

講演

オペレーショナル・リスクと極値理論

一橋大学大学院国際企業戦略研究科 准教授 中川 秀敏

(2015年11月14日 日本アクチュアリー会 CERA 研修)

司会 それでは、講師の先生の講義を始めます。

講師の先生をご紹介します。一橋大学の中川秀敏先生です。略歴を紹介いたしますと、1995年に東京大学理学部数学科を卒業されまして、2000年に東京大学大学院数理科学研究科博士課程を修了されております。博士（数理科学）でございます。

2000年にエムティービーインベストメントテクノロジー研究所の연구원となり、その後2003年に東京工業大学理財工学研究センターの助教授となられております。

2008年より現在の一橋大学大学院国際企業戦略研究科の准教授であります。

専門分野は、金融リスク計量、金融工学、数理ファイナンスなどで、書籍『クレジット・デリバティブ信用リスク商品ハンドブック』の監修や、何回も名前が出てきております『定量的リスク管理』の共同翻訳などをされております。

それから、日本アクチュアリー会との関係では、客員を務めておられます。

それでは、先生、よろしくお願いいたします。

中川 一橋大学の中川と申します。本日は、よろしくお願いいたします。

一橋大学をご存じかと思いますが、国立キャンパスの方ではなくて、今は、千代田キャンパスと呼んでおりますが、神保町駅と竹橋駅の間ぐらにある学術総合センターというビルの中に夜間のビジネススクールがありまして、そちらで主に金融ファイナンスに関する数学やリスクマネジメントの講義をしております。

皆さんも今日はたぶん朝からワーキンググループなどをされてお疲れだと思いますが、実は、私も土曜日授業担当で、午前と午後に一コマずつやってまいりましたので、お互い疲労困憊でしょうが、最後まで頑張りたいと思います。

しかも、今日の講義のテーマは、松山先生から依頼されました「オペレーショナル・リスクと極値理論」ですが、今日の大学院の授業でも実はこのテーマを取り上げてまいりましたので、私にとっては一度話している内容をもう1回ここで話すこととなります。ただ大学院の授業とは話の力点も違いますし、時間があれば「大学院でこのようなことをやりました」ということで、今日の資料には記載していないことについても少し触れられればよいかなと思います。

オペレーショナル・リスクと極値理論 (EVT)

中川 秀敏

一橋大学大学院国際企業戦略研究科

2015年11月14日 日本アクチュアリー会 CERA 研修
@ TKP 大手町カンファレンスセンター

- 1 オペレーショナル・リスク
- 2 極値理論 (EVT) に基づくオペリスク損失額のモデル化

本資料は、講演者の所属組織の公式見解を表明するものではない。
また、講演者はリスク計量の研究が主であり、細かい規制内容や現在進行中の議論の方向性（特に保険会社に対する規制である Solvency II や ERM, ORSA, RAF といった最近のキーワード）を完全に把握できていないことを事前にお断りしておく。

中川 秀敏 (一橋 ICS FS)

オペレーショナル・リスクと極値理論 (EVT)

2015年11月14日 CERA 研修 1/44

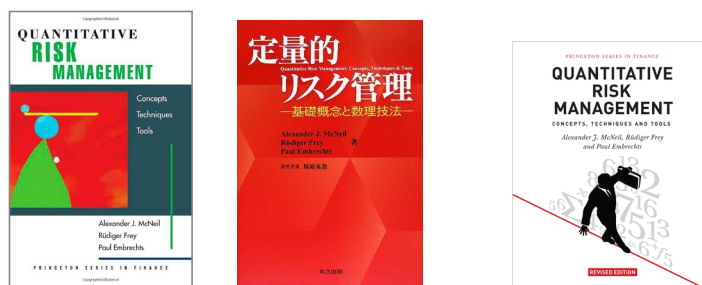
それで、少しその下の方に断り書きを書いておりますけれども、私自身はリスク計量の専門ということで、規制面などについては、実はあまりフォローしていません。特に、保険のソルベンシー II などについては、大まかにドキュメントを見たりはしましたけれども、細かく内容を把握しているわけではありませんので、どちらかという、今日は銀行の方で先行しているバーゼル規制の枠組みにおけるオペレーショナル・リスク（以下では適宜「オペリスク」と略す）ということをお話しさせていただきます。

ただし、そのような規制面を除けば、使う計量モデルに関して言えば、保険であろうが銀行であろうが、あまり大差ないと思いますので、計量モデルの本質的な部分を少しでも伝えられればよいと思っております。

あと、これは CERA という資格に関するテストの対策という位置づけだとうかがっていますけれども、私はあいにくその試験の内容が全く分かりませんので、試験対策という意味でお役に立てるかどうかは分かりません。けれども、オペリスクは元々損害保険の火災保険金をどれぐらい見込むかというようなことにつながる話ですし、信用リスクと呼ばれる部分に関してもいろいろと応用範囲が広い話になりますので、資格試験とは別に何かお役に立てれば幸いに思っております。

参考図書：定量的リスクマネジメントのテキスト

今回の資料の計量に関する内容の大部分は、以下のテキストを参考にまとめてみた。



図：(左) McNeil, Frey, and Embrechts, *Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques And Tools*, Princeton (2006) / (中) その翻訳である『定量的リスク管理 -基礎概念と数理技法-』(訳者代表 塚原英敦), 共立出版 (2008) / (右) 今年の5月に発刊された revised edition

また内容的には古くなってしまっているが、自分も執筆に関わった三菱信託銀行オペレーショナル・リスク研究会『オペレーショナル・リスクのすべて』東洋経済新報社 (2002)も、参考にしている。

中川 秀敏 (一橋 ICS FS)

オペレーショナル・リスクと極値理論 (EVT)

2015年11月14日 CER A 研修 2/44

最近、オペリスクに関して私自身も研究しているというわけではないので、今回の資料をまとめるに当たっては、私も共同翻訳に参加させていただきました、こちらの『定量的リスク管理』の中のオペレーショナル・リスク、それから極値理論に関する話を参考にしてみました。

最近、このテキストの原書の第2版が revised edition という形で出版されました。オペリスクや極値理論の基本的な内容についてはそれほどアップデートされているわけではないので、資料はいちおう旧版の翻訳を参考にしています。

先ほど、私が大学院を卒業した後、先ほどエムティービー・インベストメント・テクノロジー研究所という会社にいたという紹介をしていただきましたけれども、そこは当時の三菱信託銀行の子会社の研究所で、入社1年目のときにオペレーショナル・リスクの計量プロジェクトに参加しました。当時は、まだ、バーゼルⅡに移行するにあたって、銀行業界でもオペレーショナル・リスクを本格的に算出するという話の前段階でした。三菱信託銀行の実際のオペリスク収集データを使って分析をしまして、その一連の経過を本にまとめたことがあります。ですので、オペリスクの実務としては、規制が始まるよりも前の段階での経験はありますけれども、その後は、実際に実務から離れていますので、少し現状の認識と違う部分などもあるかもしれませんが、ご容赦ください。

くわえて、現在のアクチュアリー会との関係で言うと、客員という立場にさせていただいていますけれども、元々は「朋友」という立場でした。これは、私が研究員であった2002年にメキシコのカンクンという所で AFIR の大会があり、発表申し込み期限直前になっても日本から研究発表する人がいないので誰かいないかという話が親会社の三菱信託銀行から来まして、私はたまたまオペリスクに関して英語のドキュメントを作っていて、その内容で発表できるのなら行ってもいいですよと言ったら、行かせてもらえることになりまして、その際にアクチュアリー会の朋友という立場になっていただくことが必要だという話だったので、本当に平社員だったのですけれども、他の著名な先生方と肩を並べる形で朋友ということにさせていただ

て、カンクンまで行かせていただきました。

そのようなこともあり、私とアクチュアリー会との関係は、オペリスクから始まったことですので、今回こうしてオペリスクのお話しすることは、少し恩返しの意味があるのかなと思っております。

なので、私の今日のお話は、このようなテキストや、私のほんの一部の経験に基づいたものになることをご了解いただければと思います。

オペレーショナル・リスク

オペレーショナル・リスクの計量化

中川 秀敏 (一橋 ICS FS)

オペレーショナル・リスクと極値理論 (EVT)

2015 年 11 月 14 日 CERA 研修 3 / 44

前置きが長くなってしまいましたが、オペレーショナル・リスクの計量化の話題に入ります。保険業界ソルベンシー II の中でもオペリスクは、特に EU では割と計量されているというところもありますし、この話も、ここで話しさせていただく以上は、保険、アクチュアリーという分野においても重要だと思っております。

オペレーショナル・リスクの定義および規制の流れ

Basel Committee on Banking Supervision 2006 における定義

The risk of loss resulting from inadequate or failed internal processes, people and systems or from external events.

内部プロセス・人・システムが不適切であることもしくは機能しないこと、または外生的事象に起因する損失にかかわるリスク

(法的 (legal) リスクは含まれるが、戦略 (strategic) リスクおよび風評 (reputation) リスクは含まれない)

※このオペリスクの定義は、EU のソルベンシー II Directive for insurers にも採用されていると聞く

これが、まず、一般の定義ですね。どのような文献を見ても「オペレーショナル・リスクとは、このようなものです」といった定義が書かれていると思いますけれども、それを抜き書きしたものです。

下につけた日本語訳も、特に私が訳したというよりは、このような訳に必ずなるだろうということですが、これだけでは分からないので、実際には、どのようなものがオペレーショナル・リスクの関係に該当するかということを示した後で見えます。

またこれは、EU のソルベンシー II でも採用されている定義のようですので、このようなことを頭に入れていただいた上で、その先の話をしたと思います。

オペリスクの例

- 内部要因によるもの
 - 事務ミス (2001 年 11 月 UBS ウォーバーグ証券の電通株の誤発注、2003 年 7 月リーマン・ブラザーズ証券のオプション取引に関する売買注文の入力ミス、2005 年 12 月みずほ証券のジェイコム株の誤発注¹ など)
 - 不正 (1995 年 9 月の大和銀行 NY 視点の米国債不正取引など)
 - 法令違反 (2004 年 9 月のシティバンク在日支店の PB 部門における業務停止命令など)
 - システム障害 (2002 年 4 月のみずほグループのシステム統合における障害など)
- 外部要因によるもの
 - 犯罪 (強盗、システムハッキング、カード詐欺など)
 - 自然災害やテロリズム (大地震、2001 年 9 月米国同時多発テロ)

¹2006 年 10 月 27 日に、みずほ証券は 414 億円 (純損失部分としては 404 億円) の賠償請求を求め東京地裁に提訴。最終的に 2015 年 9 月 3 日に、最高裁判所は東証・みずほ証券双方の上告を棄却。これで東証に約 107 億円の支払いを命じた二審判決が確定した。

このようなものがオペリスクの例だということで、これもいろいろな方が、いろいろな形でおっしゃっているといますし、捉え方はいろいろありますが、大きく分けて、内部要因、つまり銀行や保険など社内内部の理由によるもの、とそうでないもの、というような分け方があるかと思っています。

内部要因で言うと、例えば事務ミスと言っているものかどうか分かりませんが、証券会社の誤発注のようなことは割と例として引き合いに出されることがあります。ここで挙げているものも誤発注の3つの事例です。

最後にある、みずほ証券のジェイコム株誤発注に関して言うと、みずほが東証と裁判で争っていたこともあり、今年、ご存じかと思いますが、最高裁に上告が棄却されて結審したということがありました。

実は、私は東工大時代に、オペリスクの専門家ということでこの案件で意見を求められたことがありました。実際には自分のことをオペリスク専門家と思っはいませんでしたけれども、いちおう「東証のここまでは責任ですね」というような話をしたり、何を言ったか覚えていないのですがオペリスクに関して何か語ったりした記憶があります。その後、もしかしたら裁判のときに参考人として呼ばれるかなと思ったのですが、そのようなことは全然なく、気付いたらこのような決着になっていたもので、上告が棄却されたというニュースを見たときに「ああ、そういえば、あのとき1時間ぐらいオペリスクの話をしたな」ということを思い出しました。

それから、少し古い例ですが、旧大和銀行ニューヨーク支店の方は自分で本も書かれていますけれども、米国債の不正取引をして大損をもたらしたということもありました。海外の例でも、英国の旧ベアリングス銀行シンガポール支店の人が、この人も手記を書いていたはずですが、不正取引をして銀行を破綻においこんだという話も有名です。

法令違反は、組織として法に触れたというようなことになるかと。

また、システムに絡んだ話で、みずほグループの統合の際のシステム障害によってもたらされた損失がオペリスクの例として、わりとよく挙げられています。システム障害は、オペリスクの例として比較的取り上げられやすいものかなと思います。

外部要因によるものとしては、外部の人による犯罪で損害を被ったケースや、自然災害やテロリズムなどが挙げられます。図らずも今日、パリで不幸な事件がありました。実際にもし銀行の支店が爆破されたりして損害を被ったということになるとオペリスクとして扱われることになったかもしれません。2001年9月の同時多発テロ、米国のニューヨークのビルの話は、テロによるオペリスクの象徴的な例として挙げられています。

このようなものがいちおうオペリスクの例として挙げられているわけですが、それ以上細かい話は私にはできませんので、以後は定量化手法の話題にしぼっていきます。

オペリスクの定量化手法

定量化手法 (Basel Committee on Banking Supervision 2006)

- ① **基礎的指標手法 (Basic Indicator Approach; BIA)** : 銀行全体の粗利益 (Gross Income; GI) の過去 3 年分の平均 (ただし GI が 0 以下のときは計算に含めない) に、一定の掛け目をかけて平均をとったものをオペリスク資本とする手法
- ② **標準的手法 (The Standardised Approach; TSA)²** : ビジネスライン (8 区分) ごとの粗利益に異なる掛け目をかけて合算した額の 3 年平均 (ただし合算値が 0 以下の年の分は計算に含めない) をオペリスク資本とする手法
- ③ **先進的計測手法 (Advanced Measurement Approach; AMA)** : 十分に包括的かつ体系的と認められた銀行独自のリスク評価手法
 - 損害保険数理モデルの応用と言える **損失分布手法 (Loss Distribution Approach; LDA)** が用いられるのが一般的。その際には、サンプルを 8 つのビジネスラインに加え、7 つの損失イベントタイプに分類したうえで、「セル」ごとの累積損失をふまえて全体の累積損失に対するリスク量を VaR などで算出するのが典型

