講　演

金融リスクの計量化　一期間モデル

東京大学名誉教授　楠岡　成雄

日本アクチュアリー会 CERA 研修講演

2016 年 12 月 3 日　日本アクチュアリー会大会議室

楠岡　楠岡でございます。今日は「金融リスクの計量化」というタイトルで話をいたします。何回か似たような話をアクチュアリー会を含めいろいろな所でしゃべっておりますので、「またか」と思っている方もおられるかもしれませんが、今日は特に「リスクの計量化」に関して、一期間モデルに関してかなり詳しく話をさせていただきます。

「リスクの計量化」という問題は非常に古くからあるのですが、理論的にはっきりと最初に言ったのは、1950 年代のマルコビッツのポートフォリオ理論が最初のように思います。その時には収益率の平均と分散をもって、ポートフォリオの良しあしを考え、収益率の平均が高いものがよいが、分散が高いものはリスクが高いという理解で、リスクを分散という形でとらえたということが最初です。

その後、保険理論の中でさまざまな考えが現れました。

リスクの計量化

Markowitz ポートフォリオ理論
収益率の 平均 と 分散

保険
Bühlman (1970), Gerber (1980)

Premium calculation priciple
S : accumulated claims of risk
a) Expected value principle : $(1+\lambda)E[S]$
b) Standard deviation principle : $E[S]+\alpha\sigma[S]$
c) Variance principle : $E[S]+\beta\sigma^2[S]$
d) Principle of zero utility: P : $E[u(P-S)]=u(0)$

1

ハンス・ビュールマンの有名な本“Mathematical Methods of Risk Theory”や、ガーバーの本などの中では、リスクの計量化の方法を、Premium calculation principle と呼んでいますが、保険会社が保険全体を考えた時に、当然、保険金の請求があるわけですけれども、請求の総額（accumulated claims of risk）

Sを確率変数と考え、それがどれぐらいのリスク量となるかということを考えて、リスク相当分を純保険料に上乗せすべきだということを述べており、そのリスク相当分を込めた保険料Pの計算法をいくつか提案しております。

その中の一つは、Expected value principle といって、請求総額Sの期待値に（1+ λ）を掛けることで、期待値に比例した部分を上乗せするという考え方です。それに対して、Standard deviation principle は請求総額Sの標準偏差 σ にコンスタント α を掛けて上乗せすべきだという考え方。Variance principle はSの分散に対して、それをある一定倍を上乗せすべきだという考え方。それから最後に Principle of zero utility というものは、効用関数uというものを設けて、それが、保険料マイナス請求総額である P-S の期待効用がちょうど何もなかったときの効用 u(0) と同じになるようにPを定めるという方法です。このようにいろいろなプレミアムPの計算方法がビュールマンの本などに書かれております。

ただ、計算方法の例が色々と述べられてるけれども、理論的になぜそうあるべきかということは十分には議論されておりません。私の知り合いで「Standard deviation principle は分かるけれども Variance principle は理解不能だ」と言った人がおります。なぜ分散にコンスタント倍したものを加えるのか、平均と標準偏差ならば分かるのだけれどもということで、その根拠が述べられていないので理解しようがないのです。

実務においてどういう方法がよいかということを本当は知りたいのだと思いますが、今日の話もそうなのですけれども、こうするのがいいという話ではなくて、どのようなことが考えられるかということをまず、まとめていこうというのが今日のお話です。

リスクの計量化に関する議論が 70 年代に保険学の中から出てきましたが、一方で、金融規制というものの中で、リスクの計量化と概念が出てきました。これはバーゼルⅠだⅡだⅢだとかいうものです。現在のバーゼル金融規制における考え方は、リスクに備えて十分な資本を積むことで対処せよというものです。これがいい考え方であるかどうか、議論があります。しかし、国際的に規制として出てきたものですので、この考えを認めざるを得ません。では積むべき資本はいくらであるか、どう決めるのかが問題となります。この考え方は保険学で現れたリスクプレミアムの考え方に近いものでもあります。

金融規制

ファイナンスとアクチュアリー学の融合　（１９９０年代後半～）

「リスク管理」

金融リスクの計量化の考え方: 本来は色々とあり得る

Markowitz : ポートフォリオ理論　Mean-Variance

Risk premium, 金融規制

⇒ 必要な資本という考え方

⇒ リスク尺度 (Measure of risk, Risk Measure)

数学的な理論研究は進んでいる

2

例えば、生命保険を例に考えれば、責任準備金というものは、平均値に対応するもので、これは最低限必要な資産なわけで、これは絶対になければいけない。けれども、それに上乗せしてどのぐらい積むべきかということが問題です。ですから、先ほどのビュールマンやガーバーたちの議論は、初期段階の研究ではありますが、リスクの計量化の研究といってよく、リスクの計量化の研究は、ファイナンスより前にアクチュアリーの方で現われたと言えます。

ファイナンスというものは、皆さんもご存じだと思いますけれども、マルコビッツなどと違って、ブラックショールズ以後のファイナンスの理論は、リスクの完全ヘッジということを目標としています。すなわちリスクを市場の売買を通じて完全に消すという考え方で出発しています。ですから、ファイナンスというものは元々このようなリスクの計量化の話とは少し違っていて、要するにリスクを完全に消してしまうわけですから、リスクはないはずなのですね。ファイナンスの理論が本当にそのとおりに動くならば。

それが 1990 年代後半になると、それは例えば市場での証券取引で本当にリスクが完全に消せるのかということが、議論になり始めます。私は 1990 年代にファイナンスの研究を始めまして、最初は金融リスクの完全ヘッジに関する研究をいろいろとやっていたのですけれども、1990 年後半辺りから、リスクの完全ヘッジは実際には難しく、リスクをある程度抱え込むことも考慮して、それなりに制御しようという考え方が現れました。

アクチュアリーでも、保険会社、特に生命保険の会社においては、死亡によるリスクそのものよりも、資産運用のリスク管理が問題になり、金融リスクの方が重要になってきました。ですから、ファイナンスに対する関心がアクチュアリーにも現れてきました。ですから、ファイナンスとアクチュアリーは当初別の学問であったのですが、融合した研究が現れるようになりました。

リスクプレミアム、という元々の保険から起こった話や、金融規制の話は、必要資本という考え方になります。ですから、金融リスクを抱えている時に、どれだけの資本がそれに対して必要かという問題になりま

