ノート

バリュー・アット・リスクの ヒストリカル・シミュレーション法に関する比較分析

岩本菜々*†

2014年8月 1 日投稿
2015年2月18日受理

概要

バリュー・アット・リスク（VaR）は様々な推定手法があるが，事前にリターンの分布を仮定しないヒストリカル・シミュレーション法（HS法）は銀行の市場リスク計測に広く使用されており，重要度が高い手法である．しかし，HS 法はリターンの直近の変動傾向を反映せず，観測期間が短い場合に精度の高い推定結果が得らないという欠点が指摘されている．前者を改良した手法としてハイブリッド法が，後者はカーネル平滑化法が提案されている．本稿では両者の利点を併せ持つ手法を提案し，15ヵ国の主要株式指数を用いたバックテストにより，提案法の優位性を示した．

キーワード：VaR，市場リスク，ヒストリカル・シミュレーション法，Garman-Klass 推定量，カーネル密度推定法

1 はじめに

金融機関において市場リスク管理は必須であるため，その推定精度の向上は非常に重要である．市場リスクの推定手法は多種存在するが，特にバリュー・アット・リスク（VaR）は国際的な銀行の自己資本比率を規定するバーゼル規制に採用されており，また非金融機関でも広く使用されているため重要性が高い．

VaR は J.P.モルガンにより開発された，単一資産や資産ポートフォリオの一般的なリスク推定手法である．VaR の定義は，過去一定期間（観測期間）の価格変動から，ある資産を一定期間保有した場合（保有期間），定めた確率の範囲内（信頼水準）で起こると推測できるその資産の損失の最大値である．つまり，観測期間をT日，保有期間をt日，信頼水準を$1-\alpha$とした場合，観測期間中のT個のリターン$\boldsymbol{R}$のα分位点が観測期間からt日間の

* 大阪市立大学大学院経営学研究科
〒558-8585　大阪府大阪市住吉区杉本 3-3-138
email: iwamotonana@gmail.com
† 本稿の作成にあたり，高田輝子准教授（大阪市立大学）から多くの指導を受けた．また，匿名の査読者から有益なコメントを頂いた．ここに記してこれらの方々に感謝の意を示したい．ただし，本文中に含まれる誤りは全て著者の責任であることは言うまでもない．

$VaR(\boldsymbol{R})$であり，以下の式で計算される[1].

$$VaR(\boldsymbol{R}) = \inf\{x|F(x) \geq \alpha\}$$

ここで，$F(x)$は$\boldsymbol{R}$より求めた累積密度，$\inf(x|A)$は事象Aが成立する条件のもとでのxの下限である．以下$VaR(\boldsymbol{R})$を簡単に VaR と記す．

分位点の推定手法が複数存在するため VaR 推定手法は多種存在する．主要な手法は，分散共分散法（VCV 法），ヒストリカル・シミュレーション法（HS 法），モンテカルロ・シミュレーション法（MCS 法）の 3 手法である[2]．初期の VaR はリターンが正規分布に従っていると仮定する VCV 法である．しかし，金融リターンの多くは正規分布よりも裾が厚い分布であることが知られており，その場合 VCV 法はリスクを過小評価する．この問題を解消する手法として，事前にリターンの分布を仮定しない HS 法が広く使用されるようになった[3].

しかし，HS 法は観測期間の長短と VaR の推定精度との間にトレードオフの関係があることが知られている（Hendricks［1996］）．HS 法は推定値に一部のリターンのみを反映する手法であるため，観測期間が短い場合に精度の高い推定結果が得られず，逆に観測期間が長い場合に推定値の変動が少なくなるという問題がある．この欠点を補う手法として，Efron［1979］によるブートストラップ法を用いた手法，その期待値に一致する Harrell and Davis［1982］による Harrell-Davis 推定量を用いた手法（HD 法），Gourieroux et al.［2000］によるカーネル平滑化法（KHS 法）がある[4]．HD 法は順序統計量の 1 次結合である L-推定量に属する手法であり，KHS 法はカーネル密度推定法から推定した非常に滑らかな累積密度を使用する手法である．両手法は HS 法と同様に，事前にデータの分布を仮定しない手法であるため，不適切なモデルの仮定から生じるリスクを避けることができる．

また，HS 法はすべてのリターンを等加重で扱い，直近のリターンの変動傾向を反映しない．つまり HS 法は 100 日前のリターンと 1 日前のリターンを等しく扱い VaR を推定する．この欠点を補う手法がハイブリッド法と呼ばれる手法があり，Boudoukh et al.［1998］（BRW 法）と Hull and White［1998］（HW 法）がそれぞれ提案している．BRW 法は VaR の推定日と過去のリターンの観測日との距離に関して，HW 法はボラティリティの推定に関して指数型加重移動平均法を用いている．そのため，両手法は減数係数と呼ばれるパラメータを必要とする．その最適なパラメータの推定について Žiković and Aktan［2011］，Changchien et al.［2012］がそれぞれ言及している．Žiković and Aktan［2011］は Lopez［1999］が提案した損失関数の最小化を，Changchien et al.［2012］は Garman and Klass［1980］による Garman-Klass 推定量を用いた（GK 法）．

本稿では，これら HS 法に関する 7 手法，VCV 法，そして新たに提案する GK 法と KHS 法の利点を持つ KGK 法の全 9 手法についてリスク推定の精度比較分析を行う．HS 法は広く使用されている VaR 推定手法であるため，その問題点を補った手法の精度比較を行うことは重要であると考えられる．特に KGK 法は HS 法の複数の欠点を改良する手法であるため，高い推定精度を示す可能性がある．しかし，同様の手法を提案した研究は現在存在せず，それ以前に KHS 法を用いた比較研究は非常に少ない．15 カ国の主要株価指数の日次リターンを用いて，VaR の精度比較手法として一般的であるバックテストにより精度比較を行った結果，本稿で提案した KGK 法が最良の推定精度を示した．

以下に本稿の構成を記す．第 2 章では各手法の詳細について説明し，第 3 章では比較分析に用いるリターンとバックテストについて述べ，VaR 推定手法に使用した各パラメータを詳細に説明したのち，分析結果を示す．そして最後に第 4 章でまと

[1] VaR ではデータに収益を用いる場合と収益率を用いる場合がある．そのため本稿では表記をリターンと統一する．
[2] ほかにも，極値理論，条件付自己回帰 VaR（CAViaR），そしてストレス・テスト等がある．詳しい VaR のサーベイに関しては Jorion［2006］，Chen and Lu［2012］参照．
[3] 2014 年 3 月時点では，三菱 UFJ フィナンシャル・グループ［2014］，三井住友フィナンシャルグループ［2014］，りそなホールディングス［2014］によると市場リスクの計測に HS 法を採用している．みずほフィナンシャルグループ［2014］によると VCV 法と MCS 法を採用している．
[4] KHS 法により HS 法の欠点を改善できると示した研究は Chen and Tang［2005］である．

めと今後の展望を述べる.

