展望論文

ウェザーデリバティブの価格決定とその方向

若浦雅嗣*

2004年9月24日投稿
2005年2月15日受理

概要

ウェザーデリバティブは気温等の気象要素をインデックス化したものを対象とする金融取引で，気象要素の変動による収益変動のリスクをヘッジすることができる．しかし，そのプライシング理論についてはまだスタンダードな理論は存在しない．それは，原資産にあたる気象のインデックスが市場で取引されていないため，ブラック・ショールズ式に代表される無裁定価格評価法が利用できないためである．本稿では，なぜ無裁定価格評価法が利用できないかを明示した上で，ウェザーデリバティブのプライシングが非完備市場における価格評価であり，リスクの市場価格の定式化が必要であることを示し，これまでの先行研究の位置付けを明確にするとともに，ウェザーデリバティブのプライシング理論の方向性を示すものである．

キーワード：ウェザーデリバティブ，オプション・プライシング，リスクの市場価格，非完備市場，代替的リスク移転（ART）

1 序論

ウェザーデリバティブという金融取引（商品）がある．これは，その名が示すように，天候のデリバティブ取引で，株価や金利の替わりに気温等の気象要素をインデックス化したものを対象とするオプション等のデリバティブ取引である．いわゆる一般の金融デリバティブが株価や金利の変動によるリスクをヘッジできるように，ウェザーデリバティブによって気温の変動等によるリスクをヘッジすることができる．

土方[2000]によれば，世界で最初に取引されたウェザーデリバティブは，1997年9月に総合エネルギー会社であるENRON社とKoch社が、ウィスコンシン州のミルウォーキー地域の97年から98年にかけての冬季の気温を対象として行ったものと言われている．その後，1999年9月22日，シカゴ・マーカンタイル取引所（The Chicago Mercantile Exchange）に気温を対象としたウェザーデリバティブ先物、先物オプション及びスワップが上場されている．当初，アメリカで始まったウェザーデリバティブは，世界に広がり各国の経済事情にあわせた形で様々な気象要素

*総合研究大学院大学 複合科学研究科 統計科学専攻
〒106-8569 東京都港区南麻布4－6－7
E-mail: wakaura@ism.ac.jp

インデックスを用いて多様な契約形態が登場するとともに，相対取引，店頭取引（Over The Counter）や上場の試みも含めてその取引も活発なものとなっており，将来的にも増加が見込まれている，

このように，取引が活発になされるウェザーデリバティブであるが，スタンダードなプライシング理論はない．これは，取引の対象となる気象インデックスが市場で取引されていないということがその理由であるが，ウェザーデリバティブの登場以来，多くの研究者が様々な角度からこの問題に取り組んできた．本稿の目的は，これらの研究のうち，ポートフォリオとの関係で気象の変動リスクの定式化を試みる３つのモデルを取り上げて紹介するとともに，ウェザーデリバティブのプライシング理論の方向性を示すことである．

ウェザーデリバティブのプライシング理論は極めて学際的なものとなる．すなわち，気象要素という状態変数の上に書かれた派生証券の価格付け理論としての数理ファイナンスの側面，また，対象となる気象要素インデックスの変動をモデル化する確率あるいは統計モデリングの側面，さらには，ベースとなる気象要素を研究対象とした気象学の側面，特に長期予報の技術との関係も考慮しなければならない．これらの全て網羅するとなると，それぞれの分野の基礎理論から始まり膨大な頁数を要することになる．そこで，本稿においては，数理ファイナンスの側面に焦点をあてその方向性を示す．他の側面についてはまた別の機会に譲ることとしたい．

本稿の構成は次の通りである．まず，第２章では，本稿で取り扱うモデルの前提となる事項や仮定を定義しておく，続いて第３章では，主なプライシング理論の紹介に先立って一般の金融デリバティブの評価手法との相違を概観し，無裁定価格評価法の限界，なぜ取引の対象となる気象インデックスが市場で取引されていないと価格評価ができないのかを示す．第４章では，リスクの市場価格の概念を導入するとともに，ウェザーデリバティブのプライシングが非完備市場における価格付け理論であることを示す．先行研究においては，これらの価格評価の困難性を踏まえた上で，様々なアプローチなされているが，第５章では，これまでの先行研究において，リスクの市場価格に関してポートフォリオと気象変動の関係から定式化の方向性を示す３つのモデルを紹介するとともにその解釈と位置付けを与える．さらに第６章では，第５章の先行研究を踏まえた上でウェザーデリバティブのプライシング理論の今後の方向性を示す．また最後に，第７章では数理ファイナンス以外の側面での取り組みの概要を説明する．

2 前提と定義

2.1 想定する取引

ウェザーデリバティブの取引形態には様々なものがある．対象となる気象要素についても，気温，降水量，積雪量，湿度，風力等があり，そのインデックスについても，日次平均気温値，日数，Heating Degree Day（HDD）・Cooling Degree Day（CDD）等がある．また，取引も，オプション，先物，先渡し，スワップ等がある．特に取引形態については特定して議論するところではないが，本稿では基本的に，気温 HDD／CDD インデックスのオプション取引を想定している．それは，当該取引が実際のウェザーデリバティブ取引において代表的な取引であり，先行研究の多くがそれをベースにして議論しているからである．