※ Basel 3.5 の議論においては、BIA と TSA を統合した新たな標準的手法導入を検討中とのこと (粟谷・久田『市場リスク・流動性リスクの評価手法と態勢構築』きんざい (2015))。

²一般には「粗利益配分手法 (TSA)」と呼ばれている。

今では銀行のリスク評価の議論はバーゼルⅡから、バーゼルⅢや 3.5 などに移行していきつつありますが、オペリスクに関しては基本的に、このような手法が挙げられています。

基礎的指標手法、それから標準的手法。標準的手法は、最近では粗利益配分手法と呼ばれているようです。あとは先進的計測手法と三つあります。

私というか、研究者の立場からすると、上の二つの手法は面白くはなくて、粗利を計算して、それに掛け目をかけて、それをオペリスクしなさいというものなので、それが妥当かどうかというところで議論する余地はあるかもしれませんが、計量モデルとしては特にやることはありません。ですので、最後の先進的計測手法で過去データを蓄積して、それらを使ってモデルのパラメータを推定してというような話でやると研究者として何か手を出せるところがあるかなということになります。最後に、損失分布手法と書いてありますけれども、将来の 1 年間に何件のオペリスク事案が起こり、1 件あたりの事案でどのぐらいの損失が出て、集計したらその銀行全体でオペリスク損失が 1 年間にどのくらいあるかというようなことを考える手法です。オペリスク損失額の確率分布を考えて、銀行のリスクの言葉で言うとバリュー・アット・リスクを計算して、そのリスク量に対して資本を積みましようというようなことをやっていくわけです。

保険に関しても、いろいろな計算方法があるかもしれませんが、オペリスクに関連した損失が 1 年間にどのくらい起こるかは確定していませんから、これを確率的に捉えて、得られた確率分布の何らかの情報リスクとして扱いましようということになり、どのような形でリスクと定義するかの議論はあるでしょうが、追いかけるものは本質的に同じものはずですよ。

これは、1 年間にどれくらい火災による損失が発生するかを考えて、火災保険金の準備をするという話と概念的には似たものといえます。ですので、オペリスク計量の考え方は、元々損害保険の数理ではおなじみの考え方になりますので、もしかしたら皆さんの中にもおなじみのある方もいらっしゃるかもしれません。

細かいところは後で見えていきますが、いちおうこのような手法が与えられています。ただ、最初の 2 つの

手法は、データが十分に蓄積されていなかったり、計測技術がなかったりするための選択肢であり、実際には、3番の先進的計測手法に移行してほしいと監督当局は考えているようで、基礎的指標手法や標準的手法よりは先進的計測手法でオペリスクを算出した方が、オペリスクが低めに見積もられて、そのために積むべき資本も抑えられるというようなことが言われたりしています。

基礎的指標手法 (BIA)

$$RC_{BI}^t(OR) := \frac{1}{Z_t} \sum_{i=1}^3 \alpha \max\{GI^{t-i}, 0\}.$$

ただし、

- α : 掛け目 (Basel 委員会の推奨は 15%)
- GI^{t-i} : i 年前の粗利益
- $Z_t := \sum_{i=1}^3 \mathbf{1}_{\{GI^{t-i} > 0\}}$: 過去 3 年のうちで、粗利益が正だった年の数

これはこの計測手法を数式で書くとこのようなものだけのことです。このように計算しなさいと言われているので、それに従っているのが現状だと思います。まず、GI はグロス・インカムですね。粗利益を 3 年取りましょうと。赤字の年は抜きますが、とりあえず 3 年間の平均を出しましょうと。

それに対して α という掛け目、バーゼル規制では 15% としているようですけれども、要は、粗利の 3 年間平均の 15% をオペリスクの資本として決めましょうということですね。それを銀行の積むべき資本として計上しなさいという考え方です。

これは、銀行全体の粗利が会計として出されれば、自動的に計算されてしまうと。当然、そこになぜ 15% かという疑問の余地はあるかもしれませんが、それで計算しなさいということになります。

標準的（粗利益配分）手法 (TSA)

$$RC_{TS}^t(\text{OR}) := \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \max \left\{ \sum_{j=1}^8 \beta_j GI_j^{t-i}, 0 \right\}.$$

ただし、

- β_j : ビジネスライン j の GI に対する掛け目
- GI_j^{t-i} : ビジネスライン j に対する i 年前の粗利益

※ビジネスライン 8 区分（カッコ内は Basel 委員会が設定した各ビジネスラインに対する掛け目 β の値）

- コーポレート・ファイナンス（18%）：M&A、証券化、債券発行、株式発行など
- トレーディング&セールス（18%）
- リテール・バンキング（12%）：プライベートバンキング含む
- コマーシャル・バンキング（15%）：プロジェクトファイナンス、不動産、企業貸付など
- 支払&決済（18%）
- エージェンシー・サービス（15%）：カストディ（資産管理）業務
- 資産運用（12%）
- リテール仲介業務（12%）

銀行全体ではなくて、ビジネスラインと呼ばれている業務区分ごとに粗利を計算してそれぞれに掛け目をかけてオペリスク量とする方法です。ビジネスラインごとに多少掛け目の上下はあってしかるべきだということで、8つ区分が与えられていますけれども、18%、15%、12%と掛け目がビジネスラインによって違います。

ただ、基本的には粗利を計算します。それをビジネスラインと呼ばれる業務区分ごとに計算するだけで、そこに掛け目は少し違うけれども、15%前後のものをかけましょうと。それを全部足し合わせて3年間の平均を取って、銀行全体でのオペレーショナル・リスクの資本量にしましょうというのが、標準的手法です。数式で表すと見た目はごついですけれども、それほどやっていることは難しくないということです。

ビジネスラインごとの粗利を計算するところが、先ほどの基礎的指標手法よりは粒度が細かくなりますけれども、やり方としては、それほど迷うところはなく、これでやりなさいと言われて計算するようなものがあります。

先進的計測手法 (AMA) – 損失分布手法 –

- t 年度のオペリスク資本賦課を計算する際のデータとして、過去 $T(\geq 5)$ 年分のオペリスク損失データが収集されているとする：

$$\{X_k^{t-i,b,\ell} \mid i = 1, \dots, T; b = 1, \dots, 8; \ell = 1, \dots, 7; k = 1, \dots, N^{t-i,b,\ell}\},$$

- $N^{t-i,b,\ell}$: $t-i$ 年度に、ビジネスライン b で起こった損失イベントタイプ ℓ に分類された (これを (i, b, ℓ) -カテゴリに属すると表現する) 損失事例の数
- $X_k^{t-i,b,\ell}$: (i, b, ℓ) -カテゴリの k 番目に起こった事例のオペリスク損失額
- 巨額損失を特定するための閾値を、 (i, b, ℓ) -カテゴリ別に設定する場合もありうる
- $L^{t-i,b} := \sum_{k=1}^{N^{t-i,b,\ell}} X_k^{t-i,b,\ell}$: $t-i$ 年度のビジネスライン b における累積損失額
- $L^{t-i} := \sum_{b=1}^8 L^{t-i,b}$: $t-i$ 年度の累積損失額

損失イベントタイプ 7 区分

「内部不正」「外部不正」「労務慣行および職場安全」「顧客、商品および取引慣行」「実物資産の損傷」「事業の中断およびシステム障害」「執行、受け渡しおよびプロセスの管理」

その先の先進的計測手法と呼ばれるものは、いろいろと考える余地があるモデルになってきます。けれども、データの蓄積が5年で、今では7年ぐらいかもしれないけれども、過去にわたって、ある程度のオペレーショナル・リスクの損失事例が蓄積されていることを前提に、それを使ってモデルのパラメータなどの推定をするということになってきますので、まずデータがなければいけないという話になります。

また、データをただ集めればいいのかではなくて、このようなデータを取りなさいということが、最終的に計測に使用するモデルから演繹されるというか、前提としてこのように取らなければいけないということが決まってきます。

それは何かといいますと、現在が t 年度の期首で、これからその t 年度分のオペレーショナル・リスクの損失について評価しなければいけないというようなときに、それを評価するための材料として、その1年前、つまり $t-1$ 年度の情報は分かっている。また、 $t-2$ 年度、その2年前も分かっている。遡って行って、仮にここでは $t-T$ という年度までとりあえずデータが取れているということにします。何年前のデータであるかを i という記号で表しています。

あと、 b と ℓ (小文字のエル) がありますが、 b は1から8というように数字を振っていて先ほどのビジネスラインを表します。8個のビジネスラインに分けましたので、どのビジネスラインで起こったかということに関してきちんとラベルを付けるということです。

それから ℓ は1から7までの数字が振られていて、これは下の方に書いてありますけれども、イベントタイプというものが7種類規定されていますので、その7つのうちのどのタイプであるかにもラベルを付けましょうということになります。

ということは、データを収集するときには、何年前のデータかということと、そのときにはどのビジネスラインで起こり、そのときの損失イベントタイプはどれかということとをまずはっきりさせることになります。何年前に、どのビジネスライン、どのイベントタイプで、何件起こっていたかを数えたものが、最後にあ

ります $N^{t-i,b,\ell}$ という変数で表されます。それが、 $t-i$ 年度、つまり i 年前の b というビジネスラインで ℓ というイベントタイプで何件起こったかをカウントした件数のデータとなります。

また $X_k^{t-i,b,\ell}$ という記号については、下添え字のインデックスとして k とあり、 $1,2,3,\dots$ となっています。つまり、年度・ビジネスライン・イベントタイプで一つにくられたカテゴリーの中で何番目に起こった損失かを k で表すこととなります。

実際には、この k は、時系列的に起こった順に番号が付けられていなくてもいいのですが、たいてい番号は起こった順に付けることになると思います。いつ起こったかということまで考えるかどうかでモデルは違ってきますが、本当は、いつその損失が起こったかという時間情報もきちんと与える必要がこれからは出てくるかもしれませんが、今は、それは考えずに、そのカテゴリー内で何番目に起こったかということだけをラベルにすることにしております。

このように基礎データとしては、年度・ビジネスライン・イベントタイプごとにそれぞれ何件の損失事例があり、それぞれでいくらの損失が出たのかを得られます。

次に必要になるものは、例えば、何年度のビジネスラインでの損失額をまとめたいということで、イベントタイプについては集約してしましましょうというのと、 $L^{t-i,b}$ という数式のような形で集約されることになります。

またに、銀行全体で何年度にいくらのオペレーショナル・リスクの損失があったかというのと、ビジネスラインについても足し上げればよいということなので、 $X_k^{t-i,b,\ell}$ という基礎データを集約していけば、いろいろなレベルの損失額を、一応、量として算出できるということになります。

実際に、損失イベントタイプ 7 区分とあります。オペリスク事案をこの 7 つのどれか一つに必ず振り分けられるかどうかといった実務の話は、私も把握していません。複数のタイプにまたがっていると見なすのが自然な場合もあって、複数のタイプにまたがるような場合は、その損失額を各タイプに適当な方法で按分したりするのかもしれませんが、一応、1 個の事例に関しては、一つのビジネスラインとイベントタイプを割り振って、それに対する金額、損失額を割り振ったデータを持っていくこととなります。

先進的計測手法 (AMA) – 損失分布手法 –

$$RC_{AM}^t(OR) := \varrho_{\alpha}(L^t).$$

ただし、

- L^t : (将来にあたる) t 年度の累積損失額 (これは未知ゆえ確率変数)
- ϱ_{α} : 信頼水準 α (例えば 99%) に対応するリスク尺度 (VaR あるいは期待ショートフォール (ES))

- 実際に $\varrho_{\alpha}(L^t)$ を計算する際には、異なるカテゴリ $((i, b, \ell))$ 間の依存関係を考慮した同時分布を用いる必要があるが、現実にはそれらを特定するのは困難なので、ビジネスラインごとにリスクを算出して、その単純和をとることもよく行われる：

$$RC_{AM}^t(OR) = \sum_{b=1}^8 \varrho_{\alpha}(L^{t,b}).$$

- もっと端的に (あるカテゴリの) オペリスク損失の発生件数を表す確率変数 N とその損失額を表す確率変数の列 $\{X_k \mid k = 1, \dots, N\}$ に対して、次のような (1 年) 99.9%-VaR を計算することが多い：

$$\text{VaR}_{0.999} \left(\sum_{k=1}^N X_k \right).$$

データを得た後どうするかについては、いろいろな選択肢がありますが、抽象的に表すと、このような形で表されます。とにかくこれから t 年度の 1 年間の損失がどれだけかということを知りたいので、 L^t が我々の興味の対象になります。

ただし、この累積損失額 L^t は確率変数になりますから、これからリスクを抽出したいということになります。一番良いのは確率分布全体を知ること、それができれば確率分布から必要に応じてカスタマイズしたリスクを計量すればいいのですけれども、そのようにいかない場合、例えば、平均だけを計算したり、分散だけを計算したり、あるいは確率変数の分位点、99%点や、後で触れるようにオペリスクでは 99.9%点を一般に考えるのですけれども、確率分布の裾の方の特定の確率に対応する値だけを計算したりして、リスク量としましょうということもあります。

最近では、期待ショートフォールというバリュー・アット・リスクを超えた損失についての平均値のような概念もあります。いずれにしても確率変数があったときに、それに付随する統計量を一つ決めてそれをリスク量と決めましょうということです。統計量として何をリスク尺度にするかを決めると、それで AMA におけるオペレーショナル・リスクの一つが決まることになります。

細かい話はいくつかありますが、端的に言うと、オペリスクについては一般的には 1 年間の 99.9%バリュー・アット・リスクをリスク尺度として考えます。つまり、 L^t という今後 1 年間の累積損失額の確率分布を考えて、その 99.9%タイル、言い換えれば 0.1%という無視できそうな確率で起こりうる損失額をオペレーショナル・リスク量として決めましょうという保守的な考え方が、バーゼル規制で言われていることです。