2 VaR 推定手法

2.1 分散共分散法

分散共分散法（VCV 法）は観測期間をT日，保有期間 t 日，信頼水準を$1-\alpha$とすると，過去T日間のリターン$\boldsymbol{R}$が正規分布に従っていると仮定し，そのα分位点を VaR とする手法である．リターンの平均をμ，標準偏差をσ，標準正規分布のα分位点を$\emptyset^{-1}(\alpha)$とすると，以下の式で求められる.

$$VCV = \sqrt{t}\,\sigma\,\emptyset^{-1}(\alpha) + \mu t \qquad (1)$$

2.2 ヒストリカル・シミュレーション法

ヒストリカル・シミュレーション法（HS 法）はリターンの経験分布$F_T(x)$のα分位点を VaR とする手法であり，以下の式から算出する.

$$HS = \inf\{x|F_T(x) \geq \alpha\}$$
$$F_T(x) = \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T} I\,(R_i \leq x) \qquad (2)$$

ただし，$I(\ \cdot\ )$は指示関数である.

HS 法による VaR 推定値は標本分位点と呼ばれ，一部のリターンを推定値に反映する手法であり，観測期間が短い場合に精度の高い推定結果が得られないという欠点を持つ．しかし，この問題は Harrell and Davis［1982］による Harrell-Davis 統計量を用いた VaR 推定手法，Gourieroux et al.［2000］によるカーネル平滑化法により改善できる.

2.3 Harrell-Davis 統計量を用いた手法

Harrell-Davis 統計量を用いた VaR 推定手法（HD 法）は,順序統計量に対し標本分位点に近づくにつれ大きい重みを与える L-推定量により求められる.

$$\mathrm{HD} = \sum_{i=1}^{T} w_i^{\alpha} R_{(i)}$$
$$w_i^{\alpha} = \frac{1}{\beta\left((T+1)\alpha, (T+1)(1-\alpha)\right)} \times \int_{(i-1)T}^{i/T} y^{(T+1)\alpha-1}(1-y)^{(T+1)(1-\alpha)-1}\,dy \qquad (3)$$

このとき，$R_{(i)}$はRを昇順に並び替えた順序統計量，$\beta(\ \cdot\ ,\ \cdot\ )$はベータ関数，$w_i^{\alpha}$は$R_{(i)}$に対応する重みである[5].

HD 法は経験分布$F_T(x)$を用いた順序統計量$R_{((T+1)\alpha)}$の期待値$E(R_{((T+1)\alpha)})$であるため，Efron［1979］が提案したブートストラップ法を用いた VaR 推定手法による推定値と一致する（Sheather and Marron［1990］)[6]．ブートストップ法による手法は，T 個のデータから復元抽出により大きさ T の標本を抽出し，標本分位点を求める作業を多数回繰り返し,その期待値を VaR とする手法である．計算量が多い手法であるが，HD 法を使用することでその問題を回避できる.

2.4 カーネル平滑化法

Gourieroux et al.［2000］によるカーネル平滑化法（KHS 法）はカーネル密度推定法により求めた滑らかな確率密度，累積密度を VaR の推定に使用する手法である．カーネル密度推定法はヒストグラム法を一般化した手法であり，以下の式で確率密度が求められる.

$$\mathrm{f}_k(x) = \frac{1}{Th}\sum_{i=1}^{T} k\left(\frac{x-R_i}{h}\right) \qquad (4)$$

このとき, xは評価点, R_iはi番目のデータ, $k(\ \cdot\ )$は$\int k(t)dt = 1$，$\int tk(t)dt = 0$，$\int t^2k(t)dt \neq 0$を満たすカーネル関数，hはバンド幅と呼ばれるカーネル関数の幅を規定するパラメータである.

カーネル密度推定法の最大の論点はバンド幅の選択である[7]．なぜなら，バンド幅hが大きすぎると推定したい確率密度を過剰に平滑化し，小さすぎるとノイズに過剰に反応するからである．また，カーネル関数による推定値の差は非常に小さい[8].

そして，(4) 式を積分すると累積密度が求められる.

---

[5] $\beta(k, n-k+1) = (k-1)!\,(n-k)!/n!$である.

[6] 標本数がnである経験分布$F_n(x)$を用いた順序統計量$X_{(k)}$の期待値$E(X_{(k)})$は以下の式より計算できる.

$$E(X_{(k)}) = \frac{1}{\beta(k,n-k+1)}\int_0^1 F_n(y)^{-1} y^{k-1}(1-y)^{n-k}dy$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\beta(k,n-k+1)}\int_{(i-1)/n}^{i/n} y^{k-1}(1-y)^{n-k}\,dy\,X_{(i)}$$

[7] 最適なバンド幅の選択については議論が行われている．たとえば Jones et al.［1996］や Heidenreich et al.［2013］参照.