すが、それがリスク尺度（Measure of risk, Risk Measure）と呼ばれるものになりました。リスク尺度の研究者は日本にはあまり多くいないのですけれども、ヨーロッパでは非常に多くいます。私自身は最近このリスク尺度の研究はこの 2、3 年全然やっていないのですけれども、最近の研究は、実務から離れて変な方向に進んでいるように感じています。数学的論文として高度な数学が使われるが、あまり現実には役に立たない論文がたくさん出てきたように思います。特に若手の研究者は論文を多く書かないといけませんから、素早く書けるテーマを論文に選ぶので、そのようなことが起きるのですね。時間がたてば、また、ちゃんとした方向に戻ってくるだろうとは思いますが。

最近の研究の主流は、多期間におけるリスクはどう考えるべきかという研究で、そのような論文が多いのですけれども。今日は一期間のことについてのみ話をいたします。

リスク尺度

基本的な考え方を明らかにする　（問題の単純化）

１期間モデル：時刻　現在、将来の２つ　(金利ゼロとする）

これから起きうるシナリオの全体：既知

将来における会社資産状況は　シナリオが与えられれば　一意に決まる

（それほど　シナリオの種類は豊富である）

シナリオの集合を Ω とおく

Ω を事象の集合と考えれば

将来における会社資産状況 ＝ 資産 - 負債　は　確率変数となる

これを X とおく　$X : \Omega \to \mathbf{R}$

（「政策」を変えれば X も変化する）

3

リスク尺度というものをどのように考えるか、実はいろいろな考え方があるのですが、ここで問題を単純にするために一期間モデルで考えていきます。多期間モデルというものもこれを伸ばしていくということになりますが、現在のところ、実務的にはとても多期間モデルが使えるような状況ではありません。一期間モデルでもどう考えるべきか議論が分かれているのが現状です。ですから、一期間モデル、すなわち、現在と将来の二つの時点のみがあるという設定で考えます。

金利をどのようにするかが問題となりますが、今日の話では金利をゼロとします。実は最近、金利のリスクも考慮したリスクの話があります。これは多期間のリスクを考えたときに現れる話です。ただその話は非常に美しいけれども、実際には解を計算することが難しい数学的な問題の理論的解を用いて、ただ定義しているだけのようにも見えますので、その話は忘れて、金利はゼロとして考えていきます。金利が一定であれば、将来の価値を現時点の価値に引き戻す時に、金利で割引けばいいだけですから、金利がゼロでない場合も若干の修正を行えばよいので問題はありません。

次に、ベースになる考え方としては、これから起き得る森羅万象のシナリオをすべて考える。今は一期間

で考えていますので、現在と将来までにどのようなシナリオが起きるか。それによって金融資産の状況が変化していくかを見たいので、金融資産に影響を及ぼす経済的なシナリオなり、市場のマーケットシナリオ、すべてのシナリオを全部考える。そのようなシナリオ全体はもう分かっているという設定で考えていきます。「想定外」ということは一切ないということです。

ある人から聞いた話ですが、彼は会社で住宅ローンの貸付をやったらいいのではないかと提案したそうですが、ありとあらゆる考えにくい可能性を持ち出して大反対した人たちがいたそうです。その人たちに対して「いや、あなたが言っているのは、まるで東京湾からゴジラが出現して火を噴いて家を焼きまくる可能性も考えるべきということだ。」と反論したそうです。要するにそのようなシナリオは、さすがに考慮し始めたらどうにもならないシナリオだということです。ただ、ゴジラが出てきたら、「想定外」ということになります。リスク尺度の理論を実務で使う時、考えるシナリオというものは、それほどめちゃくちゃなシナリオは考えないということになりますが、理論上は「想定外」はないことになっており、ここにも実務に使う時に理論との差に注意する必要があります。

現在から将来までにおけるシナリオにより将来の金融状況が一通りに決まることが理論での前提となります。逆に言うと、シナリオは細かく作り上げられ、すべてのシナリオを網羅していることが必要です。ですからシナリオの種類というものはものすごく豊富だということになります。シナリオの全体を、Ωという集合で表すことにします。

シナリオを事象（event）と読み替えることにすると、Ωというものは事象全体の集合だと考えることができ、これは確率論における基礎集合と同じだということになる。それから将来における会社の資産状況、それを今は単純に「資産マイナス負債」というように考えますと、これはシナリオ（事象）を決めれば値が決まるので、数学的にはΩ上定義された関数、すなわち確率変数ということになります。

もちろん現在の会社のポートフォリオを変えれば、将来のシナリオに応じた資産状況も変化するので、X は政策（policy）に依存して決まる確率変数です。

将来における会社資産状況が X で与えられる時
必要な資本 $\rho(X)$
リスク尺度：確率変数 X に対して、実数 $\rho(X)$ を対応させるもの
考慮すべき確率変数の集合： $\mathcal{X}$ 　とおく
$\rho : \mathcal{X} \to \mathbf{R}$ 　写像

どのようなリスク尺度を選ぶべきか？
満たすべき性質、好ましい性質などを列挙し、考えていく

公理主義的アプローチ

用語は人により違う！
ここでは用語・記法は Föllmer-Knispel に従う

4

将来の資産状況 X が決まれば必要な資本が決まるはずですので、その意味で、リスク尺度というものは、確率変数 X に対して、必要資本の額を対応させる関数 ρ と考えることができます。数学的に正確に述べると、まず考慮すべき確率変数全体の集合 X というものを考える。そうすると、ρ というものは、この X の元となる確率変数に対して実数を与える関数なのです。X が非常に大きい（関数の集合）ので、数学では汎関数という言葉を使ったりするのですが、要するに X 上の関数にすぎません、ですからリスク尺度はこのように、X に属する確率変数に対して実数を対応させるという関数と定義されますが、このように定義してしまって本当によいのかという問題は存在します。しかし、現在のところ、リスク尺度の研究者の多くがこの定義を用いておりますので、ここでもこの定義を認めて話を進めます。

では、どのようなリスク尺度を選ぶべきか。これが一番重要な問題となります。ただ単に確率変数 X に値を返すだけの関数は山のようにものがあるわけですので、役に立つというか、良いと思われるリスク尺度は何かを考えるべきだということになります。しかし何が良いリスク尺度であるかを数学的に決定することはできないので、リスク尺度が満たすべき性質や好ましい性質を列挙していき、その中のいくつかの性質を与えた時に、どのようなものが存在するかを調べるということがリスク尺度研究の中心となりました。これはいわゆる公理主義的なアプローチでありまして、経済学等ではよく行われるやり方です。