その 99.9%バリュー・アット・リスクを計算すれば、実務としてのオペリスクの話は済むわけなのですが、確率のことはアクチュアリーの方々はもちろんご存じだと思いますけれども、確率変数の和の分布は、計算がけっこう面倒なのですね。正規分布であれば、正規分布は足してまた正規分布になるという性質がありますので、それほど問題はないのですけれども、今考えているのは損失額でその定義域がゼロ以上という分

布を扱うことになるので、正規分布のようにマイナスやプラスの領域に対称になってくるというような想定はないわけです。

そうすると、一般に定義域がゼロ以上となる確率分布を持つ確率変数が i.i.d. つまり独立同分布であっても、それを足したものの分布は解析的にきれいに書けるかと言うと、それは期待できません。なので、確率変数の和の分布を計算しようと思ったら、それは何かしら数値的な方法に頼らなければいけないことになります。それだけでも面倒くさいのですが、発生件数を表す変数 N も、将来何件起こるかという未確定なものです。要は将来の累積損失額は、確率変数が 2 種類混じったもので構成されているので、さらにややこしいわけです。

「それは混合ポアソン分布です」と言えば、皆さんはお分かりになるかもしれませんが、それでも、通常は解析的にはきれいに解けるわけではないので、数値的な手法を知らなければ、それ具体的にどのような確率分布に従うかということは分からないわけです。

このように技術的に厄介なところがありますので、何かしら数値的な手法に通じていなければ計算が大変になるということは、一応、先に確認しておきたいと思います。

ただし、何件起こるかの分布と、1 件当たりの損失分布を情報としてとりあえず与えれば、ややこしいかもしれないけれども、何とか数値計算できるものでもあります。

オペリスクの損失データの特徴

『定量的リスク管理』第 10 章 (10.1.4 項) より引用：

- 損失の規模は裾の重い分布をもつ
→ ファット・テールな分布？
- 損失は時間的にはランダムに起こる
→ オペリスク事象発生は計数過程でとらえる？
- 損失の起こる頻度は時間とともに大幅に変動しうる (報告バイアスが存在している可能性はある)
→ 計数過程の compensator が確率過程になっている？

数値計算の話の前に、損失の件数はどうモデル化すべきか、あるいは 1 件あたりの損失額の分布はどのようなものかについて少し思いを巡らしますと、いろいろと厄介な問題があります。

まず、損失の規模を考えると、リスク計量という点では巨額な損失が問題になってきます。巨額な損失こそがオペリスクを考える意味なので、損失額分布としてはファット・テールな分布を考えましょうということになります。

では、ファット・テールな分布として具体的に何を選ぶべきかという話になってきたときに、いろいろと

選択肢があると思いますが、どうしてもこの分布でなければならないという話をどこかの理論から持ってこられるわけではなく、そのデータとにらめっこする必要があります。ただ、巨額な損失のデータが、実際のところ十分に取れるかという、それは期待できないので、ファット・テールの分布のうちで何を当てはめるべきかということは、問題として残っていると。

また、損失が時間的に独立にランダムに起こっているのではなくて、意外とオペリスク損失の発生は独立ではないかもしれません。すると、今回はまず今後1年間に何件起こるかという件数だけを捉えますが、一方で、それは何件という1つの数量で表すよりは、いつどのようなタイムラインで起こったかをきちんと追っていくことが、リスクの改善という面でもしかしたら意味があるかもしれません。

つまり、ある時期に集中的に起きる、例えば4月や5月は起こりやすいというようなことが、もし分かるとすれば、それはオペリスク改善のヒントになるわけですね。

ということは、ある時期に集中してオペリスク事案が起こる場合、マクロ的な経済指標とか、実際の取引・トランザクションの回数などと連動しているのかを調べる必要があるかもしれません。その場合は、どのぐらいの時間でどれぐらいの損失が起こり得るかというのをもっと細かい時間単位で見ていく必要があるでしょう。

そうすると、オペリスク事象発生は、ある期間の件数ではなくて、いつ起こっていくかを記録する確率過程、つまり計数過程で捉える方がいいのではないかという考え方もあります。最先端のモデルというか、アカデミックでは、強度と呼ばれるパラメータが時間依存したり確率的に変動したりする計数過程を持ち出し、その強度を共変量と呼ばれる経済変数と関連づけたりします。

今回はそうした計数過程のモデルは参考にとどめますが、将来的には、そのようなモデルも考えていかざるを得ない状況も出てきそうです。

オペリスクでなくとも、損失が起こる頻度が時間ともに変動しているというのは、信用リスクの評価でもしばしばみられます。ですので、強度が確率変動する計数過程でリスク事象の発生頻度をモデル化することは、オペリスク以外のリスク計測にも応用することができるかもしれません。

オペリスクについては、最近になって注意が向けられるようになりましてけれども、昔はオペリスクの報告が義務付けられていなかったの見落としや見過ごすことがあっても不思議ではなく、オペリスクの収集がルーティンになってきたので昔に比べて直近の方がオペリスクの報告事例が多くなっており、それも報告バイアスとして考えられます。しかし、そのような事情を排除しても、もしかしたら、徐々にオペリスクが起こりやすくなってきているかもしれない可能性を分析する余地はあり、時間とともにデータに変化があるかということは注意して見ていく必要があるでしょう。

ということで、今回は単純化した話にとどまって、1年あたりの発生件数がポアソン分布に従うとしてしまえますけれども、これからオペリスクをまじめに計量するとなったら、いつ発生したかということについても目を向けていく必要があるかもしれません。それが実際の業務の改善のヒントにつながり、結果としてオペリスクを軽減するという品質向上活動につながられるかもしれません。

オペリスクの損失データの特徴

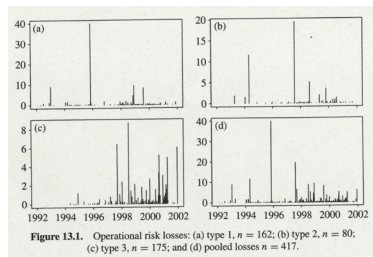


Figure 13.1. Operational risk losses: (a) type 1, $n = 162$; (b) type 2, $n = 80$; (c) type 3, $n = 175$; and (d) pooled losses $n = 417$.

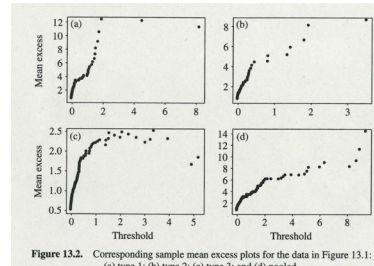


Figure 13.2. Corresponding sample mean excess plots for the data in Figure 13.1: (a) type 1; (b) type 2; (c) type 3; and (d) pooled.

図: 『定量的リスク管理』第10章(10.1.4項)より引用: 左側は、カテゴリごと(右下以外)と全体(右下)のオペリスク損失発生時点と損失額を表示したものの。右側は、左側の図と対応して、各カテゴリと全体について、横軸の値を超過閾値としたときの標本平均超過関数の値(閾値を超過している損失額の超過分の平均)をプロットしたものの。

右側の図について: 閾値が大きい領域で、標本平均超過関数の散布図が「線形」の関係に見せると、後述するGPD(一般パレート分布)を仮定した場合の標本平均超過関数が閾値の線形関数として表されることが整合するので、超過損失がGPDに従うという可能性が出る。このとき、線形関係の始点からGPDの閾値の目安が、直線の傾きから ξ の水準の目安(傾きは理論上 $\frac{\xi}{1-\xi}$)が得られることになる。☆

これは、『定量的リスク管理』のテキストからコピーしてきたもので、今は左側の図だけを見ていただきますけれども、時系列的にオペレーショナル・リスクが1992年から2002年までの間にどのように発生したかという例です。縦の長さが損失額の大きさ、シビアリティーとも呼ばれますが、損失の重大度・影響度を表しています。

(a)、(b)、(c)のグラフは、それぞれ別々のカテゴリーに属するデータを別個に集計したもので、右下の(d)がその3つのものをまとめて表したものです。(a)では、96年ぐらいのときに1つ大きな損失が出ていて、少しファット・テールな分布に従うことが想起されますし、(c)は98年以降に集中して起こっていて、独立に起こっていないように見えます。つまり、データを視覚化してそうしたことを確認しながらどのようなモデリングがいいのかということを考える必要があるということです。

この図は、極値理論の中でもう1回少し振り返ることにしますが、このようなデータがオペリスクではあるということです。

99.9%VaR の計算－モデルと理論－

- もっとも単純なモデル→ **古典的な損保数理の枠組み**
 - N : 今後 1 年間のオペリスク損失の発生件数を表す確率変数で、Poisson 分布 (後述) に従うと仮定。強度パラメータを $\lambda (> 0)$ とする。このとき $E[N] = \lambda$ である (発生時点はとりあえず気にしない)
 - X_k : k 番目のオペリスク損失額を表す i.i.d. な確率変数 ($k = 1, \dots, N$)
 - 発生件数 N とは独立と仮定 (→ 実際はどうか?)
 - 1 件あたりのオペリスク損失額に対する確率密度関数 $f(x)$ が存在すると仮定
 - $L := \sum_{k=1}^N X_k$: オペリスク累積損失額 (確率変数)
- 累積損失額 L の統計量と分布関数
 - 期待値と分散は、独立性の仮定から以下のように得られる

$$E[L] = E[N]E[X_1] = \lambda \int_0^{\infty} xf(x)dx, \quad V(L) = E[N]E[X_1^2] = \lambda \int_0^{\infty} x^2f(x)dx$$

- 累積損失額の分布の計算 → **確率変数の和の分布** に帰着

$$P(L \leq \ell) = \sum_{m=0}^{\infty} P(N = m)P\left(\sum_{k=1}^m X_k \leq \ell\right) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!} P\left(\sum_{k=1}^m X_k \leq \ell\right)$$

99.9%VaR の計算－実務の課題－

- 発生頻度 (frequency) のモデル
 - Poisson 分布でよい?
 - 最終的には 1 年間の件数だけに注目するが、発生時点も Poisson 過程やより一般の計数過程でモデル化すべき? → **発生パターンを分析することで、頻度や損失額を小さくするためのヒントが見つかるかもしれない**
- 1 件あたり損失額 (severity) のモデル
 - ファットテールな分布として何を仮定すべき? 対数正規、Weibull、Gamma などのパラメトリックな分布? ノンパラメトリック?
 - **極値理論 (Extreme Value Theory; EVT) を応用?**
 - 独立性や同分布性の仮定は妥当? AR のような時系列構造は?
- 上の 2 つを組み合わせた**累積損失額**に対する 99.9%VaR の算出
 - モンテカルロ・シミュレーションを用いる? 無駄な試行が多くなるがどうする?
 - **損失額の和の分布**を、Panjer 漸化式や高速 Fourier 変換を利用して近似的/数値的に得る?³
 - カテゴリ間の依存関係の考慮は? 単純和? コピュラ?

³最近では、Lévy の反転公式 (Fourier 逆変換) で得られる積分表現の分布関数の積分部分を直接数値計算する方法や、Wavelet 変換を用いる近似手法なども提案されている。

リスク計量の数値計算の話に戻ります。ここでは、一番シンプルなモデル、古典的な損保数理などでも使っているモデルをベースにして、99.9%バリュー・アット・リスクと呼ばれるものを計算するという話に集約して確認していきたいと思います。特に 1 年間に何件起こるかをまず考えましょう。そして 1 件当たりどれくらいの損失が出るかということをお案して、起こった回数分だけ損失額を足しあげて累積損失額とします。

N は今後 1 年間のオペリスク事例の発生件数を表す確率変数で、強度パラメータは λ で表します。つまり、この 1 年間に起こる平均件数が λ と想定することになります。

λ の推定方法については、今回はあまり触れません。これも過去5年分の平均を取るのかいいのかとか、いろいろな方法があると思いますけれども、とにかく今後1年間は、平均的には λ 件起こる、あるいは分散もポアソン分布の場合は λ で表されますので、平均と分散が同じく λ で表されている想定で発生件数のモデルを与えましょうということになります。

次に1件当たりではどのくらいの損失が出るかという話で、これもとても強い仮定ですけれども、1件1件どのようなオペリスク損失が起こるとしても、その損失額は全部、独立に決まるものとしましょう。なおかつ、従う分布も同じにしましょうということです。

銀行全体でそのような強い仮定を置くことが厳しいと思えば、あくまでもビジネスラインごとに同じ分布を仮定してはどうかという話になるかもしれません。ただ、今から考える対象については、損失額が独立に同じ分布に従うものと仮定します。

また、損失額は、発生件数であるポアソン分布の変数とも独立だと仮定しておきます。全て独立な変数を考えるということなので、計算が多少は楽になる素地が出来ているのですけれども、問題はオペリスク損失額が従う確率分布は何でしょうかという問題が残っています。先ほどもファット・テールの分布にしなければいけないというようなお話をしましたけれども、割と選択肢は狭まっていて、対数正規分布やガンマ分布やワイブル分布などが候補に挙げられてきます。

後で説明する極値理論では、一般パレート分布と呼ばれる分布でそのテールがうまく説明できるという話をします。そこで、損失額の分布としてどの分布にするか迷うのだったら、一般パレート分布と呼ばれる選択肢以外は考えないで済むという利点もある極値理論を持ち出しましょう、という話の流れになっていきます。

私自身は、会社にいた当時、オペリスクのプロジェクトでは、対数正規やワイブル、ガンマなど考えられる分布をいろいろと試しました。その当時には極値理論も知っていましたので、一般パレート分布を応用したものも使いました。

結局、極値理論からそれなりに高いリスク量が得られたので、一番良さそうな手法だということとても主観的な見解を述べたことがありますけれども、その頃から極値理論はオペリスクの計量モデルと整合的であろうと、ずっと考えています。