[8] 詳しくは Silverman［1986］参照.

$$F_k(x) = \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T} K\left(\frac{x - R_i}{h}\right)$$

このとき，$K(\cdot)$は$k(\cdot)$を積分した関数である．KHS法は$\alpha = F_k(x)$となるxをVaRとする手法であるため，以下の式を解くことで推定値を求めることができる．

$$\frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T} K\left(\frac{KHS - R_i}{h}\right) = \alpha \quad (5)$$

2.5 ハイブリッド法

ハイブリッド法は直近のリターンの変動傾向を反映した VaR 推定手法であり，Boudoukh et al.［1998］による提案法（BRW 法），Hull and White［1998］による提案法（HW 法）がある．BRW 法は VaR の推定日と過去のリターンの観測日との距離に応じて指数型加重移動平均法を適用しており，HW 法は指数型加重移動平均法で推定したボラティリティと経験分布により修正したリターンを使用している．

2.5.1 Boudoukh et al.［1998］による手法

BRW 法は，まず各リターンR_iに対応する重み付けパラメータω_iを算出する．

$$\omega_i = \frac{1-\rho}{1-\rho^T}\rho^{T-i} \quad (6)$$

ただし$1 \le i \le T$，$0 < \rho < 1$であり，Boudoukh et al.［1998］では減数係数ρ を 0.97, 0.99 とした．そして，Rを基準にRとωを昇順に並び替えた$R_{(i)}$と$\omega_{(i)}$を求め，経験分布の代わりに$\omega_{(1)}$から$\omega_{(i)}$までの総和$s_{(i)}$を累積分布として線形補間法により VaR を推定する．つまり，$\alpha \le s_{(1)}$では$R_{(1)}$を VaR とし，$s_{(i)} < \alpha \le s_{(i+1)}$では以下の式から VaR を算出する[9]．

$$BRW_\rho = \frac{R_{(t)}\left(s_{(i+1)} - \alpha\right) + R_{(t+1)}\left(\alpha - s_{(i)}\right)}{s_{(i+1)} - s_{(i)}} \quad (7)$$

また，BRW 法の最適なパラメータを推定した研究に Žiković and Aktan［2011］がある．Žiković and Aktan［2011］は Lopez［1999］が提案した Lopez スコア$C(\rho)$を最小化するρを最適なρとした．Lopes［1999］による損失関数は，VaR が保有期間 t 日内にリターンを下回った場合の損失を求める関数であり，以下の式で表される．

$$C(\rho) = \frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^{\tau} C_i(\rho)$$

$$C_i(\rho) = \begin{cases} 1 + (r_i - VaR)^2 , & r_i \le VaR \\ 0 , & r_i > VaR \end{cases} \quad (8)$$

ただし，$C_i(\rho)$は損失関数，τは全 VaR 推定値の個数，r_iは翌t日間のリターン$[R_{i+1}, R_{i+t}]$の最小値である．Žiković and Aktan［2011］は，9 種の金融リターンの全期間，分割した期間のそれぞれにおいて推定した最適なρはいずれも 0.97 から 1 の間であると示した．

2.5.2 Hull and White［1998］による手法

HW 法は，まず指数型加重移動平均法による推定ボラティリティσ_{i+1}を算出する．

$$\sigma_{i+1}^2 = \rho\sigma_i^2 + (1-\rho)R_i^2 \quad (9)$$

ただし$1 \le i \le T$，$0 < \rho < 1$であり，Hull and White［1998］ではρを 0.94 とした．GARCH モデル等では，リターンを推定ボラティリティと標準正規分布に従う互いに独立な誤差項ϵとの積として推定するが，HW 法はϵを使用せず，経験分布を使用する．具体的には，R_iを対応する推定ボラティリティσ_iで除した値と観測期間の最終日の推定ボラティリティσ_{T+1}との積を修正リターンR_i^*とし，そのα分位点を VaR とする．

$$HW = \inf\{x | F_{T,R_i^*}(x) \ge \alpha\}$$

$$F_{T,R_i^*}(x) = \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T} I\,(R_i^* \le x) \quad (10)$$

このときR_i^*は以下の式で求められる．

$$R_i^* = \frac{R_i}{\sigma_i}\sigma_{T+1} \quad (11)$$

つまり HW 法は各リターンを直近の推定ボラティリティで標準化する手法である．推定ボラティリティはリターンの変動度合いを示す指標であるため，T期のリターンをR_T，推定ボラティリティをσ_Tとするとき，R_{T-100}，R_Tをσ_{T-100}，σ_Tを用いて標準化することでより正しい比較が可能である．なぜなら$\sigma_{T-100} < \sigma_T$, $R_{T-100} = R_T$である場合，R_{T-100}

[9] この計算法は安藤［2004］を参照しており，原文とは異なる．詳しくは安藤［2004］の p12 注 18 参照．

表 1 VaR 推定手法の概要

略名	手法の説明
VCV	リターンが正規分布に従っていると仮定し，そのα分位点を VaR とする手法．式（1）より算出．
HS	経験分布のα分位点を VaR とする手法．式（2）より算出．
HD	Harrell and Davis［1982］で提案され，順序統計量に対応する重みを掛けて得られたα分位点を VaR とする手法．ブートストラップ法で求めたα分位点の期待値に等しい．式（3）より算出．
KHS	Gourieroux et al.［2000］で提案され，カーネル密度推定法を用いて求めた累積密度のα分位点を VaR とする手法．式（5）より算出．
BRW	Boudoukh et al.［1998］で提案され，観測日に応じて指数型加重移動平均法で修正したリターンのα分位点を VaR とする手法．Boudoukh et al.［1998］は減数係数を 0.97，0.99 とした．式（6），（7）より算出．最適な減数係数は Žiković and Aktan［2011］に従い式（8）より推定．
HW	Hull and White［1998］で提案され，指数型加重移動平均法により推定したボラティリティで修正したリターンのα分位点を VaR とする手法.リターンの修正には標準正規分布に従う乱数ではなく経験分布を使用する．Hull and White［1998］は減数係数を 0.94 とした．式（9），（10），（11）より算出．
GK	Changchien et al.［2012］で提案され，HW と Garman and Klass［1999］の Garman-Klass 推定量を組み合わせた手法．Garman-Klass 推定量により推定したボラティリティと経験分布で修正したリターンのα分位点を VaR とする．式（10），（11），（12）より算出．
KGK	本論文で提案する，GK と KHS を組み合わせた手法．Garman-Klass 推定量により推定したボラティリティと経験分布で修正したリターンについて，カーネル密度推定法を用いて求めた累積密度のα分位点を VaR とする．式（5），（11），（12）より算出．