具体的な例を一つ与え「これがいいよ」と言っても、他の人が別の例を与えて「いや、こっちの方がいいんじゃないか」というようなやり方では議論が発散してしまいます。様々な望ましいと思う性質を列挙しておいて、もし一つリスク尺度を選んだ時に、それがどのような望ましい性質を持ち、どのような望ましい性質を持たないかということを知ることで、そのリスク尺度を理解しようという考え方です。今日の話は参考文献 Foellmer-Knispel［5］での用語・記号を用いております。

確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ の下で　確率変数を考える

$\mathcal{X}$ ： Ω 上の有界な確率変数全体とする

[必須条件]

（単調性）[monotonicity]

$X, Y \in \mathcal{X}$, $X \leqq Y$ が確率 1 で成立 $\Rightarrow \rho(X) \geqq \rho(Y)$

広義のリスク尺度：仮定するのはこれのみ

（キャッシュ不変性）[cash invariance]

$X \in \mathcal{X}$, $m \in \mathbf{R} \Rightarrow \rho(X+m) = \rho(X) - m$

◇　金利はゼロと考えている

金利がゼロでない場合は金利での割引等で対応できる（と考えている）

5

まず、ここで確率空間（Ω, *F*, P）を考えます。確率をまだ与える必要はないのですけれども、今日のお話の都合上、確率 P というのが一つ与えられているとします。ですから、われわれは何かあるシナリオの集合を考えた時に、それがどのぐらいの確率で起こるかを一応知っているというように考えます。確率変数の集合 *X* として複雑な空間を考えることもできますが、今日は単に有界な確率変数全体とします。これにも異論があるかもしれません。というのは、例えば、正規分布をもつ確率変数は有界ではないから扱えないのではないかというのですけれども、まず有界な確率変数のみに限定して様々な性質について調べておいて、よいと思われる具体的なリスク尺度は、有界でないものも扱えるかもしれないというふうに考えていこうということです。

ここまでの議論は、数学に入るまでの前置きでわかりにくい話で申し訳なかったのですが、ここからは、単純な話になっていきます。リスク尺度 ρ というものがあった時に、ρ がどのような性質を満たすべきであるかということを見ていきます。

まず、(単調性)です。確率変数 X, Y、これはどちらも将来の会社の資産状況を表すのですが、(単調性)とは、どのようなシナリオの下でも X より Y の方がよいのであれば、X に対して備えるべき資本 ρ（X）は Y に対して備えるべき資本 ρ（Y）より大きい、もしくは等しくなるという性質です。必ず X より Y の方がいいのに、X より Y の方が積むべき資本が多いということは理解に苦しむわけですので、この（単調性）の性質は必須の性質です。実は広義のリスク尺度という言葉では、単調性しか仮定しません。

もう一つは、（キャッシュ不変性）という性質です。X が確率変数、M が実数だとします。そうすると、X+M、すなわち将来の資産状況が X+M になる場合と X となる場合を比べてみると、必ず X+M の方が、X よりも M だけ多いわけですね。その時には、積むべき資本は、M 少なくて済むという性質です。これは今、金利をゼロとしているので、当然成り立つべき性質です。

（正規化条件）[normalization] $\rho(0) = 0$

単調性、キャッシュ不変性、(　正規化条件　) を満たすものを

（貨幣的）リスク尺度 [monetary measure of risk] と呼ぶ

その他の考えられている条件

（凸性）[convexity]

$X, Y \in \mathcal{X}$, $0 \leqq \lambda \leqq 1 \Rightarrow$

$$\rho(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leqq \lambda\rho(X) + (1-\lambda)\rho(Y)$$

（凸性）を満たすと ($Y = 0$ とおけば)

$$\rho(\lambda X) \leqq \lambda\rho(X), \qquad 0 \leqq \lambda \leqq 1$$
$$\rho(\lambda X) \geqq \lambda\rho(X), \qquad \lambda \geqq 1$$

が成立する。

6

最後に（正規化条件）という性質ですが、これは数学的に扱いが煩雑になるので、あまり仮定しないことも多いのですけれども。将来の資産状況がどのようなシナリオの下でもゼロ、つまり負債と資産が等しいのであれば、積むべき資本はゼロであるという性質です。これも当然成り立つべき性質といえます。

今日は、(単調性)、(キャッシュ不変性)、(正規化条件)、この三つを満たすものをリスク尺度と呼ぶことにいたします。この三つの条件というものは、ほとんど何も言っていないのに等しいような条件ですが、必ず満たさなければならないと思われる条件ということになります。

もっと強い条件を考えましょう。その一つが（凸性）というものです。今、X と Y が確率変数、λは 0 ≦ λ ≦ 1 を満たす実数とします。そして、実際には考えにくいことですけれども、将来の資産の状況がλX+(1－λ)Y になっているとします。このとき資産状況がλX+(1－λ)Y であるときに積むべき資本ρ（λX+(1－λ)Y）と、資産状況が X であるときに積むべき資本ρ(X）と、資産状況が Y であるときに積むべき資本ρ(Y）の間にスライドにあるような不等式の関係があるという性質です。これが（凸性）です。この条件に何の意味があるのかということは、非常に微妙な問題ですけれども、このような条件を課すということが一つの考え方です。(凸性）を満たす時には、例えば Y を 0 と置くとスライドにあるように、λが 1 より大きい実数であれば、λρ(X)≦ρ（λX）となることがわかります。これは将来の資産状況が倍になれば、積むべき資本は倍以上になることを意味し慎重な態度を示す性質といえるかもしれません。

（正同次性）[positive homogeneity]

$X \in \mathcal{X}, \lambda \geqq 0 \Rightarrow \rho(\lambda X) = \lambda \rho(X)$

（劣加法性）[subadditivity]

$X, Y \in \mathcal{X} \Rightarrow \rho(X+Y) \leqq \rho(X) + \rho(Y)$

（凸性）＋（正同次性）　$\Longleftrightarrow$　（劣加法性）＋（正同次性）

[証明]

(⇒)（凸性）＋（正同次性）があれば

$$\rho(X+Y) = 2\rho(\frac{1}{2}X + \frac{1}{2}Y) \leqq 2(\frac{1}{2}\rho(X) + \frac{1}{2}\rho(Y))$$

(⇒)（劣加法性）＋（正同次性）　があれば

$$\rho(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leqq \rho(\lambda X) + \rho((1-\lambda)Y) = \lambda\rho(X) + (1-\lambda)\rho(Y)$$

7

次に（正同次性）です。（凸性）を持てば、λが 1 より大きい実数であれば、λρ(X)≦ρ(λX）という不等式が成り立ったのですが、それが等号になるという性質です。すなわち、規模を全部倍にしたら積むべき資本も倍になるといった性質です。

それから、（劣加法性）です。これは何かというと、X と Y が将来の資産状況を表す確率変数としたとき、X＋Y に対して積むべき資本は、それぞれに積むべき資本の和以下であるという性質です。

すぐに分かるのですが、（凸性）と（正同次性）の両方を仮定するということと、（劣加法性）と（正同次性）の両方を仮定するということは同値になります。証明は簡単でスライドに書いておきました。

（凸リスク尺度）[convex measure of risk]

（凸性）を持つリスク尺度

Heath, Ku, Föllmer-Scheid, . . .