1件あたりの損失額について、独立性や同一分布の仮定が本当に妥当かどうかはとても微妙で、サンプルがいろいろ集まってこなければデータ分析できません。私が分析した当時はとても限られたサンプルだったので、独立性の検定などモデル化する前段階で確かめておくべき仮定の確認などをせずに、とりあえず独立同分布でやってしまおうという流れでした。データの蓄積が進むにつれて、もう少しきちんとした性質を調べて損失額のモデル化をする必要があるかもしれません。

さて、ポアソン分布に従う確率変数で決まる個数だけ、独立同分布の確率変数を足した和についての統計量の計算を考える話に戻ります。平均や分散に関して言うと、これは、ポアソン分布が前提だと計算は実は難しくなくて、アクチュアリーの方にとっては練習問題というか試験の復習問題のようなことになります。パラメータ λ や1件あたりの損失額の平均などが分かれば計算できる場合が少なくありません。

ただ、ここでは99.9%バリュエーション・アット・リスクと呼ばれる累積損失額分布の99.9%点に対応する損失額を知りたいので、単純ではありません。ポアソン分布の件数の値で条件付けると、そのポアソン分布の確率

密度関数と、件数で条件づけたときの累積損失額の分布に分けて考えることはできます。

しかし和の分布が結局は問題になってしまい、このままでは計算がうまく運ばないということになります。

(参考) モンテカルロ・シミュレーションによる 99.9%VaR の算出

- ① 発生件数を表す確率変数 N に対する乱数 ($n^{(1)}$) を 1 つ生成
- ② $n^{(1)}$ 件のオペリスク損失額 $X_1, \dots, X_{n^{(1)}}$ に対応する乱数 ($x_1^{(1)}, \dots, x_{n^{(1)}}^{(1)}$) を生成する
- ③ オペリスク総損失の擬似標本として $\ell^{(1)} = x_1^{(1)} + \dots + x_{n^{(1)}}^{(1)}$ を計算する
- ④ 上の手順 1~3 を M 回繰り返し、 M 個のオペリスク総損失の擬似標本 $\ell^{(1)}, \ell^{(2)}, \dots, \ell^{(M)}$ を作る：

$$\ell^{(k)} = x_1^{(k)} + \dots + x_{n^{(k)}}^{(k)}.$$

- ⑤ $\ell^{(1)}, \ell^{(2)}, \dots, \ell^{(M)}$ を昇順に並べたものを

$$\bar{\ell}^{(1)} \leq \bar{\ell}^{(2)} \leq \dots \leq \bar{\ell}^{(M)}$$

とする。

- ⑥ 全体の $[0.999M]$ 番目の擬似標本 $\bar{\ell}^{(0.999M)}$ を 99.9%VaR とする。

$[x]$ は x 以下の最大の整数 (いわゆる「ガウス記号」と同じ)

では、累積損失額に対するバリュー・アット・リスクをどう計算するかということですが、基本的にはモンテカルロ・シミュレーションをしてしまうことが手っ取り早いかもしれません。とにかくポアソン分布に従う乱数を発生させ、1 件当たりの損失額の確率分布に対応する乱数発生ジェネレーターを何とか実装できていれば、それらを組み合わせれば比較的簡単にできます。

エクセルだと、1 万件ぐらいのシミュレーションになると、それなりに時間はかかってしまいますけれども、それほどストレスない時間内にできます。1 万件のシミュレーションをした場合には、99.9%バリュー・アット・リスクは、低い方から数えて 9,990 番目、あるいは上の損失が大きい方から数えて 10 番目に当たるものを拾い出すということになり簡単です。

(参考) Panjer 漸化式

Panjer 漸化式

発生件数を表す確率変数 N について $p_k = \mathbf{P}(N = k)$ ($k = 0, 1, \dots$) とおくと、ある $a, b \in \mathbb{R}$ に対して

$$p_k = \left(a + \frac{b}{k}\right) p_{k-1} \quad k = 1, 2, \dots$$

が成り立つとする^a。また、損失額 X_1 が非負整数値しかとらないと仮定する。このとき、 $g_0 = 0$ とすると、

$$s_0 = p_0, \quad s_k = \sum_{j=1}^k \left(a + \frac{bj}{k}\right) g_j s_{k-j} \quad k = 1, 2, \dots$$

が成り立つ。ただし、 $s_k = \mathbf{P}(L = k)$ 、 $g_k = \mathbf{P}(X_1 = k)$ とする。

^a2 項分布、Poisson 分布、負の 2 項分布のみが条件を満たすことが知られている。

これより、総損失額の確率分布は $\mathbf{P}(L \leq x) = \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} s_k$ で近似できることになる

(参考) Panjer 漸化式による 99.9%VaR の算出

- ① 適当な $h > 0$ を 1 つ固定し、損失額 X_1 の分布関数 F_X を分割することで、 X_1 が $0, h, 2h, \dots$ という離散値をとる変数とみなせるように「離散化」する

$$g_j = F_X\left(jh + \frac{h}{2}\right) - F_X\left(jh - \frac{h}{2}\right) \quad j = 0, 1, \dots$$

- ② N が強度 λ の Poisson 分布の場合に適用すると

$$p_{k+1} = \frac{\lambda}{k} p_k, \quad \left(p_k = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}\right)$$

となることに注意

- ③ Panjer 漸化式から、以下のように s_0, s_1, \dots を得ることができる：

$$s_0 = \sum_{j=0}^{\infty} g_0^j p_j = e^{-\lambda(1-g_0)}, \quad s_k = \sum_{j=1}^k \frac{\lambda j}{k} g_j s_{k-j} \quad k = 1, 2, \dots$$

- ④ $\sum_{j=0}^k s_j \geq 0.999$ を満たす最小の $k = k^*$ を求め、 $k^* h$ を 99.9%VaR とする。

(参考) 高速 Fourier 変換による 99.9%VaR の算出

- ① 前スライドで計算した離散化した確率 g_j の「 M 次の離散 Fourier 変換」を計算する：

$$\varphi_k = \sum_{j=0}^{M-1} g_j e^{\frac{2\pi j k \sqrt{-1}}{M}} \quad k = 0, 1, \dots, M-1$$

このとき、

$$g_j = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \varphi_k e^{-\frac{2\pi j k \sqrt{-1}}{M}}$$

が成り立つことにも注意する

- ② inverse FFT を以下のように適用する（ただし、 $\psi(z) = e^{-\lambda(1-z)}$ を強度 λ の Poisson 分布の特性関数とする）：

$$s_j = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \psi(\varphi_k) e^{-\frac{2\pi j k \sqrt{-1}}{M}}$$

- ③ $\sum_{j=0}^k s_j \geq 0.999$ を満たす最小の $k = k^*$ を求め、 k^*h を 99.9%VaR とする。

まあ、モンテカルロ・シミュレーションが一番お手軽なのですが、損失額の和の分布そのものが求められなくても、それを近似的に計算する方法を使いましょうということで、例えばパンジャの漸化式と呼ばれるものを使って計算したり、高速フーリエ変換、FFT と呼ばれるものを利用して計算したりということは、オペリスクの計量に関する古い文献を今では持っていないので確認できませんが、目にした記憶はあります。

最近では他の方法も提案されていて、ウェーブレット変換などを応用して高速計算するといった研究もありますが、オペリスクに関しては『定量的リスク管理』の中でもパンジャの漸化式に関する説明がありますし、FFT は『定量的リスク管理』には書いていませんが、リスク計量の文献でしばしば目にすることがあるので、この辺の近似手法を押さえておけば応用上は十分だと思います。

実は、今日の大学院の授業では、99.9%バリュアット・リスクを計算してみようということをやりました。本来だったら R と呼ばれるような統計ソフトを使うと簡単なのですが、あえてこれをエクセルで演習してもらいました。

一つは、エクセルでもできますよということを知ってもらうためです。実は、フーリエ変換はエクセルでできますので、FFT は実はエクセルでもできます。モンテカルロ・シミュレーションも乱数を発生させるだけなのでエクセルを使ってできます。パンジャの漸化式もはエクセルで VBA のマクロを書くことになると思いますがそれほど難しくなくできますということを少し紹介しました。

本当は、エクセルでこのような計算を実行するのは馬鹿らしいのですが、そのような計算もエクセルで可能だということを一応知っておくことは重要なと思います。難しそうな統計ソフトを使って計算しましたと言うと「そんなの分かんねえや」と言う人がいるかもしれませんが、エクセルできると言う「一応、ちょっと聞いてみるか。それくらいだったら、もしかしたら自分にも分かるかもしれない」ということで聞いてもらえるかもしれないという意味で、エクセルであえてやってみるということは無駄ではないというか、実務的なコミュニケーションの観点から重要なことかもと少し思っています。

そのような意味で、少し話が脱線してしまうのですけれども、私が作ってみたものがあるので、動くかどうか分かりませんが……動くかな？

いちおう結果を出力したのも用意してあるのですけれども、フーリエ変換をすると複素数が出てきます。これもエクセルで計算させるのですけれども、例えば、対数正規分布を仮定したときに、それを離散個の点に分割していくということをして、それをフーリエ変換することになります。フーリエ変換すると、ポアソン分布で混合したものは扱いやすくなるので、1件当たりの損失額のフーリエ変換をまず離散フーリエ変換をして求め、それを少し簡単な計算でポアソン分布と混合して累積した累積損失額のフーリエ変換として変換して、最後にそれを逆変換してやると、累積損失額分布を離散化したものが、すぐに出てしまうのですね。

エクセルの「データ分析」で「分析ツール」の中に「フーリエ解析」というメニューがありますので、フーリエ変換のことをほとんど知らなくても、そのようにやるのだと思えば、単にある領域をデータとして入力して、ポンとボタンを押せばできてしまうという代物です。

エクセルですと、実は、複素数の計算の仕方が少しだけ特殊です。ご存じかもしれませんが、複素数の計算で、足し算や引き算やかけ算をするときは、「+」「-」「×」の記号ではなくて、それぞれ IMSUM, IMSUB, IMPRODUCT という関数を使います。「IM」は虚数を表す imaginary から来ていますね。あと、IMEXP で複素数のエクスポネンシャルの計算をします。

エクスポネンシャルの関数の中に「 $-λ$ 」というポワソンの強度 $\times(-1)$ と1件当たりのフーリエ変換の損失額を入れると、それが累積損失額のフーリエ変換になってしまうのです。だから、1件当たりの損失額のフーリエ変換を使って求めて、それを先ほどの変換で累積損失額のフーリエ変換にして、それを最後に逆変換して累積損失額の分布を求めるという流れを淡々とやるだけなのです。

最後に、その逆フーリエ変換で得たものを足し上げていくと、累積損失額 L の損失分布が近似的に得られていきます。その99.9%に対応するものをずっと探していくと、この場合は735 というものが出てきます。

実は、『定量的リスク管理』の中で、演習問題的に平均100のポアソン分布と、この数値例と同じ対数正規分布を混合したときの累積損失額分布をパンジャの漸化式で計算したときに99.9%バリュエ・アット・リスクが735という結果が載っています。

それに関してFFTで再現をしてみて、同じ値が出ているということも確認したことになります。あと、モンテカルロやパンジャの漸化式のアルゴリズムも実装して、実際に結果がいずれも同じになることが確認できました。

この話を聞いて「そんなの私もできますよ」という方もいらっしゃるかもしれませんが、ご興味がある方は、このエクセルのファイルをお渡しすることができます。私の書いたVBAのコードは稚拙ですが、参考になれば幸いです。

だいぶ脱線してしまいましたけれども、少なくとも確率変数の和の分布の計算は、それほど難しい技術ではなくて、フーリエ変換を知らない学生などに対してもやり方を教えれば、すぐに確かめられるレベルの話だということを紹介しておきました。

ただ、それでも独立性の仮定がとて強く効いていますので、本当はカテゴリー間の損失の依存関係を考えなければいけないのではないかと、損失額については独立性を考えては駄目なのではないかと、コンピュータとい

った結合分布関数を持ち出すべきではないかというような話もありますので、そうなってくるとまた話が違いますけれども、独立な確率変数の和については、皆さんもご存じの範囲かもしれませんが、数値的に計算する方法がいろいろ知られているということを確認として示しました。数式での説明も参考という形で書いてあります。

それと、ここにタイポがあります。2番目の式で、ポアソン分布はパンジャ漸化式を満たすという話なのですが、 $p_{k+1} = \frac{\lambda}{k} p_k$ ではなくて、この場合は、分母を $k+1$ にしなければ合いません。つまり、 $\frac{\lambda}{k}$ ではなくて、この場合、 $\frac{\lambda}{k+1}$ で計算しないとイケないということです。FFT に対しても同じです。

パンジャ漸化式も FFT も、元の確率分布を離散化するというので、離散的な近似であるということは強調しておきます。

計数過程によるオペリスク損失発生頻度のモデル化

- 単にある期間におけるオペリスク損失発生件数だけに注目するのではなく、いつ発生するか? に注目する → 計数過程に基づくモデル化
- 計数過程：最初は 0 の値から出発し、対象イベントが発生した時点で 1 だけ値がジャンプすることで、その時点までの累積発生件数を表すことになる確率過程

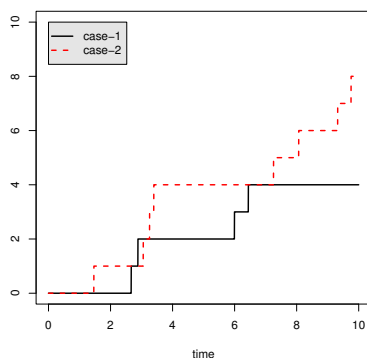


図: 横軸は時間、縦軸は件数。累積のイベント発生時点と件数のサンプル

Poisson 過程

- フランスの数学者 Siméon-Denis Poisson(1781 – 1840) にちなんで名付けられた確率過程
- 古典的なリスク理論（損害保険で扱われる事故や火災を主な対象としている）で最も基本的な確率過程



図: Wikipedia より抜粋

定義 (Poisson 過程)