注）信頼水準を 1-αとする．

とR_Tを単純比較するとR_{T-100}を過小評価するからである．

また，HW 法の最適なパラメータを推定した研究は無いが，Changchien et al.［2012］はボラティリティの推定に Garman and Klass［1980］による Garman-Klass 推定量を使用し，HW 法と同様に式（10），（11）より VaR を算出する手法（GK 法）を提案し，HW 法でのパラメータの推定を避けた．Garman-Klass 推定量は，終値だけでなく，始値，高値，安値を使用しボラティリティを推定する手法であり,HW 法に比べ使用する情報量が多いため，よりデータの特性を反映できると考えられる．Garman-Klass 推定量はリターンの自然対数がブラウン運動に従うと仮定しており，以下の式で求められる．

$$\sigma_{GK,i}^2 = \frac{1}{2}\left(\log\frac{H_i}{L_i}\right)^2 - (2\log 2 - 1)^2\left(\log\frac{C_i}{O_i}\right)^2 \quad (12)$$

このとき，H は高値，L は安値，C は終値，O は始値である．

2.6 ハイブリッド法とカーネル平滑化法の融合

本稿ではこうした先行研究を参考として，ハイブリッド法，カーネル平滑化法の両者の利点を持つ手法を提案する．具体的には，Garman-Klass 推定量を用いた推定ボラティリティ（式（12））を使用し，経験分布を用いて修正リターンを求め（式（11）），カーネル密度推定法による分位点推定を行い（式（5））VaR を算出する手法である．Garman-Klass 推定量を使用するため BRW 法や HW 法のように最適な減数係数の推定は不要である．

また，ハイブリッド法とカーネル平滑化法はそれぞれ異なる HS 法の欠点を改良しているため，その両者を用いる KGK 法はさらに推定精度が向上す

表 2 株価指数の略名と概説

略名	国名	正式名称
KLCI	マレーシア	FTSE Bursa Malaysia KLCI Index
SMI	スイス	Swiss Market Index
FT100	イギリス	FTSE 100 Index
NYSE	アメリカ	NYSE Composite Index
TSX	カナダ	S&P/TSX 60 Index
TOPIX	日本	Tokyo Stock Price Index
BOLSA	メキシコ	Mexican Bolsa IPC Index
CAC	フランス	CAC 40 Index
DAX	ドイツ	DAX Index
HANGSENG	中国	Hong Kong Hang Seng Index
SHANGHAI	中国	SSE Composite Index
SENSEX	インド	Bombay Stock Exchange Sensitive Index
KOSPI	韓国	Korea Composite Stock Price Index
NASDAQ	アメリカ	Nasdaq Composite Index
BOVESPA	ブラジル	Bovespa Index

注）略名は本稿での株価指数の略名を，国名は株価指数の市場を代表する国名を，正式名称は株価指数の正式名称をそれぞれ示している．いずれも Thomson Reuters DataStream から日次リターンを入手した．使用期間は 2000 年から 2010 年までである．株価指数の表示は本稿で使用した期間における標準偏差について昇順とした．

表 3 各株価指数の基礎統計量

略名	データ数	最小値	最大値	平均	標準偏差	歪度	尖度
KLCI	2710	−0.0998	0.0450	0.00022	0.00940	−0.8632	12.15
SMI	2768	−0.0811	0.1079	−0.00004	0.01290	0.0223	9.18
FT100	2780	−0.0927	0.0938	−0.00004	0.01324	−0.1247	9.03
NYSE	2765	−0.1023	0.1153	0.00006	0.01361	−0.2706	12.21
TSX	2764	−0.1033	0.0983	0.00017	0.01365	−0.6408	11.43
TOPIX	2701	−0.1001	0.1286	−0.00024	0.01454	−0.2377	8.72
BOLSA	2768	−0.0827	0.1044	0.00061	0.01497	0.0470	7.17
CAC	2811	−0.0947	0.1059	−0.00016	0.01568	0.0618	8.03
DAX	2797	−0.0887	0.1080	0.00001	0.01638	0.0371	7.35
HANGSENG	2716	−0.1358	0.1341	0.00010	0.01671	−0.0455	10.65
SHANGHAI	2656	−0.0926	0.0940	0.00026	0.01710	−0.1021	6.86
SENSEX	2730	−0.1181	0.1599	0.00049	0.01734	−0.1965	9.04
KOSPI	2720	−0.1280	0.1128	0.00024	0.01803	−0.5514	7.84
NASDAQ	2766	−0.1017	0.1325	−0.00016	0.01876	0.0930	7.29
BOVESPA	2715	−0.1210	0.1368	0.00052	0.01979	−0.1047	6.65

注）略名は本稿での株価指数の略名を示している．各株価指数の詳細については表 1 参照．基礎統計量は 2000 年から 2010 年までの各株価指数の終値の日次変化率から算出した．株価指数は標準偏差について昇順に表示している．

ると考えられる．しかし，ハイブリッド法とカーネル平滑化法を組み合わせた手法を用いた比較分析は本稿が初めてである．

次章では実際のリターンを用いて，本章で詳細を説明し，表 1 で概要を示した 8 手法のうち，最も推定精度が良い VaR 推定手法を提示する．

3 実証研究

本章では VaR 推定精度の比較分析の詳細を記述している．第 1 節では実証研究に使用したリターンと VaR の推定精度比較手法として最も一般的に使用されているバックテストについて説明し,第 2 節では VaR 推定手法の詳細を示す．そして第 3 節では実証研究の結果とその考察について述べる．

3.1 リターンと精度比較手法

本稿で使用するリターンは 2000 年から 2010 年までの 15 カ国の日次主要株価指数であり，2000 年当初から始値，安値，高値，終値を入手できるものに限定した．リターンの詳細は表 2，基礎統計量は表 3 を参照してほしい．いずれも Thomson Reuters DataStream から入手した．

VaR の精度比較分析には VaR の精度評価方法として良く使用される Kupiec［1995］のバックテストと,VaR が保有期間内のリターンを下回った場合の平均損失値を表し式（8）で求められる Lopez［1999］の Lopez スコアを用いた．バックテストは保有期間内のリターンの実測値が VaR 推定値を下回った超過回数から推定精度を測る手法であり，バーゼル規制で採用されている．