（コヒーレントなリスク尺度）[coherent measure of risk]

（凸性）、（正同次性）を持つリスク尺度

Artzner-Delbaen-Eber-Heath

8

Heath などの人たちは（凸性）を持つリスク尺度が好ましいのではないかと考えました。（凸性）を持つリスク尺度をここでは凸リスク尺度と呼ぶことにいたします。

また、（凸性）と（正同次性）を持つリスク尺度を Artzner-Delbaen-Eber-Heath はコヒーレントなリスク尺度と呼び、望ましいものと考えました。ここでもその呼び名を使います。上で述べたように、コヒーレントなリスク尺度は、（劣加法性）と（正同次性）を持つリスク尺度と定義してもよいわけです。なお、（正同次性）を付け加えているという点で、凸リスク尺度の方がコヒーレントなリスク尺度より広い概念になっています。

（劣加法性）が望ましいという考え方について述べておきます。例えば今、全社的なリスク管理をするということは会社が大きい時には非常に難しいので、部門ごとにリスク管理をする。その時に、二つ部門に分けて、第 1 部門では X の収益が上がって、第 2 部門で Y の収益が上がった。それに対して、積むべき資本は、それぞれの部門では ρ（X），ρ（Y）となるわけですが、全社的に積むべき資本はどうかという時に、ρ（X）+ ρ（Y）を超えてしまうと、全社的にもう一度調整し直す必要がでてきます。ですから、（劣加法性）が成り立つことが望ましいという考え方です。ただ、積むべき資本をできるだけ小さくしたいのであれば再計算の必要がありますが。

((*P*-) 法則不変性）[(*P*-) law-invariance)

$X, Y \in \mathcal{X}$ X, Y の P の下での確率分布が等しい $\Rightarrow \rho(X) = \rho(Y)$

(コモノトニック加法性）[comonotonic additivity]

$X, Y \in \mathcal{X}$ さらに、確率変数 Z, 単調非減少関数 f, g が存在して $X = f(Z), Y = g(Z)$ と表される

$\Rightarrow$

$\rho(X + Y) = \rho(X) + \rho(Y)$

9

いろいろな概念が出てきて申し訳ありませんが、もう少し述べさせていただきます。まず、（法則不変性）です。今、X と Y が確率変数とし、与えられた確率測度 P の下で X と Y の確率分布が等しい時、ρ（X）= ρ（Y）が成り立つという性質のことを言います。これまでの性質と違い、確率測度 P に依存した性質なので、厳密を期すため（P - 法則不変性）と呼ぶこともあります。

もう一つは、（コモノトニック加法性）です。これはどのようなことかというと、今、X と Y という二つの確率変数に対して、確率変数 Z と単調非減少関数 f, g があって、X = f(Z), Y = g(Z) と書ける、要するに、Ωの元ω ω’を二つ取ってきた時、X(ω) より X(ω’) の方が大きい時には、必ず Y(ω) より Y(ω’) の

方が大きい、すなわちXの悪い時はYも悪くなるという場合は、ρ(X+Y)とρ(X)+ρ(Y)は等しいという性質です。

アクチュアリーの方々にはこのような性質があることが望ましいと考える方が多いようです。結局、何に備えるかということを考えると、毎年XとYの大小関係は常にすべてのシナリオについて維持されているので、状況が悪いシナリオというのは、X, Y, X+Yに共通しているので、X+Yに対して備えるべき資本はX, Yそれぞれに備えるべき資本の和になるのは当然と思われている方が多いようです。

性質をいくつも列挙しましたから、頭がこんがらがってよく分からないということになってしまいました。これからは具体的な例で、もう一回、性質についてチェックしていこうと思います。

数学的性質

(1) ρ_1, ρ_2 リスク尺度、$\lambda \in (0,1)$
$\Rightarrow$ 凸結合 $\rho_3(X) = \lambda\rho_1(X) + (1-\lambda)\rho_2(X)$ リスク尺度

凸性、正同次性、法則不変性、コモノトニック加法性　は伝搬する

(2) ρ_1, ρ_2 リスク尺度
$\Rightarrow$ max 操作 $\rho_4(X) = \max\{\rho_1(X), \rho_2(X)\}$　リスク尺度

凸性、正同次性、法則不変性は伝搬する
(コモノトニック加法性は伝搬しない)

10

ただ、その前に、一つだけ注意をしておきます。ρ_1とρ_2という2つのリスク尺度に対して、新たなリスク尺度としρ_3とρ_4をスライドのように、凸結合とmax操作によりそれぞれ決めます。すなわち、$0 \leqq \lambda \leqq 1$を満たす実数λを定め、ρ_3は$\rho_3 = \lambda\rho_1 + (1-\lambda)\rho_2$により定める。また、$\rho_4$は$\rho_4 = \max\{\rho_1, \rho_2\}$により定めます。この時、$\rho_3$と$\rho_4$もまたリスク尺度となることが簡単にわかります。すなわち、ρ_1とρ_2が(単調性)、(キャッシュ不変性)、(正規化条件)を満たせば、ρ_3とρ_4も満たすことが簡単にわかります。

では、その他の性質は伝搬するかということを考えますと、凸結合ρ_3については、ρ_1とρ_2が(凸性)、(正同次性)、(法則不変性)、(コモノトニック加法性)のそれぞれの性質を持てばρ_3も同じ性質を持つことが簡単にわかります。max操作ρ_4については、ρ_1とρ_2が(凸性)、(正同次性)、(法則不変性)のそれぞれの性質を持てばρ_4も同じ性質を持つことが簡単にわかります。一方、ρ_1とρ_2が(コモノトニック加法性)を持ってもρ_4が(コモノトニック加法性)を持たない例があります。