λ を正の実数とする。 N_t を (0 を起点として) 時点 t までに発生したイベントの累積件数を表す確率過程とする。

N_t が次の 3 つの条件を満たすとき、 N_t を強度パラメータ λ をもつ Poisson 過程と呼ぶ

- ① $0 \leq \forall s \leq \forall t \leq \forall u \leq \forall v$ のとき、 $N_v - N_u$ と $N_t - N_s$ は独立
- ② $P(N_{t+h} - N_t = 1) = \lambda h + o(h)$
- ③ $P(N_{t+h} - N_t \geq 2) = o(h)$

$(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = 0$ が成り立つとき、 $f(h)$ を $o(h)$ と表す)

Poisson 過程の重要な性質

- Poisson 過程 N_t のサンプルパスは、右連続かつ非減少で、大きさ 1 のジャンプでのみ増加
- 強度 λ の Poisson 過程 N_t は以下の性質を満たす
 - (分布) $t > 0$ を固定したとき、 N_t の確率分布は、パラメータ λt の Poisson 分布になる。すなわち、

$$P(N_t = k) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

- (定常増分性) $P(N_{t+s} - N_t = k) = P(N_s = k)$ for $\forall k = 0, 1, 2, \dots, \forall s \geq 0$.
- 強度 λ は、次が成り立つという意味でハザードレートと見なせる：

$$P(N_{t+dt} - N_t = 1 | \{N_u\}_{u \leq t}) = \lambda dt$$

- 強度 λ の Poisson 過程 N_t に対して、

$$M_t := N_t - \lambda t$$

と定義された確率過程 M_t はマルチンゲール⁴となる

- 「強度」の一般化のためには、この性質が非常に重要
- $E[N_t] = \lambda t$ ← 分布から直接計算 or M_t のマルチンゲール性より

⁴付録の「数学的補遺」を参照のこと。

Poisson 過程の別の特徴付け

イベント発生時刻に着目すると、Poisson 過程を次のように特徴付けすることができる
(※こちらの特徴付けをもって Poisson 過程の定義とする立場もある。文献によって、様々な定義の仕方があるが、いずれかを定義すれば、他の特徴付けは定理として導出することができる)

定理

独立でパラメータ $\lambda (> 0)$ の指数分布に従う確率変数列 T_1, T_2, \dots があるとする。

$$P(T_k \leq t) = 1 - e^{-\lambda t} \quad \forall k = 1, 2, \dots$$

また、 $\tau_n := \sum_{k=1}^n T_k$ とおく。このとき、

$$N_t := \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{\tau_n \leq t\}} = \sum_{n=1}^{\infty} n \mathbf{1}_{\{\tau_n \leq t < \tau_{n+1}\}}$$

で表される確率過程 N_t を、強度パラメータが λ の Poisson 過程となる。

主な性質

$$P(T_i > s + t | T_i > t) = e^{-\lambda s}, \quad E[T_i - T_{i-1}] = \frac{1}{\lambda}$$

複合 Poisson 過程

- イベントの発生件数ではなく、累積損害保険金支払額のように、イベントに付随する数量 (例えば、保険金支払額) を加算したものに注目することも多い
- 次のような複合 Poisson 過程が基本的

定義 (複合 Poisson 過程)

独立同分布の確率変数列 X_1, X_2, \dots がある。 N_t は Poisson 過程であり、 X_1, X_2, \dots と独立であるとする。このとき、

$$L_t := \sum_{k=1}^{N_t} X_k = X_1 + \dots + X_{N_t}$$

で定義されるジャンプ確率過程 L_t を複合 (compound) Poisson 過程と呼ぶ

- 主な性質
 - $E[L_t] = E[X_1]E[N_t]$

Poisson 過程の一般化

- Poisson 過程の「強度 λ 」を時間変化させたり、ランダムに変動させたりしたい

- ① 強度は時間変化するが、確定的なものを見なす場合

- 非斉時 (inhomogeneous) Poisson 過程：強度を時間の関数 $\lambda(t)$

→ N_t は $\int_0^t \lambda(s) ds$ をパラメータとする Poisson 分布に従う

- ② 強度は一定と考えられるが、当初はその値が不確実なものを見なす場合

- 混合 (mixed) Poisson 過程：強度を確率変数 Λ

→ N_t は Λt をパラメータとする混合 Poisson 分布に従う

- ③ 強度は時間とともにランダムに変化するものを見なす場合

- 二重確率的 (doubly stochastic) Poisson 過程：強度を N_t と独立な確率過程 λ_t

→ N_t は $\int_0^t \lambda_s ds$ をパラメータとする混合 Poisson 分布に従う

- 自己励起的 (self-exciting) なモデル：強度自身も N_t のジャンプ時点で同時にジャンプするような構造の強度過程を用いるモデル

$$\text{(c.g.) } \lambda_t = \lambda_0 + \sum_{k=1}^{N_t} \eta(X_k) e^{-\kappa(t-\tau_k)}, \quad \eta > 0, \kappa > 0$$

ただし、 τ_k は k 番目のイベント発生時点で、 η は損失額を強度に対するジャンプ・インパクトに変換する適当な関数とする。

それで、ここで飛ばしたスライドの内容には今日は触れません。一応、情報として載せましたが、先ほども言ったようにある期間の件数だけを考えるということで、目的は果たされるのだけれども、いつ発生したかを考えるときには、リスク評価をする今後 1 年の間にどのようなタイミングでそれが起こり得るかを考えるということなので、件数をただカウントするだけではなくて、いつイベントが起こったかということもきちんとトラックしていきましょうということになり、計数過程でしっかりとモデル化して、1 年間に何件起こるかを知りたいければ、それはそれで 1 年後を時間のエンドと決めておいて集計すればよいということです。

計数過程については、ポアソン過程と呼ばれる確率過程が基本になりますが、それは強度と呼ばれる、ジャンプのタイミングを決めるパラメータ λ が固定されていますので、発生タイミングが時間によって変わったり、状態に依存する確率過程としてとらえたりする場合までを含めると、モデリングとしては、かなりいろいろ考える余地があるという話があります。

資料の最後の方には、今日詳しくお話ししませんけれども、自己励起的というか self-exciting な性質のモデルも取り上げています。これは、あるイベントが発生すると、同種のイベントがまた続けて起こりやすくなるということをモデル化したものです。

このモデルは、地震が発生するときのモデルで、大きな地震が起こった直後にまた同じような大きな地震が起こりやすくなるといったことを説明するのに使われています。金融工学でも信用リスクの観点で、企業の倒産が起こると同種の企業の倒産が近いうちにまた起こりやすくなるといった現象をとらえたいときにも使われています。要するに同じようなイベントが短期間の間に続くということを説明するときに使われるのですけれども、もしかしたらオペリスクについても、そのような考えが必要になってくるかもしれません。なので、このような拡張の余地もあるということ、いちおう示しておきました。

ですので、いつ起こるかということに注目することを正当化できるデータの蓄積がまだないという側面はありますが、いつどのように起こるのかということがデータとして明確になってくれば、オペレーショナル・

リスクをそもそも軽減するために手を打つことができますので、リスクを計量するというよりは、リスク削減とか日常業務の改善運動をするためのヒントを見つけるという点で、このようなモデリングもおそらく役に立つのではないかと思います。もちろん、リスク計量の意味でも、もう少し精緻なリスク算出ができるようになる期待はあります。

極値理論 (EVT) に基づくオペリスク計量モデル

損失額：極値理論 (EVT) に基づくモデル化

- VaR をリスク尺度として考える場合、大きな影響を与えるのは、低損失額の事故よりも、頻度は少ないかもしれないが「巨額」な損失事故
 - その意味で、まず 1 件あたり損失額 (severity) のモデルに注目
 - その場合、損失額分布全体の精緻なモデル化よりも、分布の右裾部分に問題意識を特化する方が合理的とも思える
 - 市場リスクや信用リスクでも同様の問題意識が芽生えている
- 極値理論 (Extreme Value Theory; EVT) の応用⁵
 - オペレーショナル・リスクの計量化を統計的アプローチの観点で論じている論文において、1つの潮流を形成してきたと考える
 - ここでは一般パレート分布 (GPD) を用いた最もシンプルなモデルを紹介⁶

⁵個人的には、森本祐司氏（キャピタルコンサルティング株式会社代表取締役）の論文『金融と保険の融合について』（日本銀行金融研究所ディスカッションペーパー 99-J-13 (1993)）で紹介されたのを目にしたのが最初だったと記憶している。

⁶McNeil et al.(2015) の 5.2.4 項では、分布の裾を $P(X > x) = x^{-\alpha} L(x)$ （ただし、 $L(x)$ はある緩変動関数（例として対数関数））ととらえ、パラメータ α の推定値を Hill 推定量で与える Hill method と呼ばれる方法が紹介されている。また、5.3.2 項では、POT(Peak-Over-Threshold) アプローチとして、閾値超過損失の頻度モデルを Poisson 過程ではなく、自己励起的 (self-exciting) なものなど一般化された点過程のモデルも紹介されている。

さて、これまではとても大まかにオペレーショナル・リスク計量の概略を話しましたが、リスク計量のポイントは2つでした。要するに、1年間に何件起こるかという話と1件当たりの損失額がどうなるかということです。極値理論は、そのうちの1件当たりの損失額について、分布のファット・テールを扱いやすくす

るというか、モデル選択で迷わずに「この分布を使えばいいんだ」という割と強力な答えを与えてくれる理論的なものとして導入するということになります。

もともと極値理論は、オペリスクというよりも市場リスクの中でのリスク評価をもう少し精緻化するという側面でいろいろ紹介されてきた経緯もあったかと思います。現在キャピタスコンサルティングの社長をされている森本祐司さんが、日銀の金融研究所にいたときにディスカッション・ペーパーを書かれていて、その話題が「金融と保険の融合、Alternative Risk Transfer として、その中で「極値理論 (Extreme Value Theory なので、略してしばしば EVT と呼ぶ)」についても詳しくサーベイされていたのを読んだのが、私が極値理論に触れた最初でした。森本さんの論文ではたしか TOPIX (東証株価指数) の分析で、EVT をこう使うと、こんなふうに評価ができますよ、といった紹介もされていました。オペリスクに適用するという文脈ではなかったと思いますが、要するに、市場リスク評価に極値理論を使ってリスク評価を改善するというようなアイデアは以前からあり、金融におけるリスク評価のモデルとしても、EVT は浸透してきているし、実装されて利用されている部分もあるのかなということです。

それで、ここで紹介する極値理論としては、損失額の分布としてファット・テールなものを選ぶ際に迷わずに、一般パレート分布 (Generalized Pareto Distribution なので略して GPD と呼ぶ) という分布を利用して、リスクを表現するという話に限定していきます。

ただし、GPD を仮定しようというのは、非常に役に立つし有効なアイデアですが、とても強い仮定というか、強い思い込みの下に使うことになるという危険性もありますので、そこは注意をしていきます。その危険性とは何かと。まずは今回の EVT で非常に重要な一般パレート分布の話をもとめておきましょう。

極値理論 (EVT) に基づくオペリスク損失額のモデル化

一般パレート分布 (GPD)

- (適当な閾値に対する) 超過分布関数が一般パレート分布 (Generalized Pareto Distribution; GPD) で近似 (実際には置き換え) 可能と仮定して、ある基準 (閾値) を超えるサンプルだけを用いて GPD のパラメータを推定する方法
- GPD の分布関数 $G_{\xi, \beta}(x)$ は $\xi \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$ (ξ, β はそれぞれ “shape”, “scale” という意味合いをもつ) に対して

$$G_{\xi, \beta}(x) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \frac{\xi x}{\beta}\right)^{-\frac{1}{\xi}} & (\xi \neq 0) \\ 1 - \exp\left(-\frac{x}{\beta}\right) & (\xi = 0) \end{cases}$$

(定義域は $\xi \geq 0$ のとき $x \geq 0$, $\xi < 0$ のとき $0 \leq x \leq -\frac{\beta}{\xi}$)

- ξ が大きくなるほど裾の厚い分布になる。 $\xi \geq 1$ のときは理論的には期待値が存在しない
- 損失額の全体の分布に関して強い仮定は要求されない

もともと一般パレート分布は、超過分布関数と呼ばれる「ある閾値を超えたという条件の下での超過分についての分布関数」を近似するために使われます。それについては、後で話しますが、いずれにしても、ある水準を超えた部分の話に注目しているので、そのある水準というのを巨額損失の目安だとするならば、リスク管理で気にしたい損失額の裾の部分については、条件付き分布という形ではありますが、一般パレート分布でうまく説明できるということは、損失額の全体に対する分布が何であれ、裾の部分だけは一般パレート分布で置き換えて考えてもよいという話になります。

では、一般パレート分布とは何かというと、一般には2つのパラメータ、場合によっては μ という平均させるような別のパラメータを持つ場合もありますが、一般には ξ というパラメータと β というパラメータをもつ分布です。 ξ が shape と呼ばれ、形状、特にテールの厚さを決める役割があります。 β の方はスケールリングを調整するパラメータとなります。この2つのパラメータを指定すれば、分布形状は一つに決まるということです。

ξ がゼロのときだけは指数分布になります。それ以外のときは、スライドに書かれているような形状になります。 $-1/\xi$ という形で指数が付いています。 ξ が大きくなればなるほどファット・テールなものになっていきます。

ξ が1以上になると、理論的には期待値が存在しないようなファット・テールなものになります。

GPD は、あくまでも適当な閾値に対して、それを超過した部分の条件付き分布関数として使うので、全体的な元の分布はどうかという疑問はありますが、それには実は強い仮定は必要ありません。全体がワイブル分布であろうが、全体がガンマ分布であろうが、全体が対数正規分布であろうが関係なくて、ある閾値を超えた部分については、パラメータは変わるかもしれませんが、裾の分布形状としては一般パレート分布を変換したもので近似できるというように捉えるわけです。

オペリスク計量においては、全体の分布を知らなければならないということはあまりなくて、分布のテールの99.9%点だけを評価することが必要だとすると、テールの部分の評価は一般パレート分布を使って表せるのだから、損失額分布としてどの分布を使うかで迷わなくていいことになるというわけです。

GPD の理論

- GPD を利用した超過損失のモデル化の背後にあるのは次の結果

(Pickands-Balkema-de Haan の定理の「やや誇大解釈」)

