0^2} + \frac{2(A'_0)^2(1 - v_{0,N})}{A_0^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_0 &= A(T_0, x(T_0)) = \sum_{j=1}^N \delta_j v_{0,j} \\
A'_0 &= \frac{dA(T_0, x(T_0))}{dx} = \sum_{j=1}^N \delta_j v'_{0,j} \\
A''_0 &= \frac{d^2 A(T_0, x(T_0))}{dx^2} = \sum_{j=1}^N \delta_j v''_{0,j} \\
v_{j,i} &= v(T_j, T_i; x(T_j)) \\
v'_{j,i} &= \frac{dv(T_j, T_i; x(T_j))}{dx} = -(B_Q(T_0, T_i) + 2C_Q(T_0, T_i)x)v_{j,i} \\
v''_{j,i} &= \frac{d^2 v(T_j, T_i; x(T_j))}{dx^2} = \left[(B_Q(t_0, T_i) + 2C_Q(T_0, T_i)x)^2 - 2C_Q(T_0, T_i) \right] v_{j,i}
\end{aligned}$$

である。 $OPT_{\text{call}}(K, a, b)$ は原資産価格が正規分布 $N(a, b^2)$ に従うときのコールオプション価格で、(47) の近似を使えば $I(a, b, c)$ も $\phi(\cdot)$ と $\Phi(\cdot)$ を使って表現できる。

謝辞

本稿の内容は株式会社エイファス主催の研究会の成果の一部である。株式会社エイファスの 田中 徹 氏 (現在株式会社 AFG) には共同研究の機会を与えていただいたことに、株式会社エイファスの おお津 昌三 氏には共同研究を継続していただいたことに厚く感謝する。また、匿名の査読者による有益なコメントにも感謝する。最後に、著者の一人である室町は日本学術振興会より科学研究費補助金基盤研究 (A) No.26242028 と (B) No.16H03123 の支援を受けたことに感謝する。

参考文献

- [1] Brigo, D. and F. Mercurio (2006), *Interest Rate Models – Theory and Practice with Smile, Inflation and Credit*, Springer-Verlag, 2nd Edition.
- [2] Collin-Dufresne, P. and J.P. Harding (1999), “A closed form formula for valuing mortgages,” *Journal of Real Estate Finance and Economics*, **19** (2), 133–146.
- [3] Hull, J. C. (2012), *Options, Futures, And Other Derivatives*, Pearson Education Limited, 8th Edition.
- [4] Hull, J. and A. White (1990), “Pricing interest-rate-derivative securities.,” *Review of Financial Studies*, **3**, 573–592.
- [5] Hutchinson, M. F. (1986), “Algorithm 642: A fast procedure for calculating minimum cross-validation cubic smoothing splines,” *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)*, **12** (2), 150–153.
- [6] Kijima, M. and Y. Muromachi (2000), “Evaluation of credit risk of a portfolio with stochastic interest rate and default processes,” *Journal of Risk*, **3**, 5–36.
- [7] Kijima, M., Y. Suzuki and Y. Tamba (2014), “Risk evaluation of mortgage-loan portfolios in a low interest rate environment,” *Journal of Risk*, **16**(5), 3–37.
- [8] Kijima, M., K. Tanaka and T. Wong (2009), “Yield Spread Options under the DLG Model,” in *Modelling Interest Rates*, Risk Books, 43–71.
- [9] 岸田則生, 高山靖敏, 室町幸雄 (2013), 「期限前償還リスクの期間構造と金利依存性を考慮した RMBS の価格付け」, 『日本オペレーションズ・リサーチ学会和文論文誌』, **56**, 53–75.
- [10] Kolbe, A. (2007), *Valuation of Mortgage Products with Stochastic Prepayment-Intensity Models*, Doctoral Dissertation, Technische Universität München.

- [11] 室町幸雄 (2007), 『信用リスク計測と CDO の価格付け』, 朝倉書店.
- [12] 日本証券業協会 (2006), 『PSJ(Prepayment Standard Japan) モデルに関する説明会資料』.
- [13] 日本証券業協会, 全国銀行協会 (2014), 『証券化市場の動向調査のとりまとめ ～2013 年度の発行動向～』.
- [14] Pelsser, A. (1997), “A tractable yield-curve model that guarantees positive interest rates,” *Review of Derivatives Research*, **1**, 269–284.
- [15] Piterbarg, V. (2009), “Rates squared,” *Risk*, **January**, 100–105.
- [16] Rom-Poulsen, N. (2007), “Semi-analytical MBS pricing,” *Journal of Real Estate Finance and Economics*, **34**, 463–498.
- [17] 志立正弘 (2004), 「金利低下時における住宅ローン期限前返済率の変動特性についてーローン設定からの経過月数との関連性に着目してー」, 『ニッセイ基礎研究所報』, **32**, 48–77.
- [18] 新生証券 (2009), 『新生銀行住宅ローン プリペイメントモデル (第 1 版)』.
- [19] Tanaka, K., T. Yamada and T. Watanabe (2010), “Applications of Gram-Charlier Expansion and Bond Moments for Pricing of Interest Rates and Credit Risk,” *Quantitative Finance*, **10**(6), 645–662.
- [20] 山寄輝 (2005), 「住宅ローン債権担保証券のプライシング手法について：期限前償還リスクを持つ金融商品の価格の算出」, 『金融研究』, **24**, 別冊 2 (2005), 57–113.

Pricing Residential Mortgage-Backed Securities Based on the Long-term Stochastic Behaviors of Interest Rates and Prepayment Rates

Wenfeng Huang¹

Norio Kishida¹

Yukio Muromachi²

¹ Quants Research Department, AFG INC.

2-7-8 Shiba-Daimon, Minato-ku, Tokyo 105-0012, Japan

E-mail:wfhuang@afginc.co.jp, nkishida@kuramae.ne.jp

² Graduate School of Social Sciences, Tokyo Metropolitan University

1-1 Minami-Ohsawa, Hachiohji, Tokyo 192-0397, Japan

E-mail:muromachi-yukio@tmu.ac.jp

Abstract

In this paper we propose a new analytical pricing model of Residential Mortgage-Backed Securities (RMBSs) based on the long-term stochastic behaviors of the term structures of interest rates and prepayment rates. We already derived analytical pricing formulas of RMBS under stochastic interest rates and prepayment rates, however, there exist some serious problems. The most serious ones are the appearance of the negative convexity against the upward movement of the interest rate and the difficulty in fitting the swaption prices in the calibration of the interest rate model. In this paper, we show that these problems can be overcome by (a) the positive prepayment rate model and (b) the Quadratic Gaussian++ (QG++) interest rate model with time-dependent parameters. Numerical examples show that our new model is much better than the previous one. Additionally, we estimate the parameters in the prepayment rate model from the observed prepayment data and discuss the effects on pricing RMBS.