これらの考察より、特に、ρ_1とρ_2とが共にコヒーレントなリスク尺度であれば、ρ_3とρ_4もまたコヒーレントなリスク尺度となります。すなわち、コヒーレントなリスク尺度は凸結合やmax操作で閉じています。また、凸リスク尺度も凸結合やmax操作で閉じています。

いくつかのリスク尺度の例

例 1　[Value at Risk]

X 確率変数 に対して

X λ- quantile , $0 < \lambda < 1$

$$P(X \leqq q) \geqq \lambda \quad \text{かつ} \quad P(X < q) \leqq \lambda \tag{1}$$

を満たす実数 q

$$q_X^-(\lambda) = \inf\{x;\ P(X \leqq x) \geqq \lambda\} \tag{2}$$

$$q_X^+(\lambda) = \inf\{x;\ P(X \leqq x) > \lambda\} \tag{3}$$

とおくと

q が X の λ- quantile $\iff$ $q_X^-(\lambda) \leqq q \leqq q_X^+(\lambda)$

11

では、いくつかのリスク尺度の例を見ていきましょう。Value at Risk は、皆さんよくご存じということですが、Value at Risk の定義は結構、複雑です。λ - quantile の定義は式（1）で与えられますが、一般には一意に決まりません。

$$VaR_\lambda(X) = -q_X^+(\lambda) = q_{-X}^-(1-\lambda) \tag{4}$$

$$= \inf\{m;\ P(X + m < 0) \leqq \lambda\} \tag{5}$$

通常の 95%VaR は ここでは $VaR_{0.05}(X)$ となる

VaR_λ はリスク尺度で、

正同次性、法則不変性、コモノトニック加法性を持つが、

凸性を持たない

12

ここでは VaR$_\lambda$(X) は式（4）で与えられますが、−X の一番小さい（1−λ)- quantile になります。普通 95% バリュー・アット・リスクという場合は λ＝0.05 の VaR$_\lambda$となります。Value at Risk はリスク尺度であり、（正同次性)、（法則不変性）を持つことが簡単に確かめられます。しかし、（凸性）は持ちません。

例 2 [Average Value at Risk, Conditional Tail Expectation, Tail Value at Risk, Expected Shortfall]

$0 < \lambda \leqq 1$ 確率変数 X に対して

$$AVaR_\lambda(X) = \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda VaR_t(X)dt \tag{6}$$

$$= \frac{1}{\lambda}\inf_{z\in\mathbf{R}}\{E[(z-X)\vee 0] - \lambda z\} \tag{7}$$

$$AVaR_\lambda(X) = \sup\{E^Q[-X];\ Q \in \mathcal{M}_1(P),\ \frac{dQ}{dP} \leqq \frac{1}{\lambda}\} \tag{8}$$

また $AVaR_0(X)$ を

$$AVaR_0(X) = \inf\{m \in \mathbf{R};\ P(X \leqq -m) = 0\} \tag{9}$$

と定める

13

それから、Average Value at Risk、これはコヒーレントなリスク尺度の中で一番典型的なものです。アクチュアリーの世界では Conditional Tail Expectation と呼ばれていますが、Tail Value at Risk, Expected Shortfall とも呼ばれています。ファイナンスの世界では CVaR とも呼ばれています。実は、数学的にすっきりした定義は難しく、式（6)、(7)、(8）といった定義の方法があります。これらはすべて同値な定義なのですが、それを示すことはちょっとした演習問題となります。また、λ＝0 の Average Value at Risk も（−X の上限）により定義します。この時、AVaR$_\lambda$(X) は λ について連続となります。

$AVaR_\lambda$ はコヒ-レントリスク尺度で
法則不変性、コモノトニック加法性を持つ

文献によっては

$$CTE_\lambda(X) = E[-X|X < VaR_\lambda(X)] \tag{10}$$

と定義し、$AVaR_\lambda$ と区別している。

$$P(X < VaR_\lambda(X)) = \lambda \tag{11}$$

$\Rightarrow$

$$AVaR_\lambda(X) = CTE_\lambda(X) \tag{12}$$

通常は $AVaR_\lambda$ を CTE と呼んでいることも多い。

14

式（6)、(7)、(8）の 3 つが同値な定義であることがわかれば、式（8）よりコヒーレントであることがわかり、式（6）または（7）より法則不変であることがわかります。また、（コモノトニック加法性）を持つことも、結構面倒な議論が必要ですが、(6）より示せます。最後に 1 つ注意を示すと、文献によっては CTE（Conditional Tail Expectation）を式（10）で定義し Average Value at Risk と区別しているものもあります。式（10）は直感的にわかりやすい定義ですが、AVaR とずれが生じます。ただし、式（11）が成り立てば式（12）のように両者は一致します。通常、式（11）はほぼ成り立つので、両者を区別しないで議論されていることが多いのですが、CTE を式（10）で定義してしまうと、コヒーレントではなくなります。ですから、数学的には、式（6)、(7)、(8）のようなややこしい定義の方が理にかなっているのです。

例 3 [short fall risk, zero utility risk premium]

$u : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ：真に単調増大な連続関数

$$\rho_u(X) = \inf\{m \in \mathbf{R};\ E[u(X+m)] \geqq u(0)\} \tag{13}$$

$$E[u(X + \rho_u(X))] = u(0) \tag{14}$$

ρ_u はリスク尺度、法則不変

u が凹関数であれば、ρ_u は凸性を持つ

$$u(x) = u_\gamma = \frac{1 - \exp(-\gamma x)}{\gamma}, \qquad \gamma > 0 \tag{15}$$

の時、

$$\rho_u(X) = \frac{1}{\gamma} \log E[\exp(-\gamma X)] \tag{16}$$

15

次に、short fall risk, これは最初のスライドの Principle of zero utility と同じ考え方です。u を真に単調増大な連続関数とし、これを効用関数と考えた時、式（13）で ρ_u(X) を定めれば式（14）のように X＋ρ_u(X) の期待効用が、ゼロの効用 u(0) と一致するので、この量をリスク量としようというものです。ρ_u はリスク尺度となり、法則不変性を満たします。もし、u が凹関数であれば、ρ_u は凸性を持ちます。しかし、正同次性は、u が線形関数のような時にのみ持ち、その時 ρ_u(X) は－X の期待値になってしまいます。

最も扱いやすくなるのは u が式（15）のような指数関数で与えられる場合で、この時、ρ_u(X) は式（16）のようなわかりやすい形となります。

例 4 (Divergence Risk measure)