観測期間がT日，保有期間がt日，信頼水準が$1-\alpha$である場合，定義より VaR は翌t日間にαの確率で発生する損失の最大値を示している．そのため，翌t日間のリターンが VaR を下回る確率の期待値は（13）式で表されるように，理論上αである．

$$E\left(\frac{N}{\tau}\right)=\alpha$$
$$N=\sum_{i=1}^{\tau} I\left(r_i<VaR_i\right) \tag{13}$$

このとき，τ は全 VaR 推定値の個数，r_iは翌t日間のリターン$[R_{i+1},R_{i+t}]$の最小値，Nはr_iが VaR 推定値を下回る回数，$I(\cdot)$は指示関数である．VaR が（13）式を満たす場合，保有期間内のリターンが VaR 推定値を下回る事象の分布は二項分布$B(\tau,\alpha)$に従うため,（13）式を帰無仮説として尤度比検定を行う手法が Kupiec［1995］のバックテストである．尤度比検定統計量LRは（14）式で表され，自由度 1 のカイ二乗分布$\chi^2(1)$に従う．

$$LR=2\log\left\{\left(1-\frac{N}{\tau}\right)^{\tau-N}\left(\frac{N}{\tau}\right)^{N}\right\} - 2\log\{(1-\alpha)^{\tau-N}\alpha^{N}\} \tag{14}$$

この検定では VaR の推定結果が適切である場合に帰無仮説は棄却されない．したがって，p 値が高いほど推定精度が良いことを示す．

3.2 VaR の推定

本稿では観測期間 250 日，信頼水準 99%，保有期間 1 日とし VaR を推定した．このとき，初めの 250 営業日は観測期間として使用するため，251 営業日目から VaR の推定値を得ている.VaR 推定手法は VCV 法，HS 法，HD 法，KHS 法，BRW 法，HW 法，GK 法，KGK 法の 8 種を用いた．ただし，BRW 法については減数係数を 2 種使用している．以下本稿では BRW 0.99 法，BRW opt 法と記述する．前者は減数係数を Boudoukh et al.［1998］で使用した 0.99 とし，後者は Žiković and Aktan［2011］と同様に式（8）で求められる Lopez［1999］の Lopez スコアを最小化する減数係数を使用した．具体的には，各リターンについて，重複せずに 3 分割した期間と全期間の 4 期間に対し得られた最適な減数係数の平均値を精度比較に使用した．その詳細を記した表 4 より，全てのリターンにおいて最適な減数係数は0.99に近い値を示したことがわかる．また，HW 法は Hull and White［1998］に倣い減数係数を 0.94 とした．

また，KHS 法と KGK 法の推定に Newton-Raphson 法を用いて式（5）より VaR 推定値を算出した．初期値は HS 法による推定値等を使用したため，収束が早く計算量は少ない．カーネル関数は次式で表されるガウスカーネル関数を用いた．

$$k_{\emptyset}(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right)$$

表 4　BRW 法の最適パラメータの推定結果

	KLCI	SMI	FTSE 100	NYSE	TSX	TOPIX	BOLSA	CAC	DAX	HANG SENG	SHANG HAI	SENSEX	KOSPI	NASDAQ	BOVESPA
第 1 期															
optimal ρ	0.99	0.998	0.998	0.999	0.999	0.998	0.999	0.98	0.999	0.999	0.994	0.999	0.999	0.999	0.99
Lopez スコア	0.00935	0.01033	0.00988	0.01273	0.01194	0.00979	0.01072	0.01172	0.00668	0.01257	0.01081	0.01170	0.01013	0.00954	0.00893
第 2 期															
optimal ρ	0.991	0.992	0.996	0.992	0.997	0.999	0.997	0.994	0.995	0.997	0.986	0.994	0.997	0.999	0.991
Lopez スコア	0.00976	0.00993	0.01107	0.01074	0.01154	0.01020	0.00993	0.01015	0.00746	0.01176	0.01164	0.00968	0.00932	0.00954	0.00893
第 3 期															
optimal ρ	0.999	0.993	0.991	0.992	0.985	0.99	0.994	0.987	0.999	0.995	0.999	0.99	0.989	0.989	0.991
Lopez スコア	0.00976	0.00993	0.01186	0.01074	0.01273	0.00979	0.01033	0.01015	0.00668	0.01176	0.00998	0.01049	0.00932	0.00914	0.00893
全期間															
optimal ρ	0.99	0.992	0.998	0.987	0.996	0.991	0.991	0.992	0.999	0.994	0.998	0.993	0.997	0.99	0.99
Lopez スコア	0.00935	0.00993	0.00988	0.01034	0.01154	0.00939	0.00993	0.00976	0.00668	0.01176	0.00998	0.00968	0.00932	0.00875	0.00893
平均 optimal ρ	0.9925	0.99375	0.99575	0.9925	0.99425	0.9945	0.99525	0.98825	0.998	0.99625	0.99425	0.994	0.9955	0.99425	0.9905

注）BRW 法の最適なパラメータを推定するために，各株価指数の 2000 年から 2010 年の日次変化率を使用し，各期間において，観測期間 250 日，信頼水準 99%，保有期間 1 日の VaR を算出した．各市場の詳細は表 1 参照．第 1 期，第 2 期，第 3 期は，全期間を重複せずに 3 分割した期間を表している．ρ は BRW のパラメータを表し，式 (8) で示される Lopez［1999］の損失関数の平均（Lopez スコア）を最小にする ρ を optimal ρ とした．平均 optimal ρ は全 4 種の期間の optimal ρ の平均値を示している．