オペリスク損失額 X がある分布クラスに属していれば、十分大きな閾値 u に対して、閾値 u に対する超過損失の条件付き分布が GPD で近似できる^a :

$$P(X - u \leq \ell | L > u) = \frac{P(X \leq \ell + u) - P(X \leq u)}{1 - P(X \leq u)} \approx G_{\xi, \beta}(\ell) \quad \ell > 0 \quad \text{for some } \xi, \beta.$$

^a正確には、「ある $\beta(u)$ が存在して

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \sup_{\ell \geq 0} |P(X - u \leq \ell | L > u) - G_{\xi, \beta(u)}(\ell)| = 0$$

であること」と、「 X の分布がある (それなりに広い) 分布クラスに属していること」が同値である、という主張。

- どの程度の u であれば良いか
 - 次スライドに示す標本平均超過関数の plot が「線形・増大」の傾向を示し始めるところ (McNeil et al.(2015) の Example 5.24 参照)
 - 慎重を期すためには、Kolmogorov-Smirnov 検定や Anderson-Darling 検定などの「適合度検定」を実施し、高損失データの経験分布と GPD の分布としての適合性をテストするなど

では、GPD による分布の裾の近似がなぜ保証されるかという点、Pickands-Balkema-de-Haan、発音が分かりませんが、たいてい、この3人が考えた定理に基づくということで紹介されています。

すみません、これもタイプがあります。一番上に「 L が u よりも大きいという条件の下で」とありますが、この L は、 X ですね。今、オペレーション損失額は X と表現しておりますので、 L ではなくて X です。

定理の内容を大まかに説明すると「確率変数 X が閾値である u を超えているときに、その超過分である $X-u$ 、ここで言うところの超過損失の条件付き分布は、適当に ξ と β を与えると一般パレート分布で近似できる」ということです。適当に ξ と β を与えると GPD で近似できるという点を拡大解釈して、我々はこの定理を使いやすくするための方便とすることになります。

条件付き分布は、条件付きではない形に直せます。条件付きでない形に書いたときに、 X が u 以下という確率については適当に決めてしまいます。超過損失というものはそもそも何%の確率で起こるものかについて、具体的に数字で与える必要がありますが、それは適当にルールを決めて自動的に与えてしまうことになります。

そうすると、問題は、 X が $\ell+u$ 以下になる確率として、無条件の分布が表されますけれども、単純に移項して整理すれば GPD の線形変換で書けてしまうわけですね。なので、その意味で裾の分布自体も、一般パレート分布で表現できるということになります。

GPD の性質

GPD $G_{\xi,\beta}(x)$ の性質 :

- $\xi > 0$ のとき、 $E[X^k] = \infty$ for $k \geq \frac{1}{\xi}$. つまり、 $\xi \geq 1$ のときは X の期待値 $E[X]$ も有限にならない
- $\xi < 1$ のとき、 $E[X] = \frac{\beta}{1-\xi}$
- X の分布自体が $G_{\xi,\beta}(x)$ であるとき、閾値 u に対する超過損失の分布もまた GPD であり、 $G_{\xi,\beta+\xi u}(x)$ と書ける。よって、平均超過関数 $e(u) := E[X - u | X > u]$ は閾値 u について線形な関数 $e(u) = \frac{\beta + \xi u}{1 - \xi}$ になる

- サンプル X_1, \dots, X_n (値について昇順に並んでいると仮定) に対して、標本平均超過関数 $e_n(v)$ を次で計算 :

$$e_n(v) := \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - v) \mathbf{1}_{\{X_i > v\}}}{\sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{X_i > v\}}}$$

- データが高い閾値について GPD モデルを支持するならば、 $(X_i, e_n(X_i))$ という点列プロットは、高い閾値のゾーンで「線形・増大」の傾向を示すはず → 閾値 u を選択する一つの目安 (P.10 のスライドの引用図も参照) ☆

ただ、これは、われわれが GPD をそのように使うことを正当化したいという方便で、実際には次のようなことが成り立っているというのが、その定理の本質です。

それは、閾値の u は無限大に飛ばすということです。定理の主張は、超過分布関数と一般パレート分布の差の絶対値の最大値を考えて、 u を無限大に飛ばすとその最大値はゼロに収束すると。要するに、一様収束すると言っているのですが、結局、近似できるという解釈は u を無限大まで飛ばして初めて言えることであって、途中で、 u を止めてその先の部分の超過分布関数が本当に GPD で近似できるかということ、そこは微妙なわけです。 u を十分大きくとれば、超過分布関数と GPD の差は全体としてゼロに近いことは言えるかもしれませんが、 u を適当なところで止めてもいいのではないかというのは想像の範囲で、本当に十分近いのかという点に関しては、この定理だけからは言えないので、本当は注意が必要なわけです。

ですから 10 億円が巨額損失の一つの目安だと思って、その 10 億円を閾値として本当に GPD で超過分布がきちんと近似できているかと言われても分からないわけです。ただ、そういう点には、本当はいけないことですが、目をつむってしまうところはあります。

いちおう閾値の u としてどのぐらいの水準がいいのかという目安も考えられていて、先ほど少しテキストから引用したプロットをお見せしたのですけれども、超過サンプルに対して $e(u)$ で表される標本平均超過関数と呼ばれるものを計算することになります。

ここでは v が閾値になっていて、この v の関数として超過部分に対する平均値を出すのですが、これが一般パレート分布を仮定したとき、 u というもとの閾値の 1 次関数になるという結果が知られています。ですので、標本平均超過関数に対して、閾値をいろいろと変化させて計算してプロットすることによって、線形的な関係が現れてくる変わり目が見つかれば、その変化するポイントを u として決めるというのが一つ参考になるかもしれないと言われています。

例えば、ここで見せている右の図なのですから、この図の中で、最初から線形的に見える部分もあり

ますが、超過がより大きいところで散布図の点が飛んだりしているようなところについて、直線を当てはめたときにフィットがよさそうだなと見えたら、その直線がフィットする部分の起点が u の候補として良さそうだという見方になります。

ロジカルには本当は逆なのですが、この辺で線形関係が見えるのでこの辺を閾値として選んでもよさそうと言っても、絶対的にそれでいいと保証されているものでもないで、いろいろ実験して u を見極められないと思います。あくまでも、先の定理のメッセージを曲解して使っているという注意の下で、一般パレート分布のモデルを使う必要があると思います。

本当は、統計的なことをもっといろいろと調べるべきなのですが、そうは言いながらもデータの量が少ないので、分布の適合度検定もいちおうやればできるのですけれども、なかなかそれで満足がいく結果が返ってくることもないのかなという気が今はしています。

本当の意味で超過損失を考えていく場合、理論にのっとれば、 u という超過閾値を高めに設定すれば、定理が示唆する近似が得られることが期待される一方で、超過閾値を高く見積もりすぎると、その閾値を超える損失のサンプルが少なくなってしまうです。ですので、GPD のパラメータの推定をすることを考えると。推定に必要なサンプルが 5~6 個というのでは、最尤法で推定しますというのは怪しすぎるわけです。

では、 u を低くすればいいかという、 u を下げれば、確かにその u を超過するサンプル数は増えるかもしれないませんが、本当は u を無限大に飛ばして成り立つ結果なのに、そこまで u の水準を妥協していいのかというところとますます微妙になっていきます。結局、トレードオフの話になりますし、そもそも定理は u を止めて成り立つという話ではないので、どうしても注意が必要になってきます。

とは言いながら、私もオペリスク計量の本を書いたり、あるいは論文をまとめたりするにあたっては、いろいろと u を動かしてみて、この辺りがいいのではないかという目星を付けていろいろ計算して、その結果リスク量としてもっともまともな値が出たのは u をこのように決めてみた場合であったという主観的な考察をしていました。

実際に u をどう決めたかはもう思い出せませんが、超過サンプル数がいくつくらい残るかといったあたりを基準にして決めて、これがベストではないかと説明した気がします。注意には言及しましたが、それよりも GPD を使っていると議論できることのメリットも大きいと思いますので、定理を拡大解釈して使うという話には目をつむるところはあるかと思っています。

さて、GPD の良い点は、割といろいろな統計量を計算しやすいということもあります。どという形状を決めるパラメータで決まってくるものが多くあります。

GPD における VaR と ES

- 1 件あたり損失額 X の (全体での) 分布関数を $F(x)$ とする。事前に固定された閾値 u 以上の x に関して、条件付き超過損失分布が GPD $G_{\xi,\beta}(x)$ で近似 (実際は置き換え) できるという仮定から、次が成り立つ:

$$\begin{aligned}(1 - F(x)) P(X > x) &= P(X > x, X > u) = P(X > u) P(X > x | X > u) \\ &= (1 - F(u)) (1 - P(X - u \leq x - u | X > u)) \\ &\approx (1 - F(u)) G_{\xi,\beta}(x - u) = (1 - F(u)) \left(1 + \frac{\xi \cdot (x - u)}{\beta}\right)^{-\frac{1}{\xi}}\end{aligned}$$

- 信頼水準 α が $\alpha \geq F(u)$ を満たすときの VaR および ES:

$$\begin{aligned}\text{VaR}_\alpha(X) &= u + \frac{\beta}{\xi} \left(\left(\frac{1 - \alpha}{1 - F(u)} \right)^{-\xi} - 1 \right) \\ \text{ES}_\alpha(X) &= \frac{\text{VaR}_\alpha(X)}{1 - \xi} + \frac{\beta - \xi u}{1 - \xi} \quad \text{ただし } \xi < 1\end{aligned}$$

- ES と VaR の比の漸近的性質は ξ で決まる:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1} \frac{\text{ES}_\alpha}{\text{VaR}_\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{1 - \xi} & 0 \leq \xi < 1 \\ 1 & \xi < 0 \end{cases}$$

GPD における VaR と ES

- GPD における VaR と ES の推定: 推定に利用可能な 1 件あたり損失額 X のサンプル数を n_{all} と仮定する。また、閾値 u を超過するサンプル数を $n(u)$ とする

- $1 - F(u) = P(X > u)$ は $\frac{n(u)}{n_{\text{all}}}$ で与える。
- GPD のパラメータ ξ, β の推定値を $\hat{\xi}, \hat{\beta}$ とする (推定法は後で検討)

- 前スライドから、信頼水準 α が $\alpha \geq 1 - \frac{n(u)}{n_{\text{all}}}$ を満たすときの VaR および ES の推定量は

$$\begin{aligned}\widehat{\text{VaR}}_\alpha(X) &= u + \frac{\hat{\beta}}{\hat{\xi}} \left(\left(\frac{(1 - \alpha)n_{\text{all}}}{n(u)} \right)^{-\hat{\xi}} - 1 \right) \\ \widehat{\text{ES}}_\alpha(X) &= \frac{\widehat{\text{VaR}}_\alpha(X)}{1 - \hat{\xi}} + \frac{\hat{\beta} - \hat{\xi}u}{1 - \hat{\xi}} \quad \text{ただし } \xi < 1\end{aligned}$$

GPD を決めてしまうと、バリュー・アット・リスクや期待ショートフォールと呼ばれるリスク量も、信頼水準として指定する確率と GPD のパラメータを使って表すことができます。式でいちおう表していますが、 β や ξ が決まればバリュー・アット・リスクは決まります、とうことだけ押さえておきましょう。それから、期待ショートフォールも ξ が 1 より小さいくて、期待値が存在する場合にはこのように計算できるということが割と自然に計算できてくるので、オペリスクに限らず信用リスクなどでも使える公式になっています。

データを用いて推定したパラメータを当てはめていくと、このような結果になるというのを示しておきます。

GPD 関数のパラメータ推定

GPD のパラメータ ξ, β をどのように推定するか？

- 超過サンプルが独立だと仮定できれば⁷…
 - 最尤法：サンプル数が多ければ最尤推定量は理論的に望ましい性質をもつ → **閾値超過のサンプルはそもそも少ない**
 - PWM 法 (Probability-Weighted Method of Moments) → 期待値すら存在しない場合 $\xi \geq 1$ の場合にも適用可能。小サンプルの場合に経験的に有効であるという報告もある
 - 確率変数 X の分布関数がパラメータ θ を含み、 $F(x; \theta)$ で表されるとする。下のような θ についての方程式 (パラメータの個数と同じ数の k の値を選んで) を解く方法：

$$E[X(1 - F(X; \theta))^k] = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j (1 - p_j)^k, \quad \text{for some } k = 0, 1, 2, \dots$$

ただし $\{x_j\}_{j=1, \dots, n}$ を超過サンプル、 p_j を x_j に対応する経験分布の値とする

- 期待値 $E[X(1 - F(X; \theta))^k]$ が解析的な式で表現できれば適用は容易 → **次スライド** で見ると GPD は適用可能

R の `evir` パッケージの `gpd` 関数では、どちらかの推定法をオプションで指定できる

⁷オベリスクや損害保険では、妥当な仮定とされることが多いかもしれない。金融市場データの場合は自己相関などに注意が必要。

(参考) GPD 関数のパラメータ推定

- 推定に使うことができる、閾値 u を超過する独立なサンプルを $x_1, \dots, x_{n(u)}$ とし、超過幅を $y_k := x_k - u$ とする
- このとき、条件付き超過分布関数に GPD を仮定したときの対数尤度関数は次で与えられる：

$$\begin{aligned} \log L(\xi, \beta; \{y_k\}_{k=1, \dots, n(u)}) &= \log \prod_{k=1}^{n(u)} \frac{dG(y_k; \xi, \beta)}{dx} \\ &= \sum_{k=1}^{n(u)} \log \left\{ \frac{1}{\beta} \left(1 + \frac{\xi y_k}{\beta} \right)^{-\left(1 + \frac{1}{\xi}\right)} \right\} \\ &= -n(u) \log \beta - \left(1 + \frac{1}{\xi} \right) \sum_{k=1}^{n(u)} \log \left(1 + \frac{\xi y_k}{\beta} \right). \end{aligned}$$

- GPD $G_{\xi, \beta}(x)$ に対して、PWM 法で必要となる重み付き期待値は次で与えられる：

$$E[X(1 - G(X; \xi, \beta))^k] = \frac{\beta}{(k+1-\xi)(k+1)} \quad \text{ただし } k+1 > \xi$$