$g : [0, \infty) \to (-\infty, \infty]$ 下半連続凸関数 $\quad g(1) = 0$

$Q \in \mathcal{M}_1(P)$ に対して

$$D_g(Q|P) = E[g(\frac{dQ}{dP})], \qquad Q \in \mathcal{M}_1(P) \tag{17}$$

と定める

$$\rho_g(X) = \sup_{Q \in \mathcal{M}_1(P)} \{E^Q[-X] - D_g(Q|P)\} \tag{18}$$

$g^*(y) = \sup_{x>0}\{xy - g(x)\}$, $y \in \mathbf{R}$, (Fenchel-Legendre 変換)

$$\rho_g(X) = \inf_{y \in \mathbf{R}} \{E[g^*(y - X)] - y\} \tag{19}$$

が成立

ρ_g は凸リスク尺度、法則不変

16

次は Divergence Risk measure。ここから先は、多分聞いたことのないリスク尺度だと思いますが、ひょっとすると将来、何かの関係で現れるかも知れないということで、紹介していきたいと思います。

例えば、ストレステストというようなことを考えた時には、なかなか起こりにくいけれどもあり得るシナリオというものを取ってきます。数学的には考えている確率測度 P に対して別の確率測度 Q を考えているということに大体相当します。その確率測度 Q の下での－X の期待値 E^{Q}［－X］が、確率が Q に変化した時の最低のリスク量となります。これが広義のリスクシナリオの下でのリスクということになります。すべての Q に対してこれら期待値を計算し、その上限を取れば、どのような時にも安全ということになりますが、それは－X の上限と一致し、全くリスクを取らないということに等しくなります。そこで、確率 Q 毎にその期待値そのものではなく少しおまけをして E^{Q}［－X］－D(Q) をもってリスクと考え、すべての Q に対してその上限を取り（ただしここでは D(P)＝ 0 とします）その値をρ(X) とすることにすれば、実はρは凸リスク尺度となります。また、逆に（若干の条件が必要ですが）すべての凸リスク尺度は D(Q) をうまく設定すれば、そのように与えられることが知られています（正確な命題は最後のスライドを見てください）。このことから、D(Q) を意味のあるように決めようというのが、Divergence Risk measure の考え方です。

さて、g は区間［0, ∞］上で定義された、値としては∞を許し、g(1)＝0 を満たす下半連続凸関数とします。といっても頭に入ってこないかも知れませんが、典型的な例は g(x)＝x log x です。D_g(Q|P) を式（17）で与えます。ただし、ここで dQ/dP はラドンニコディムの密度関数です。そして、ρ_g を式（18）で定義します。この時､式（19）を示すことができ、ρ_g が凸リスク尺度で法則不変であることがわかります。

例 5 (Entropic risk measure)

$$H(Q|P) = E[(\frac{dQ}{dP})\log(\frac{dQ}{dP})], \qquad Q \in \mathcal{M}_1(P) \tag{20}$$

とおく (エントロピー)

$H(Q|P) = D_g(Q|P), \quad g(x) = x \log x, \, x \geqq 0$

$H(Q|P)$ Kullback-Libler 情報量　統計学と相性がよい？？

例 5-1 凸エントロピーリスク尺度　$\gamma > 0$

$$e_\gamma(X) = \sup_{Q \in \mathcal{M}_1(P)} \{E^Q[-X] - \frac{1}{\gamma} H(Q|P)\} \tag{21}$$

$$e_\gamma(X) = \frac{1}{\gamma} \log E[\exp(-\gamma X)] \tag{22}$$

が成立　（例 3, 4 にも入っている）　法則不変

17

次は Entropic risk measure です。H(Q|P) を式（20）で定義すると H(Q|P) はエントロピーで、統計学では Kullback-Libler 情報量と呼ばれるものとなります。これは Divergence Risk measure のところで述べた、g(x)＝x log x の時の D_g(Q|P) でもあります。このエントロピーは意味がありそうなので、これを用いてリスク尺度を作ろうというアイデアです。

まず、凸エントロピーリスク尺度 e_γ。これは先の Divergence Risk measure の特別な場合で、g(x)＝γ^{-1} x log x の時の ρ_g と同じです。この時、式（22）が成立し、式（16）と同じものが現れます。このリスク尺度は様々な表現を持ち、リスク尺度の研究でしばしばあらわれる、構造が豊かなものです。

確率変数列 $X_1, \ldots, X_n$ が独立であれば

$$e_\gamma(X_1 + \cdots + X_n) = e_\gamma(X_1) + \cdots + e_\gamma(X_n) \tag{23}$$

$$dQ_{X,\gamma} = \frac{e^{-\gamma X}}{E[e^{-\gamma X}]} dP \tag{24}$$

とおくと

$$H(Q_{X,\gamma}|P) = \gamma \frac{E[-Xe^{-\gamma X}}{E[e^{-\gamma X}]} - \log E[e^{-\gamma X}] \tag{25}$$

$$= \gamma E^{Q_{X,\gamma}}[-X] - \gamma e_\gamma(X) \tag{26}$$

$$e_\gamma(X) = E^{Q_{X,\gamma}}[-X] - \frac{1}{\gamma} H(Q_{X,\gamma}|P) \tag{27}$$

18

ただし、これをリスク尺度にするのは本当にいいのかということは、かなり問題があります。例えば今、独立な確率変数 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ に対して、式（23）のように和のリスクがリスクの和となってしまい、独立なリスクを集めることでリスクが軽減できるという保険の考え方とは相容れません。

さて話を進める前に、いくつかの数学的な注意をしたいと思います。今、確率変数 X 及び非負な数 γ を与えた時、式（24）で新たな確率測度 $Q_{X,\gamma}$ を定めます。ここで、$Q_{X,\gamma}$ は確率変数 X に依存していることに注意してください。この時、式（25）、(26)、(27) が成立します。式（21）と式（27）を比較すると式（21）の上限が Q＝$Q_{X,\gamma}$ で実現されていることがわかります。