表 5 各市場の VaR 推定精度

手法	精度比較	KLCI	SMI	FT100	NYSE	TSX	TOPIX	BOLSA	CAC	DAX	HANG SENG	SHANG HAI	SENSEX	KOSPI	NAS DAQ	BOVE SPA
VCV	超過割合	0.0191	0.0210	0.0273	0.0258	0.0223	0.0212	0.0218	0.0230	0.0192	0.0203	0.0233	0.0242	0.0227	0.0163	0.0187
	LR	16.2624	23.5613	51.8226	44.3800	28.3641	23.5575	26.6593	32.1391	17.2835	20.2680	31.1679	36.1272	29.4798	8.4629	14.8829
	p 値	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0036	0.0001
	Lopes スコア	0.0191	0.0211	0.0273	0.0259	0.0223	0.0212	0.0218	0.0230	0.0192	0.0203	0.0233	0.0242	0.0227	0.0163	0.0187
HS	超過割合	0.0110	0.0159	0.0142	0.0167	0.0139	0.0139	0.0147	0.0137	0.0106	0.0150	0.0125	0.0141	0.0113	0.0135	0.0126
	LR	0.2292	7.4746	4.0412	9.4905	3.4813	3.3122	4.8964	3.1204	0.0910	5.4069	1.3736	3.7577	0.4269	2.8266	1.5276
	p 値	0.6321	0.0063	0.0444	0.0021	0.0621	0.0688	0.0269	0.0773	0.7628	0.0201	0.2412	0.0526	0.5135	0.0927	0.2165
	Lopes スコア	0.0110	0.0159	0.0142	0.0167	0.0139	0.0139	0.0147	0.0137	0.0106	0.0150	0.0125	0.0141	0.0113	0.0135	0.0126
HD	超過割合	0.0093	0.0119	0.0119	0.0119	0.0123	0.0118	0.0111	0.0109	0.0094	0.0114	0.0096	0.0113	0.0093	0.0099	0.0110
	LR	0.1074	0.8782	0.8324	0.8898	1.2845	0.7848	0.3078	0.2187	0.0874	0.4378	0.0479	0.4004	0.1210	0.0010	0.2195
	p 値	0.7431	0.3487	0.3616	0.3455	0.2571	0.3757	0.5790	0.6401	0.7675	0.5082	0.8268	0.5269	0.7280	0.9744	0.6394
	Lopes スコア	0.0094	0.0119	0.0119	0.0119	0.0123	0.0118	0.0111	0.0109	0.0094	0.0114	0.0096	0.0113	0.0093	0.0099	0.0110
KHS	超過割合	0.0106	0.0131	0.0126	0.0127	0.0143	0.0122	0.0123	0.0117	0.0102	0.0126	0.0104	0.0141	0.0109	0.0111	0.0118
	LR	0.0790	2.2348	1.6536	1.7351	4.1797	1.1594	1.2657	0.7205	0.0111	1.5224	0.0366	3.7577	0.2100	0.3124	0.7339
	p 値	0.7786	0.1349	0.1985	0.1878	0.0409	0.2816	0.2606	0.3960	0.9162	0.2173	0.8482	0.0526	0.6468	0.5762	0.3916
	Lopes スコア	0.0106	0.0131	0.0127	0.0127	0.0143	0.0122	0.0123	0.0117	0.0102	0.0126	0.0104	0.0141	0.0109	0.0111	0.0118
BRW	超過割合	0.0098	0.0111	0.0099	0.0127	0.0119	0.0102	0.0107	0.0105	0.0067	0.0126	0.0100	0.0117	0.0101	0.0095	0.0110
0.99	LR	0.0149	0.3078	0.0036	1.7351	0.8937	0.0098	0.1298	0.0749	3.2226	1.5224	0.0002	0.6814	0.0037	0.0549	0.2195
	p 値	0.9028	0.5790	0.9521	0.1878	0.3445	0.9210	0.7186	0.7844	0.0726	0.2173	0.9902	0.4091	0.9517	0.8148	0.6394
	Lopes スコア	0.0098	0.0111	0.0099	0.0127	0.0119	0.0102	0.0107	0.0105	0.0067	0.0126	0.0100	0.0117	0.0101	0.0095	0.0110

（つづく）

表 5 各市場の VaR 推定精度　つづき

BRW	超過割合	0.0093	0.0099	0.0115	0.0111	0.0123	0.0094	0.0103	0.0098	0.0067	0.0118	0.0108	0.0097	0.0093	0.0095	0.0089
opt	LR	0.1074	0.0013	0.5220	0.3147	1.2845	0.0959	0.0267	0.0148	3.2226	0.7303	0.1540	0.0263	0.1210	0.0549	0.2986
	p 値	0.7431	0.9712	0.4700	0.5748	0.2571	0.7568	0.8702	0.9032	0.0726	0.3928	0.6948	0.8711	0.7280	0.8148	0.5848
	Lopes スコア	0.0094	0.0099	0.0115	0.0111	0.0123	0.0094	0.0103	0.0098	0.0067	0.0118	0.0108	0.0097	0.0093	0.0095	0.0089
HW	超過割合	0.0118	0.0111	0.0134	0.0123	0.0107	0.0122	0.0115	0.0121	0.0106	0.0114	0.0108	0.0113	0.0109	0.0115	0.0118
	LR	0.7518	0.3078	2.7281	1.2798	0.1357	1.1594	0.5581	1.0737	0.0910	0.4378	0.1540	0.4004	0.2100	0.5643	0.7339
	p 値	0.3859	0.5790	0.0986	0.2579	0.7126	0.2816	0.4550	0.3001	0.7628	0.5082	0.6948	0.5269	0.6468	0.4525	0.3916
	Lopes スコア	0.0118	0.0111	0.0134	0.0123	0.0107	0.0122	0.0115	0.0121	0.0106	0.0114	0.0108	0.0113	0.0109	0.0115	0.0118
GK	超過割合	0.0110	0.0115	0.0115	0.0127	0.0119	0.0122	0.0099	0.0113	0.0110	0.0122	0.0112	0.0109	0.0130	0.0111	0.0118
	LR	0.2292	0.5581	0.5220	1.7351	0.8937	1.1594	0.0013	0.4347	0.2459	1.0926	0.3491	0.1916	1.9935	0.3124	0.7339
	p 値	0.6321	0.4550	0.4700	0.1878	0.3445	0.2816	0.9712	0.5097	0.6200	0.2959	0.5546	0.6616	0.1580	0.5762	0.3916
	Lopes スコア	0.0110	0.0115	0.0115	0.0127	0.0119	0.0122	0.0099	0.0113	0.0110	0.0122	0.0112	0.0109	0.0130	0.0111	0.0118
KGK	超過割合	0.0106	0.0111	0.0099	0.0115	0.0107	0.0110	0.0103	0.0098	0.0086	0.0109	0.0116	0.0101	0.0097	0.0103	0.0110
	LR	0.0790	0.3078	0.0036	0.5674	0.1357	0.2474	0.0267	0.0148	0.5006	0.2176	0.6191	0.0016	0.0202	0.0280	0.2195
	p 値	0.7786	0.5790	0.9521	0.4513	0.7126	0.6189	0.8702	0.9032	0.4792	0.6409	0.4314	0.9678	0.8869	0.8671	0.6394
	Lopes スコア	0.0106	0.0111	0.0099	0.0115	0.0107	0.0110	0.0103	0.0098	0.0086	0.0110	0.0116	0.0101	0.0097	0.0103	0.0110