GPD のパラメータが推定されれば、あとは信頼水準を 99% にするとかを決めれば、バリュエーション・アット・リスクなどは決まってしまう話ですけれども、では、パラメータをどう推定しますかということになります。パラメータ推定では、最尤法と呼ばれるものが使われることが多いです。

ただし、最尤法は、ご存じのとおり、大標本理論というか漸近理論というか、大サンプルを前提にしていますので、たくさんのサンプルがあれば最尤推定量はいい性質を持つということが言われていますが、そもそも巨額損失データは、サンプルが少なく、現実的には数個、あるいはよくても十数個ぐらいのサンプルしかなくて最尤法を使わなければいけないという局面が多いと思います。そのような状況で最尤法を用いて推

定されたものがどうなるかと。普通は最尤推定する際には、同時に標準誤差を計算して、その標準誤差で最尤推定値が統計上有意かどうかという確認もすることになります。

後で紹介しますが、R という統計ソフトに極値理論に基づく計算をするパッケージがありまして、その中のある関数を使うと簡単に GPD の最尤推定をしてくれます。ただ、残念ながら標準誤差が計算できるようにはなっていないで、統計的有意性のような話は出ません、推定値だけは出ますけれども。

一方で、モデルのモーメントとサンプルから計算されるモーメントを一致させるようにパラメータを決めるモーメント法を適用するのは、分散の存在などを仮定しにくい GPD に適用するのは苦しいので、Probability-Weighted Method of Moments (以下 PWM と書く) という、確率ウェイト・モーメント法と呼んだりもしますが、確率ウェイト付けで調整をして高次のモーメントも理論的に計算できるようにして、それらとサンプルから計算された確率ウェイト付けされた標本モーメントが一致するようなパラメータを未知数とする方程式を作って解きましょう、という推定法もあります。

式で書くとこのように X という変数の期待値ではなくて、 $1-F(X)$ というテールの部分の確率、つまり X というかなり大きな値以上の損失が発生するという小さい確率をかけて損失の大きさを緩和させて、その意味での平均や 2 次モーメントが存在するようにしましょうということです。サンプルを使っても計算でき、連立方程式が作れますので、求めるパラメータを方程式の解として得るという仕組みになります。

これも難しそうに見えるのですが、先ほど触れた R のパッケージを使うと、最尤法で推定するか PWM で推定するかを関数のオプションとして指定できますので、選択に応じてそれぞれの方法で推定してくれます。

それは R の `evir` というパッケージになります。その中に GPD というそのままの名前の関数があって、それを使うとデータから GPD の 2 つのパラメータを推定してくれます。そこで、PWM を使うか、あるいは最尤法を使うかオプションで選べます。

あと、超過水準 u などを決める必要がありますが、`threshold` という引数で具体的に与えることもできますし、`threshold` を具体的に与えるかわりに、全体の上位何個を超過サンプルとして扱うかという個数を数値で与えて推定することもできます。非常に使い勝手がいいので、リスク管理の仕事で GPD を推定する必要があるらば、一番簡単なやり方だろうと思います。

ちなみに `evir` は、「Extreme Value in R」の略だと思っています。以前 `evis` というものがありました。これは、S-Plus というソフトの S 言語に対応したものでした。実は、私が研究員時代には、その S-Plus 版のパッケージで計算しました。同じ人が作っていると思いますけれども、それが R のバージョンにただ移ったので `evir` という名前にしたのだと思います。このパッケージを R でダウンロードすればすぐに使えます。

R のパッケージに頼らなければ、最尤法をする場合に対数尤度関数を自分で定義しなければいけません、数値的最適化の関数の使い方を知っていれば自分でコードを書くのはそれほど難しくはないと思います。

それから、PWM で推定値を出す場合も、GPD の場合の理論式は与えられているので、連立方程式を作って解くコードを書くこともできるでしょう。

ダミーデータを用いた数値例

- (1 件あたりのオペリスク損失額のサンプルと見立てるための) 100 個のダミーデータを次のように作成：
 - まずワイブル分布に従う乱数を 100 個生成し昇順に並び替え
(R で “rweibull(100, shape = 0.1, scale = 100)” とした)
 - 次に、GPD($\xi = 1.8, \beta = 10^7$) の分位点 (それぞれ 1/11, 2/11, ..., 10/11 に対応) を (逆関数により) 10 個算出
 - 先に算出したワイブル乱数のうち上位 10 番目と 11 番目の平均を「閾値」と見なし、ワイブル乱数の上位 10 個を、「閾値 + GPD の 10 個の分位点」としたもので置き換える
 - 有効数字が 2 桁くらいになるように適当に数字を丸める。また、意図的に同じ金額のデータが含まれるように補正し、100 で割る

100 個のうちの上位 30 個のデータ (赤いのは上位 10 個, 単位は「万円」くらい?)

6, 6, 7, 8, 10, 10, 20, 20, 70, 100, 190, 250, 300,
480, 580, 600, 910, 950, 2500, 3000, 15000, 28000, 50000,
100000, 100000, 170000, 300000, 520000, 1100000, 4100000

ここでも簡単に R の evir パッケージを使った計算例をお見せします。実際に私はオペリスクのリアルデータを持っていないので、何となくそれらしいダミーデータを作ってみました。

全体としてはワイブル分布に従うのだけでも、上位 10 個は超過サンプルとしてその超過分布は GPD に従うという想定で生成して、それを無条件のサンプルに変換ということをしたりましたが、とりあえずワイブルで乱数を発生させました。

GPD の ξ はかなりファット・テールになる値として 1.8 を仮定して、ランダムではなくて、等分布にサンプリングするようにして数値を生成しました。

そのままだと、データの数値が細かい数字になりますが、何となくオペリスクの場合だと、損失額が結構大まかな数字になることが多いと思われましたので、1 円単位でオペリスクの損失額を計上するというよりは、それなりに大きな損失であれば 10 万とかあるいは数百何十億というようなオーダーの数字でデータが入ってくると考えて、最終的には数字を適当な有効数字に丸めました。もちろん、細かい端数まで出るような金額が計上されてくるケースも多いかもしれませんが、以前データ分析をしたときには、そもそも、まずデータを集めることが主眼で、それに対して損失額をどう割り当てるかという話は二の次だったので、損失額の値としては同じような金額、たとえば 10 万といった数字のサンプルが複数並んだりしていました。

今回のダミーデータでも、意図的に 10 万という数値のサンプル 2 つ最終的には入れてみました。

このようなタイ・データがあると、結構、最尤法は機能しないことが想像されます。しかし、オペリスクのデータとしては切りのいい数字の損失額データが多数存在することを想定できましたので、それを意図してこうした調整をして分析用のダミーデータを生成しました。

数値の単位は適当で「〇〇万円」として読んでもらえれば、何となくオペリスクのデータっぽいかという気がします。いちおう、上位 10 個ぐらいの損失額が巨額損失データのように捉えられるように細工しました。

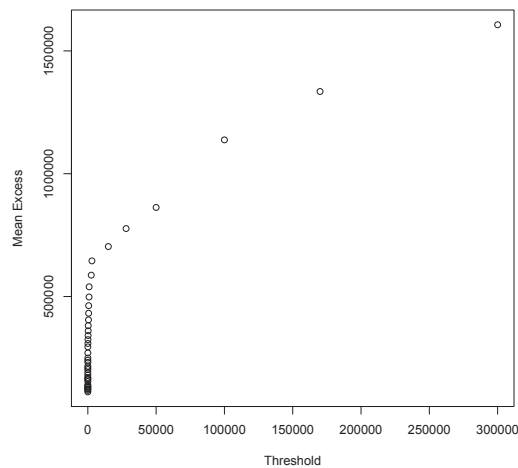


図: ダミーデータに対して、横軸の値を超過閾値としたときの標本平均超過関数の値（閾値を超過している損失額の超過分の平均）をプロットしたものの。

このようなダミーデータに対して、R の `evir` パッケージの関数を使って、GPD のパラメータを推定してみます。

先にダミーデータを散布図で見ると、作り方から上位部分が線形に並ぶようになるわけですが、1 万ぐらいの所で急に様子が変わって線形になっていて、その部分は GPD に従っていると見なしてもいいかなというような捉え方ができます。

フォントが変わっている部分を R で実行させれば推定できます。 `oploss` というのはダミーデータの損失額 100 個のデータが格納されたベクトルです。 `nextremses` では、上位 10 個を極値というか、閾値の超過損失と見なすことを指定しています。推定法 `method` はこの場合は `ml` つまり最尤法を選んでいることになります。

GPD 関数のパラメータ推定

R の `evir` パッケージの `gpd` 関数を用いて、GPD 関数のパラメータ ξ, β の推定：

- 100 個中上位 10 個を「極値」とした場合（カッコ内は（求めれば）標準誤差のはず）
 - 最尤法：`gpd(oploss, nextremes = 10, method = c("ml"))`

$$\hat{\xi} = 1.06 (NaN), \hat{\beta} = 1.50 \times 10^5 (NaN)$$

- PWM 法：`gpd(oploss, nextremes = 10, method = c("pwm"))`

$$\hat{\xi} = 0.69 (NaN), \hat{\beta} = 2.01 \times 10^5 (NaN)$$

- 閾値を $u = 9000$ （90 番目と 91 番目の損失額の平均）に設定した場合

- 最尤法：`gpd(oploss, threshold = 9000, method = c("ml"))`

$$\hat{\xi} = 1.16 (NaN), \hat{\beta} = 1.30 \times 10^5 (NaN)$$

- PWM 法：`gpd(oploss, threshold = 9000, method = c("pwm"))`

$$\hat{\xi} = 0.70 (NaN), \hat{\beta} = 1.91 \times 10^5 (NaN)$$

先ほどのサンプルに対する結果は上位 10 個の数値が使われて推定されたものになりますが、最尤法だと ξ が 1.06 と 1 を超えていますから、超過損失分布としての GPD は平均が存在しないようなファット・テールなものと推定されたこととなります。

一方、PWM だと ξ の推定値は 0.69 と 1 を下回っています。ただ、これは PWM の仕様上、実は平均を使って計算していますので、必ず 1 より小さい推定値しか出ないのです。最尤法には、その制約はありません。いずれにしても推定法が違くと推定結果がこれだけ違ってくるとするのは注意すべきことです。

リスク量の水準を大まかに決めているのは ξ というパラメータなので、その推定値の違いは、リスク量に大きなインパクトを与えることとなります。

あと、上位 10 個という指定ではなくて、9,000 といういずれにしても上位 10 個が選ばれるような閾値を `threshold` として与えてみました。これも、最尤法だと 1.16 という 1 を超えた推定値が出ますが、PWM だと 1 より小さい推定値が出てくるといった違いが見られます。

結果として超過損失のサンプルは上位 10 個が選ばれるようになっていますが、推定結果が微妙に違ってきます。上位 10 個と指定してしまうと、その 10 個が超過損失として選ばれるように勝手に閾値が決められてしまうのですが、そうではなくて、閾値を自分で与えると、超過損失の個数は同じでも推定値は大きく違うことがあることには注意すべきかと思います。

あと、カッコの中は推定したパラメータの標準誤差が得られるはずですが、ヘッセ行列という標準誤差を計算するためのアウトプット行列が「計算できません」となってしまう、そこから標準誤差を計算することはできないためにそのような表示になっています。

裾部分の推定

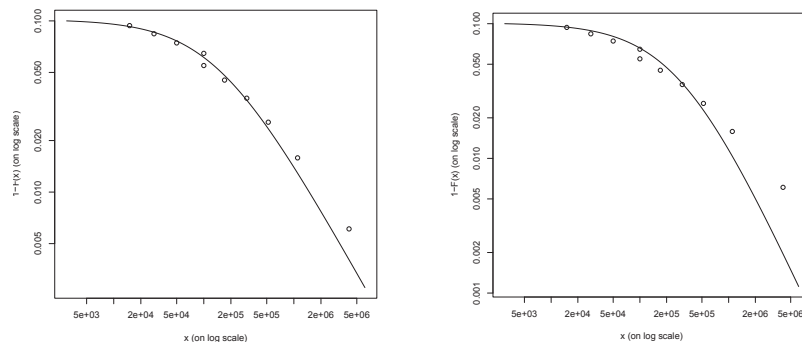


図: 100 個中上位 10 個を「極値」とした場合の推定値で、 $1 - G_{\xi, \beta}(x)$ のグラフを両対数目盛で描いたもの、左が最尤法、右が PWM 法によるもの

左側が最尤法を使った場合です。右が PWM で、図の右に行くほど損失が大きいサンプルになりますが、単に推定した分布とのフィッティングだけで見ると、最尤法の方が合っているかなという気は少しします。確率ウェイト・モーメント法の推定結果は、裾の離れが特に大きく見えます。これだけでは何とも言えませんけれども、結果を視覚的に見ると最尤法の方がましには少し見えます。もちろん、もともと ξ を 1.8 と仮定して疑似データを作っていますから、1 を超える推定値が得られてしかるべきなのですが、そうはいつでも、実際にリアルデータからの推定で平均が無限大になってしまう分布というのはどうなのかということもありますから、その意味では、1 より小さい値で推定された方が本当はメイク・センスする気もするのですが……。

要するに、金額のデータには当然事実上の上限はあるはずですから、それを超えてしまうような損失を想定して平均が存在しないようなモデルが果たしてリスク評価のうえで妥当かどうかということは議論の余地があるだろうと思います。

また、先ほどバリュー・アット・リスクや期待ショートフォールと呼ばれるリスク尺度の計算式をお見せしましたが、R の `evir` パッケージにはそうしたリスク尺度を計算してくれる関数もあります。 `riskmeasure` という関数に、先ほどの一般パレート分布のパラメータを推定した GPD 関数の結果そのものを放り込んで、信頼水準を与えればこのように計算してくれます。