例 5-2 コヒーレントエントロピーリスク尺度　$c > 0$ に対して

$$\rho_c(X) = \sup\{E^Q[-X];\ Q \in \mathcal{M}_1(P),\ H(Q|P) \leqq c\} \tag{28}$$

$$= \inf_{\gamma>0}\{\frac{c}{\gamma} + e_\gamma(X)\} \tag{29}$$

コヒーレントリスク尺度、法則不変

[証明] $\frac{c}{\gamma} + e_\gamma(X) = \frac{c}{\gamma} + \sup\{E^Q[-X] - \frac{1}{\gamma}H(Q|P)\}$

$$\geqq \frac{c}{\gamma} + E^Q[-X] - \frac{1}{\gamma}H(Q|P) = E^Q[-X] + \frac{1}{\gamma}(c - H(Q|P))$$

$$\inf_{\gamma>0}\{\frac{c}{\gamma} + e_\gamma(X)\} \geqq E^Q[-X] + \inf_{\gamma>0}\frac{1}{\gamma}(c - H(Q|P))$$

$$= E^Q[-X] - \infty 1_{(c,\infty)}(H(Q|P))$$

19

さて上記の凸エントロピーリスク尺度には少し問題があり、できれば正同次性を持つコヒーレントなリスク尺度をエントロピーから作れないかという考えから見つけ出されたのが、コヒーレント・エントロピー・リスク尺度です。式（28）がその定義で、式（29）が成立するので、これは法則不変性を持つコヒーレントなリスク尺度となります。式（29）を導く証明を、このスライドと次のスライドにわたりますが、与えておきました。

よって

$$\inf_{\gamma>0}\{\frac{c}{\gamma} + e_\gamma(X)\} \geqq \rho_c(X)$$

$H(Q_{X,\gamma}|P)$ は γ について連続

X が定数でなければ

$$\lim_{\gamma\downarrow 0} H(Q_{X,\gamma}|P) = 0, \quad \lim_{\gamma\downarrow\infty} H(Q_{X,\gamma}|P) = \infty$$

となる

$c > 0$ に対して $\exists\gamma_c > 0$ $H(Q_{X,\gamma_c}|P) = c$

$$E^{Q_{X,\gamma_c}}[-X] = \frac{c}{\gamma_c} + e_{\gamma_c}(X)$$

20

証明を見ていくと式（29）の上限を導くものはやはり Q＝$Q_{X,\gamma}$ です（c と γ の関係はあまり構成的ではありませんが)。

Esscher principle

$\gamma > 0$,

$$H(X) = \frac{E[Xe^{\gamma X}]}{E[e^{\gamma X}]} \tag{30}$$

$$H(X) = E^{Q_{-X,\gamma}}[-X] \tag{31}$$

$c = H(Q_{-X,\gamma})$ とおくと

$$H(X) = \rho_c(-X) \tag{32}$$

近年、アクチュアリー学で現れた

risk premium の考え方（Essher principle, Orlicz premium principle, Wang's premium principle)

とリスク尺度の関連の研究も進んでいる

21

さて、保険の理論の中で Esscher principle という概念があり、式（30）で与えられます。この Esscher principle の H は γ を固定して考える限り、リスク尺度ではありません。しかし、式（31）や（32）の関係があり、Esscher principle は何かしらリスク尺度と関係があるように見えます。アクチュアリー学の中で現れた発想を取り入れて保険の観点から見ればどのようなリスク尺度が望ましいのかという研究も行われ始めています。

法則不変な凸リスク尺度の特徴付け

$\mathcal{M}_1([0,1])$ $[0,1]$ 上の確率測度全体とする

命題 1　ρ が法則不変な凸リスク尺度ならば

$\alpha : \mathcal{M}_1([0,1]) \to [0,\infty]$ で

$$\rho(X) = \sup\{\int_{[0,1]} AVaR_\lambda(X)\mu(dx) - \alpha(\mu);\ \mu \in \mathcal{M}_1([0,1])\}, \qquad X \in \mathcal{X}$$

$$\inf\{\alpha(\mu);\ \mu \in \mathcal{M}_1([0,1])\} = 0$$

となるものが存在する

22

実は今まで述べてきた具体的なリスク尺度はすべて法則不変性を持ちます。法則不変性を持つ凸リスク尺度はすべて AVaR $_\lambda$（Average Value at Risk）から構成できます。それが命題 1 です。

命題 2　ρ が法則不変なコヒーレントリスク尺度ならば $\mathcal{M}_1([0,1])$ の空でない部分集合 $\mathcal{M}$ で

$$\rho(X) = \sup\{\int_{[0,1]} AVaR_\lambda(X)\mu(dx);\ \mu \in \mathcal{M}\}, \qquad X \in \mathcal{X}$$

となるものが存在する

命題 3　ρ が法則不変、コモノトーン加法性を持つコヒーレントリスク尺度ならば $\mu \in \mathcal{M}_1([0,1])$ で

$$\rho(X) = \int_{[0,1]} AVaR_\lambda(X)\mu(dx), \qquad X \in \mathcal{X}$$

となるものが存在する

distortion と呼ばれる概念と密接な関係がある

23

また、命題 1 より当然のことながら法則不変性を持つコヒーレントリスク尺度もすべて $AVaR_\lambda$ から構成できます。それが命題 2 です。ここで、述べていることはすべての法則不変性を持つコヒーレントリスク尺度はすべて凸結合と max 操作（及びその極限を取ること）で $AVaR_\lambda$ より作ることができるということです。また、コモノトーン加法性、法則不変性を持つコヒーレントなリスク尺度も $AVaR_\lambda$ から凸結合と極限操作だけから構成できます（命題 3)。

リスク尺度の関係

命題 4　$\lambda \in (0,1)$ に対して

$$VaR_\lambda(X) \leqq AVaR_\lambda(X) \leqq \rho_c(X)$$

ただし、$c = \log \lambda$

命題 5　$\lambda \in (0,1)$ とする。ρ が法則不変なコヒーレントリスク尺度であり

$$VaR_\lambda(X) \leqq \rho(X), \qquad X \in \mathcal{X}$$

ならば

$$AVaR_\lambda(X) \leqq \rho(X), \qquad X \in \mathcal{X}$$

24

正同次性をもつ VaR_λ, $AVaR_\lambda$, コヒーレント・エントロピー・リスクの間には命題 4 のような関係があります。また、命題 5 のようなことも言えます。命題 5 より、VaR_λ に代わる法則則不変なコヒーレントなリスク尺度を用いたいが、VaR_λ を下回らないようにしたいと考えるならば、$AVaR_\lambda$ を用いるべきであるということがわかります。