注）各株価指数の 2000 年から 2010 年の日次変化率を使用し，8 種の VaR 推定手法を用いて観測期間 250 日，信頼水準 99%，保有期間 1 日の VaR を算出した．手法は VaR 推定に使用した手法を，精度比較は VaR の精度比較手法を指す．各市場の詳細は表 1，推定手法の詳細は表 3 を参照．BRW 法の 0.99，opt は減数係数を指し，opt は式（8）で示される Lopez［1999］の損失関数の平均（Lopez スコア）が最小値をとるときの減数係数を表し，表 4 に記した平均 optimal ρ である．超過割合は翌日のリターンが VaR を下回った割合を示し，0.01 が理想値である．LR は（4）式で求めた Kupiec［1995］の尤度比検定統計量である．p 値は$\chi^2(1)$分布に従う LR に対する p 値を指し，その値が高いほど推定精度が良いことを表す．

表 6　各手法による VaR 推定精度

	超過割合			LR	p 値		Lopez スコア	
手法	平均	絶対誤差平均	二乗誤差平均	平均	平均	標準偏差	平均	標準偏差
VCV	0.0218	0.011750	0.00014566	26.961	0.0003	0.0009	0.0218	0.002853
HS	0.0136	0.003570	0.00001556	3.430	0.1879	0.2463	0.0136	0.001735
HD	0.0109	0.001196	0.00000184	0.441	0.5748	0.2099	0.0109	0.001074
KHS	0.0120	0.002049	0.00000569	1.307	0.3952	0.2897	0.0121	0.001263
BRW 0.99	0.0106	0.001117	0.00000233	0.592	0.6324	0.3130	0.0106	0.001471
BRW opt	0.0100	0.001018	0.00000177	0.465	0.6470	0.2558	0.0100	0.001377
HW	0.0116	0.001570	0.00000299	0.706	0.4703	0.1897	0.0116	0.000748
GK	0.0115	0.001558	0.00000296	0.697	0.4740	0.2107	0.0115	0.000777
KGK	0.0105	0.000751	0.00000081	0.199	0.7186	0.1853	0.0105	0.000789

注）表 5 をもとに作成．超過割合の平均は，各手法における全市場の超過割合の平均である．また，絶対誤差平均，二乗誤差平均は各市場の超過割合とその理想値である 0.01 との誤差を示している．LR の平均は全市場の LR の平均を示す．p 値，Lopez スコアの平均，標準偏差は全市場の p 値，Lopez スコアの平均，標準偏差をそれぞれ示す．

また，バンド幅の推定には次式で表される Silverman の経験則を使用した．

$$h = 0.9min\left(\sigma, \frac{IQR}{1.34}\right)$$

このときσはデータRの標準偏差，IQRは四分位範囲，$min\,(a,b)$ はaとbを比較して低い値を返す関数である．このバンド幅の決定方法はデータの分布がどのような場合でも良い推定精度を示し，実務で最も使用されている．

3.3　結果と考察

まず観測期間 250 日，信頼水準 99%，保有期間 1 日とした各リターンについての VaR 推定精度を表 5 に示す．表中の超過割合は翌日のリターンが VaR 推定値を下回った割合を示し，0.01 が理想値である．LR は(14) 式で求めた Kupiec［1995］の尤度比検定統計量を示しており，加えて $\chi^2\,(1)$ 分布に従う LR の p 値を記述している．「超過割合が理想値の 0.01 である」が LR の帰無仮説であるので，帰無仮説が棄却されない確率を示す p 値が高いほど推定精度が良いことを示す．また，式 (8) で求められる Lopez［1999］の Lopez スコアは，その値が低いほど推定精度が良いことを表す．以上の結果から，BRW 0.99 法，BRW opt 法，KGK 法，HD 法は高い推定精度を示す傾向があり，一方，VCV 法はすべてのリターンにおいて特に低い p 値を示し，次いで HS 法が低い推定精度を示す傾向があることが分かった．

また，上記とほぼ同様の結果が全リターンの VaR 推定精度をまとめた表 6 でも示された．表 6 では超過割合の平均値，各リターンの超過割合とその理想値である 0.01 との誤差を絶対誤差平均と二乗誤差平均でそれぞれ示した．また，式 (14) で求められる尤度比検定統計量 LR の平均値，p 値の平均値，標準偏差，そして式 (8) で求められる Lopez スコアの平均値，標準偏差を記載している．p 値の平均値は高く，Lopez スコアの平均値は低いほど推定精度が高いことを示している．また，標準偏差が低い場合，どのリターンにおいても安定した水準でリスクを推定していると考えられる．

超過割合の誤差，p 値においては KGK 法が最良の推定精度を示した．次いで BRW opt 法が高い推定精度を示した．Lopez スコアにおいては反対に BRW opt 法は KGK 法より高い推定精度を示したが，その標準偏差は KGK 法が低い．つまり損失の平均値では BRW opt 法が良い値を示したが，その変動のばらつきは KGK 法が低い値を示したため，KGK 法は BRW opt 法より損失値において安定的であると言える．一方，いずれの尺度においても最低の推定精度を示した手法は VCV 法であり，次いで HS 法が低い推定精度を示した．

KGK 法は GK 法と KHS 法の利点を併せ持つ手法であるため，上記の手法では最も推定精度が高いと

考えられるが．上記の結果を総合すると，本稿では想定通りの結果が得られたと言える．しかし，KGK 法はLopez スコアの平均値においてはBRW opt 法より僅かに低い推定精度を示した．そのため，VaR 推定にはKGK 法，BRW opt 法の両方を使用し，複合的に判断すると良いと考えられる．