前ページの結果をリスク尺度で表すと…

R の evir パッケージの riskmeasures 関数を用いて、VaR と ES を算出する：

表: 100 個中上位 10 個を「極値」とした場合

信頼水準	最尤法 ($\xi = 1.06$)		PWM ($\xi = 0.69$)	
	VaR	ES	VaR	ES
0.9	3000	-2700208	3000	648300
0.95	156855.9	-5462378	181268.8	1221656
0.99	1481822.0	-29249449	181268.8	4288730
0.999	18293730.6	-331073064	6666889.0	22080977

※ 最尤法の場合は $\xi > 1$ なので、ES 計算式が本来は適用できないのに適用されている

最尤法を使った場合の期待ショートフォールの結果がマイナスの値となってしまいますが、 ξ が 1 より大きいとそもそも期待ショートフォールの式は使えないはずですが、無理に適用しているためです。それ以外の部分は、それなりにリスクとしてもっともらしい数字が出ている気がします。

99.9% のバリュー・アット・リスクを見ると、最尤法の方が 1 桁、PWM に比べて大きいものになっていますが、それでも PWM の水準でリスクとしては低過ぎるかということ、もともと用意したデータセットから見れば、十分に高い数字が出ていると言えますので、最尤法を使えば、一応高い数字は出るのだけでも、そこまで必要かということは、議論の余地があるかと思います。

超過数を変化させたときの ξ の推定値の変化

表: 100 個中で「極値」とするサンプル数を 5~20 で変化させた場合の ξ の推定値

超過数 ($n(u)$)	対応する超過閾値	最尤法	PWM
5	100000	0.62	0.50
6	50000	0.89	0.61
7	50000	0.89	0.61
8	28000	0.94	0.64
9	15000	1.02	0.67
10	3000	1.06	0.69
11	2500	1.29	0.72
12	950	1.55	0.75
13	910	2.13	0.77
14	600	2.83	0.79
15	580	3.66	0.81
16	480	3.87	0.82
17	300	3.62	0.83
18	250	3.76	0.84
19	190	3.76	0.85
20	100	3.62	0.86

あと、超過サンプル数が変わってくると、当然、推定値にも影響がありますので、nexceedance という超過サンプルとして認識するサンプルの個数を与えるパラメータを5個から20個まで変えて推定してみました。

超過サンプル数が増えるということは、超過水準を決める閾値も下がっているということになりますが、結果的に最尤法とPWMの水準の違いはあっても、超過数が増えるほど ξ といテールの厚みを決めるパラメータの推定値は大きくなっています。

超過数を変化させたときの ξ の推定値の変化

表: 100個中で「閾値」を5000~125000で変化させた場合の ξ の推定値

超過閾値 (u)	対応する超過数	最尤法	PWM
5000	10	1.09	0.69
15000	9	1.02	0.67
25000	9	1.17	0.69
35000	8	1.01	0.65
45000	8	1.14	0.67
55000	7	0.93	0.62
65000	7	1.03	0.64
75000	7	1.16	0.65
85000	7	1.38	0.67
95000	7	2.03	0.68
105000	5	0.64	0.51
115000	5	0.68	0.52
125000	5	0.73	0.53

先ほどは超過サンプル数を変えていきましたが、閾値の方を変えてみると、また少し違ったものが見えてきます。5,000という閾値から徐々に上げていって推定した結果になります。徐々に閾値を上げていくと、超過サンプル数が10個だったものが1万5,000まで大きくすると、1個減って9個しか残らなくなる、そのように見ていくわけです。当然ですが、閾値を大きくしていくと、次第に超過サンプル数は減ってきます。

注意してほしいことは、超過数が減るそのタイミングを見てみると、最尤法の方が顕著なのですが、超過サンプルが減るところでいったん ξ の推定値はそれまでより少し小さくなります。特に、超過サンプル数が8個から7個に減る45,000という水準から55,000に移るところでは1.14だった推定値、つまりそれなりにファット・テールだったものが急に1を割る水準まで落ち込んでいます。そこからさらに超過基準を上げていくと、超過数は7というまま維持されていますが、その間は超過閾値を上げることで ξ の推定値は大きくなっています。今度は10万という2つのサンプルが同時に超過サンプルから外れるところでは、2まで達していた ξ の推定値が0.64まで急激に下がるということが見られます。要するに、超過サンプル数の問題というよりは、閾値をどのように設定するかが重要で、超過サンプル数が変化する境目では、前後で ξ の推定値が大きく違ってくるということに注意が必要に思います。

三菱信託銀行が当初収集したオペリスクの損失データを分析したときにも、実は同じような分析をしていました。超過水準を決める閾値を動かしていくと、少しずつ推定値が大きくなっていくのですが、サンプルの欠落、つまり超過サンプル数が減るところで推定値がいったん急に下がって、その後はまた欠落が起こる

まで推定値が上がっていくといったことが確認されました。

ですので、超過損失の水準を決めるという話は簡単なことではなくて、何個残すかという話でも、例えば全体の7個を超過損失サンプルとして取り出すとしても、55,000に閾値を決めるとξは0.93という推定値になりますし、95,000に設定すると、2.03というように、かなり分厚いファット・テールな結果になってしまいますから、超過閾値をどこに設定するかというのは非常にセンシティブな問題です。

ですから、このような問題を考えると、損失額分布としてGPDを使えばよいという問題がクリアされるとしても、結局、そのパラメータを推定するためのサンプル数が現状ではあまり多くないので、最尤法で推定するとこれだけ結果にばらつきが出てくるということに注意が必要です。

その意味で言うと、まだPWMの結果の方が、全体的に閾値uの変化に対してロバストに見える結果が出ています。私がまだ研究員時代に出した結論は、PWMで推定した結果を用いるのが、リスク水準としては最も合っているのではないかというものでした。データのサンプル数の確保がもちろん重要だけれども、とりあえずオペリスク量を算出しなければならない状況であれば、EVTを用いないナイーブな方法もいろいろ試してみましたが、PWMでパラメータ推定して得た数値が一番納得できるとコメントしました。

オペリスクの本当の専門家の方はどう考えるか分かりませんが、今でも私が実際にオペリスクのコンサルをもし求められたら、データをとりあえず見てはみますが、おそらく、PWM法で推定した結果が、最も腑に落ちるものになりそうな気がします。

数値例についての考察

- GPDのパラメータ推定値は、推定法・閾値・**サンプル数**に大きく左右される
 - 最尤法の方がPWM法よりもξの推定値が大きくなる傾向。理論上期待値が存在しなくなるξ ≥ 1となることもしばしば
 - PWM法では、(暗に平均が存在することを仮定しているので) ξ < 1となる
 - 超過データ閾値の水準が低い(超過データ数が多い)ほど、ξの推定値は大きくなる傾向にある。
 - ただし、超過データ数に変化がない範囲では、閾値の水準が高いほどξの推定値は大きくなる傾向にあり、あるサンプルを閾値が超えて大きくなり、超過データ数が減ると、そのタイミングでξの推定値は下方に比較的大きく「ジャンプする」
- もともとはξ = 1.8(> 1)としたGPDからサンプリングした数値をベースに損失ダミーデータを作ったが、最尤法でもその水準の推定値を得ることはできなかった
- 現実にはξ < 1を満たして推定されるPWM法でも十分保守的なリスク値は算出されていると考えられる
- 結局はデータの量と質の問題とも言える(ずっと言われ続けている永遠の課題…)

ということで、数値例についての考察ですが、当然、推定方法が最尤法かPWMかによっても結果が違いますし、閾値をどうするかということも結果に影響します。また、元のサンプル数が100個ある中で10個選ぶことと、1,000個ある中で何十個選ぶこととは全然違いますから、元のオペリスクの損失データが充実していなければ、安定したリスク量を算出するのは難しいということは確認できます。

他にもいろいろ書きましたが、オペリスクの専門家や研究者は皆、データの量と質の問題が、改善されな

ければいけないと口をそろえます。オペリスクのデータの質や量が改善されていくことを前提として、そのときに使えるリスク計測方法を提案するという研究も多いかと思います。

最近、オペリスクに関するデータ・コンソーシアムが国際的なレベルでできていますので、国際的なレベルでのオペリスクのパブリックデータを使って研究したドキュメントも出てきているようです。その中でいろいろとこのような手法を試されたりしているようですが、すみませんが、私はまだフォローできていません。ただ、そのようなデータベースを研究者も含めて共有しましょう、そして計量方法を考えましょうという動きに注目していくことは必要だと思います。

より発展的なモデル：自己励起 POT モデル

- $N = N([0, T] \times [u, \infty))$ をある期間 $[0, T]$ 中に閾値 u を超えるオペリスクが発生する件数とする
- $k = 0, 1, 2, \dots$ に対して $P(N = k) = e^{-\Lambda(T)} \frac{\Lambda(T)^k}{k!}$ であるとする⁸。ただし、

$$\Lambda(T) = \int_0^T \int_u^\infty \lambda(s, x) dx ds$$

を満たす強度 $\lambda(s, x)$ が存在するとする

- 次のような強度 $\lambda^*(s, x)$ を仮定するモデルを自己励起 (self-exciting) POT モデルという：

$$\lambda^*(s, x) = \frac{\tau + \psi v^*(s)}{\beta + \kappa v^*(s)} \left(1 + \xi \frac{x - u}{\beta + \kappa v^*(s)} \right)^{-\frac{1}{\xi} - 1} \quad \kappa \geq 0, \beta > 0, \tau > 0, \psi \geq 0,$$

ただし、 $v^*(s)$ として (例えば)

$$v^*(s) = \sum_{j: 0 < T_j < s} e^{-\gamma(s - T_j) + \delta(X_j - u)}, \quad \gamma > 0, \delta > 0$$

という形を考える

⁸Poisson 点過程とか Poisson 彷徨測度とか言うものが理論の土台にある。

自己励起 POT モデル

- 時点 t において閾値 u に対する条件付き超過分布は以下のように GPD で表される⁹

$$P(X - u > x | X > u) = \frac{\int_{u+x}^\infty \lambda^*(t, y) dy}{\int_u^\infty \lambda^*(t, y) dy} = 1 - G_{\xi, \beta + \alpha v^*(t)}(x)$$

- パラメータ (全体を Θ と表す) の推定は、以下の設定の下で最尤法で行われる：
 - n 日間の日次のオペリスク損失データ X_1, \dots, X_n が所与とする (損失ゼロの場合も含まれる)
 - u を超過閾値とする。 n 日間で N_u 個の超過損失データがあり、それらを $\{(T_j, Y_j) : j = 1, \dots, N_u\}$ とする。ただし、 T_j は j 番目の超過損失が観測された日、 $Y_j := X_j - u$ は j 番目の超過額とする
 - 尤度関数は以下のように表される

$$L(\Theta | \text{data}) = \exp\left(-n\tau - \psi \int_0^n v^*(s) ds\right) \prod_{j=1}^{N_u} \lambda^*(T_j, Y_j)$$

⁹ $\alpha = 0$ を仮定する場合は、GPD のパラメータは時間に依存せず $G_{\xi, \beta}(x)$ という形で考えることになる。

自己励起 POT モデル

- 時系列的に見て、超過損失の発生にクラスター（密集）が見られる場合には、適用してみる価値があるかもしれな
- 時点 t までの条件を所与としたときの信頼水準 α の条件付き VaR $\widehat{\text{VaR}}_{\alpha}^t$ や条件付き ES $\widehat{\text{ES}}_{\alpha}^t$ は、過去の超過損失発生時点と超過損失の大きさの履歴に依存した形で表現される

$$\widehat{\text{VaR}}_{\alpha}^t = u + \frac{\hat{\beta} + \hat{\kappa}\hat{v}^*(t+)}{\hat{\xi}} \left(\left(\frac{(1-\alpha)N}{\hat{\tau} + \hat{\psi}\hat{v}^*(t+)} \right)^{-\hat{\xi}} - 1 \right)$$

$$\widehat{\text{ES}}_{\alpha}^t = \frac{\widehat{\text{VaR}}_{\alpha}^t}{1-\hat{\xi}} + \frac{\hat{\beta} + \hat{\kappa}\hat{v}^*(t+) - \hat{\xi}u}{1-\hat{\xi}} \quad \text{ただし } \hat{\xi} < 1$$

最後に、極値理論の中でもう少し発展的なものということで、詳しくは申し上げませんが、先ほども言った、ある期間の件数だけを考えるのではなくて、いつ発生するかというタイミングも気にしたいときに、このような強度モデルを当てはめてはどうかと。

時間にも依存するし、外部のマクロ変数にも依存させることもできるし、オペリスクのイベントが発生したら、また近いうちにオペリスクのイベントが発生しやすくなるという self-exciting な構造も入れた方がいいかもしれないということを考えていくと、self-exciting な構造プラス、Peak-Over-Threshold という、ある閾値を超えるとという意味で POT と表しますが、極値理論で見られる別の概念を用いて強度を記述するモデルも提案されています。

実際にこうしたモデルでオペリスクを計量するという話は、まだ聞いたことがないのですが、モデルとしてはここまで進化する可能性はあるということですね。ですので、データが集まってくれば、多くのパラメータを含むこうしたモデルの推定などをしていくことも可能になるかと思います。

この部分はインフォメーションとしてテキストをそのまま書き抜いたようなものですが、デイリーでオペリスクの損失データを集めるようなことを前提にしていますから、それは究極の形とも言えます。毎日毎日、今日のオペリスクはいくらでしたというようなことを銀行や会社で発表できるレベルにならないと使えないようなモデルかもしれませんけれども、将来的には、そのようなことまで含めてモデルが用意はされているということですね。

このモデルは、オペリスクよりもまず市場リスクの評価で実験してみたら面白いのかなと思いますし、信用リスク、あとは損害の保険などでも応用できるでしょうし、もしかしたら生命保険やアクチュアリアルなところにもっと応用できる話になるかもしれません。まだ少し先の話になるかもしれませんが、一応、このようなモデルもあるということを知っておいてもよいと思います。

私は規制の動向の最前線は分かりませんので、このような計量モデルの高度化の部分を追いかけていくことはしています。いちおう私が今のところ把握している限りのお話はできたかなと思います。

早口で申し訳ありませんでしたけれども、私からは以上です。