Beyond law-invariance

実際的なリスク尺度のほとんどは法則不変

（統計学的には確率分布しかわからない（塚原））

確率変数 X の分布が本当にわかるのか？

P が本当にわかるのか？

（考え方）

(1) 統計的推測で生ずる誤差もリスクとして考慮すべき

(2) Ω :すべてのシナリオ、　確率変数：シナリオの関数

元々はストレステストもリスク尺度で考慮されている

この点を深めるべき

(2) の視点の研究は進んでいない

25

さて、今まで述べてきた具体的な例はすべて法則不変性を持つものでした。すべてのシナリオを考えることは実際に不可能で、そんなに複雑なリスク尺度を現実には使えません。一方、過去データから統計的な法則ならば推測できるとすると、法則不変性を持つリスク尺度であれば、その値は X の分布から決めることができるので、非常に使い易いことになります。

しかし、X の分布が本当に過去データに基づく統計推測からわかるのかという問題があります。これについて、いくつかの考え方がありますが、2 つだけ述べます。

（1）過去データから X の分布に関する情報は得られる。ただし、統計的推測で得られた分布は必ずしも真の分布ではないので、そのまま推測された分布でリスク量を計算すると、推測された分布と真の分布が違うというリスクが無視されていることになる。この推測の誤りのリスクも込めてリスク量を計算すべきである。

（2）リスク尺度にストレステストのような考え方も入れていくべきである。過去データに基づく統計的推測という統計学的な考え方だけではなく、確率変数がシナリオの関数であるという本来の発想に立ち返って問題を見直すべきである。

このような考え方が現れてきた背景にはリーマンショックに対してこれまでのリスク管理手法が十分に対応できなかったことがあります。

(1) の視点の研究

今までの議論では $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ が与えられたものとして

P を知っているとしてきた

$\mathcal{P}$ を $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の確率測度全体の集合とする。

$Q \in \mathcal{P}$, $\lambda \in (0,1]$ に対して

$$VaR_{Q,\lambda}(X) = \inf\{m;\ Q(X+m<0) \leqq \lambda\} \qquad X \in \mathcal{X} \tag{33}$$

$$AVaR_{Q,\lambda}(X) = \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda VaR_{Q,t}(X)dt \qquad X \in \mathcal{X} \tag{34}$$

$$AVaR_{Q,0}(X) = \inf\{m \in \mathbf{R};\ Q(X \leqq -m) = 0\} \qquad X \in \mathcal{X} \tag{35}$$

と定める

26

(1) の立場に立って出てきた考え方を説明します。これまでの議論を認めて､真の確率測度が Q である時、先と同様に、確率変数 X の Q の下での分布に基づいて Value at Risk や Average Value at Risk が計算されます。それを $\mathrm{VaR}_{Q,\lambda}$(X), $\mathrm{AVaR}_{Q,\lambda}$(X) とします（式（33)、(34)、(35))。命題 5 に基づき、区間［0, 1］上の確率測度を 1 つ定め、式（36）で $\rho_{Q,\lambda}$(X) を定めます。$\rho_{Q,\lambda}$ はコモノトーン加法性を持ち Q - 法則不変性を持つコヒーレントなリスク尺度となります。

さらに $\mu \in \mathcal{M}_1([0,1])$ に対して

$$\rho_{Q,\mu}(X) = \int_{[0,1]} AVaR_{Q,\lambda}(X)\mu(dx) \qquad X \in \mathcal{X} \tag{36}$$

と定める

$\rho_{Q,\mu}$ $Q \in \mathcal{P}$ はすべてコヒーレントリスク尺度で Q-法則不変

$\mathcal{P}$ の空でない部分集合 $\mathcal{M}$ に対して

$$\rho(X) = \sup_{Q \in \mathcal{P}} \rho_{Q,\mu}(X) \tag{37}$$

とおけば、ρ はコヒーレントリスク尺度

27

今、統計的推測により真の確率測度Pを特定はできないけれども、集合$\mathcal{P}$には属していると考えられるならば、式（37）でρ（X）を定めれば、本来のリスク量$\rho_{P,\lambda}$(X）以上であるので、ρをリスク尺度として取ればよいというアイデアです。この考え方はネイマンの区間推定を連想させます。

今、定義したρはコヒーレントコモノトーン加法性を持ちますが、法則不変性は持ちません。しかし、命題3を根拠に法則不変性を考慮して作られています。

今述べたことは、Hans Foellmerによるものです。ただ、真の分布が$\mathcal{P}$に属していないリスクが考慮されていません。実はコヒーレントなリスク尺度に（すなわち正同次性に）固執すると、凸結合とmax操作以外はできないので、式（37）のようにsupを取る以外の方法はありません。$\mathcal{P}$を確率測度全体に取るとρ（X）は－Xの上限となってしまい、リスクを全く取らないということになります。

今後は統計的推測を絡ませたリスク尺度の研究が活発になると思いますが、まだあまり進んでいないというのが実情です。

以上で私の話を終わらせて頂きます。

司会　楠岡先生、ありがとうございます。本当ですと、質問の時間を取りたいところでございますけれども、ちょっと時間の方も押しておりますので、本日は質問の方はなしということでご了承いただきたいと思います。では、もう一度、楠岡先生に拍手をお願いいたします。

凸リスク尺度の特徴付け

$\mathcal{M}_1(P)$ ： $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の P に絶対連続な確率測度の全体

命題 6　ρ が凸リスク尺度で、「Fatou 性」をもてば

$\alpha : \mathcal{M}_1(P) \to [0, \infty]$ が存在して

$$\rho(X) = \sup_{Q \in \mathcal{M}_1(P)} (E^Q[-X] - \alpha(Q))$$

$$\inf_{Q \in \mathcal{M}_1(P)} \alpha(Q) = 0$$

が成立する

(逆も成立する)

28

[1] Buhlmann, Hans, Mathematical Methods in Risk Theory, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Springer, 1970

[2] Denui, Michel, Jan Dhaene, Marc Goovaerts, and Rob Kaas, Actuarial Theory for Dependent Risks: Measures, Orders and Models, John Wiley ¥& Sons 2005

[3] Gerber, H.U., An Introduction to Mathematical Risk Theory, Huebner Foundation Monograph 8, Huebner Foundation 1979.

[4] Foellmer, Hans, and Schied, Alexander, Stochastic finance: An introduction in discrete time. Third revised and extended edition, Walter de Gruyter ¥& Co., Berlin, 2011. xii＋544 pp.

[5] Foellmer, Hans, and Thomas Knispel, Convex Risk Measures: Basic Facts, Law-invariance and beyond, Asymptotics for Large, Handbook of the Fundamentals of Financial Decision Making, Part II, 507-554, Eds. L.C. MacLean and W.T. Ziemba, World Scientific (2013)