4 おわりに

本稿ではVaR の中でもHS 法に関する9 手法の精度比較分析を行った.VaR の推定手法は多数存在するが，中でもHS 法は銀行の市場リスク測定に広く使用されている手法であり，重要度が高い手法である．加えて，本稿ではHS 法の直近のリターンの変動傾向を全く反映しないという欠点を補ったChangchien et al.［2012］の提案法であるGK 法と，データ数が少ない場合精度が悪くなるという欠点を補ったGourieroux et al.［2000］の提案法であるKHS 法の両方の利点を兼ね備えたKGK 法を提案した．

15 カ国の日次主要株価指数を用いて，Kupiec［1995］によるバックテスト，Lopez［1999］によるLopez スコアを使用した精度比較分析の結果，HS 法に関する9 種のVaR 推定手法の中で最も推定精度が高い手法はKGK 法とBRW 法であり，Lopez スコアについてはBRW 法が良い推定制度を示し，それ以外ではKGK 法がより安定して高い推定精度を示した．そのため，リスク推定にはBRW 法，KGK 法の両者使用し，複合的に判断することにより，さらに精緻なリスク管理が可能であると推測できる．

しかし，いずれの手法も過去のリターンの傾向から算出する手法であるので，より安全なリスク管理を行うためにはストレス・テストを行う必要があると考えられる．本稿で提案した手法とストレス・テストの利点を併せ持った手法の開発を今後の課題としたい．

参考文献

安藤美孝［2004］，「ヒストリカル法によるバリュー･アット･リスクの計測：市場価格変動の非定常性への実務的対応」，『金融研究』，Vol.23，No.2，1-41 頁．

三井住友フィナンシャルグループ［2014］，「2014 ディスクロージャー誌」．

三菱UFJ フィナンシャル・グループ［2014］，「ディスクロージャー誌 2014」．

みずほフィナンシャルグループ［2014］，「2014 年ディスクロージャー誌」．

りそなホールディングス［2014］，「ディスクロージャー誌 2014」．

Boudoukh, J., M. Richardson, and R. Whitelaw［1998］,“The Best of Both Worlds,” *Risk,* Vol.11, pp.64-67.

Changchien, C-C., C-H. Lin, and H-C. P. Yang［2012］,“Improving Hull and White’s Method of Estimating Portfolio Value-at-Risk,” *Journal of Forecasting*, vol.31, pp.706-720.

Chen, S. X. and C. Y. Tang［2005］,“Nonparametric Inference of Value-at-Risk for Dependent Financial Returns,” *Journal of Financial Econometrics,* Vol.3, No.2, pp.227-255.

Chen, Y. and J. Lu［2012］,“Value at Risk Estimation,” In J. -C. Duan, W. K. Härdle, and J. E. Gentle (Eds.), *Handbook of Computational Finance,* Springer, pp.307-333.

Efron, B.［1979］,“Bootstrap Methods: Another Look at the Jackknife,” *The Annals of Statistics*, vol.7, pp.1-26.

Garman, M. B. and M. J. Klass［1980］,“On the Estimation of Security Price Volatilities from Historical Data,” *Journal of Business*, vol.53, Issue 1, pp.67-78.

Gourieroux, C. ,J. P. Laurent, and O. Scaillet［2000］,“Sensitivity Analysis of Values at Risk,” *Journal of Empirical Finance*, vol.7, pp.225-245.

Harrell, F. E., and C. E. Davis［1982］,“A New Distribution-Free Wuantile Estimator,” *Biometrika*, vol.69, No.3, pp.635-640.

Heidenreich, N. B., A. Schindler, and S. Sperlich [2013], "Bandwidth Selection for Kernel Density Estimation: a Review of Fully Automatic Selectors," *Advances in Statistical Analysis*, Vol.97, pp.403-433.

Hendricks, D. [1996], "Evaluation of Value-at-Risk Models Using Historical Data," *Economic Policy Review,* Vol.2, No.1, pp.39-69.

Hull, J. and A. White [1998], "Incorporating Volatility Updating into the Historical Simulation Method for Value at Risk," *Journal of Risk,* Vol.1, pp.5-19.

Jones, M. C., J. S. Marron, and S.J. Sheather [1996], "A Brief Survey of Bandwidth Selection for Density Estimation," *Journal of the American Statistical Association,* Vol.91, pp.401-407.

Jorion, P. [2006], *Value at Risk, 3rd ed.: The New Benchmark for Managing Financial Risk*, McGraw-Hill.

Kupiec, P. H. [1995], "Techniques for Verifying the Accuracy of Risk Measurement Models," *Journal of Derivatives,* Vol.3, pp.73-84.

Lopez, J. A. [1999], "Methods for Evaluating Value-at-Risk Estimates," *Federal Reserve Bank of San Francisco Economic Review*, Issue 2, pp.3-17.

Sheather, S. J. and J. S. Marron [1990], "Kernel Quantile Estimators," *Journal of the American Statistical Association*, vol.85, pp.410-416.

Silverman, B. W. [1986], *Density Estimation for Statistics and Data Analysis,* Chapman and Hall.

Žiković, S. and B. Aktan [2011], "Decay Factor Optimisation in Time Weighted Simulation – Evaluating VaR Performance," *International Journal of Forecasting*, vol.27, pp.1147-1159.

A Comparative Study of Value-at-Risk Estimation Methods Related to the Historical Simulation Approach

Nana Iwamoto
Doctoral Course, Graduate School of Business, Osaka City University
3-3-138 Sugimoto, Sumiyoshi-ku, Osaka-shi, Osaka, 558-8585, JAPAN
email: iwamotonana@gmail.com

Abstract

Among various Value-at-Risk (VaR) methods, the historical simulation (HS) approach has no assumption of the return distribution and is commonly adopted for risk measuring market risk. The shortcomings of the HS approach are that 1) it ignores the time-varying volatility and that 2) it reduces estimation accuracy in short observation periods. This paper aims at proposing new method which solves the problems by combining kernel smoothing and a hybrid approach. Based on daily returns on 15 stock market indices, we compare the backtesting results of several major VaR estimation methods related to the HS approach. Our results show that the proposed method outperforms other VaR methods.