まず，気温 HDD／CDD インデックスのオプション取引について，簡潔に説明しておく．HDD／CDD とは，１日の標準気温からの乖離を示す指数で以下の通り定義される．

$$\mathrm{HDD} = \max(I - T, 0),$$
$$\mathrm{CDD} = \max(T - I, 0),$$

ここで，T は日次平均気温であり，I は暖房から冷房に切り替わる温度で，例えばアメリカでは華氏６５度が利用され，摂氏では約１８度となる．HDD／CDD は一定の期間の累積値で評価されるが，HDD ではその累積値が大きいと厳冬，小さいと暖冬を表し，CDD ではその累積値が大きいと暑夏，小さいと冷夏を表すことになる．

次にオプション取引であるが，例えば満期τの約定期間の累積HDD値を$H(\tau)$，ストライクHDDをK，1DDあたりの単位金額（tick size）をMとすると，そのペイオフ$h(H(\tau))$は，

コール：

$$h(H(\tau)) = \max(M(H(\tau)-K),0),$$

プット：

$$h(H(\tau)) = \max(M(K-H(\tau)),0),$$

となる．なお，CDDも同様である．

2.2 市場の仮定

市場において取引コストは発生せず，空売りが許容されるものと仮定する．また，ある時点における株等の原資産の価格を決定する状態ωの集合をΩとし，その不確実性は所与の確率空間$(\Omega,\mathcal{F},P)$によって与えられているものと仮定する．なお，Pは確率測度であり，$\mathcal{F}$はΩ上の加算加法族で，時間パラメータtで表した$\{\mathcal{F}_t\}$はフィルトレーションであり，市場の資産を確率過程で表した時その確率過程は$\mathcal{F}_t$-可測とする．また，以下本稿において，特に断りのない限り市場はそのようなものと仮定することとする．

3 ブラック・ショールズ式とウェザーデリバティブ

ウェザーデリバティブは，これまでのオプションといった金融デリバティブの取引における株価や金利を気象要素のインデックスに置換えて，これを気象リスクの回避に活用するものである．したがって，価格理論としては，伝統的な金融デリバティブにおけるヨーロピアン・オプションの評価手法である，いわゆるブラック・ショールズ式（Black and Scholes[1973]）が利用可能と考えるかもしれないが，これは厳密に言えば妥当ではない．

それは何故か．結論を言ってしまえば，気温等の気象要素のインデックス自体は，市場で取引される資産・商品ではないということである．何故，市場で取引される資産・商品ではないとブラック・ショールズ式が利用できないのか．それは，ブラック・ショールズ式は，裁定機会が存在しないという経済学的均衡のもとで，オプションの価格と等価となる原資産と無危険資産からなる自己ファイナンシングであるポートフォリオ（等価ポートフォリオ）を仮定することによって導出されるからである．すなわち，ウェザーデリバティブにおいては，オプションの対象となる気温等の気象要素のインデックスが市場で取引されていないことから，そのインデックスには価格が存在せず，ブラック・ショールズ式の導出の基礎となる等価ポートフォリオが構築できないのである．

ここで，このことをもう少し具体的に，ブラック・ショールズ式導出の過程を通じ示すこととする．

まず，配当はないものとし，時点をt，満期をτ，時点tにおける原資産価格を$\{S_1(t):t\in[0,\tau]\}$とし，次の確率微分式によって与えられているものとする．

$$dS_1(t) = \mu S_1(t)dt + \sigma S_1(t)dW(t), \qquad (1)$$

ここで，μはドリフト係数，σは拡散係数，$\{W(t):t\in[0,\tau]\}$は標準ブラウン運動である．一方，無危険資産価格$\{S_0(t):t\in[0,\tau]\}$は次式を満たすものとする．

$$dS_0(t) = rS_0(t)dt,$$

ここで，rは無危険利子率である．

続いて，原資産と無危険資産を用いて，オプションの価格と等価となるような自己ファイナンシングすなわち自己充足的なポートフォリオを構成する．$\{\pi_0(t):t\in[0,\tau]\}$，$\{\pi_1(t):t\in[0,\tau]\}$をそれぞれ無危険資産と原資産の保有枚数とすると，時点tにおけるポートフォリオの価値$\{C(t):t\in[0,\tau]\}$は

$$C(t) = \pi_0(t)S_0(t) + \pi_1(t)S_1(t), \qquad (2)$$

であり，自己ファイナンシングであるポートフォリオは，

$$C(t) = C(0) + \int_0^t \pi_0(s)dS_0(s) + \int_0^t \pi_1(s)dS_1(s),$$

で表され，オプション等の派生証券価格$\{X(t):t\in[0,\tau]\}$に対して，$X(t) = C(t)$となれば等価ポートフォリオとなる．次に，

$$\lambda \equiv \frac{\mu - r}{\sigma},$$

$$\Lambda(t) \equiv \exp\left(-\lambda W(t) - \frac{\lambda^2}{2}t\right), \tag{3}$$

を定義すると，ギルサノフの定理から，確率測度Pと同値となる

$$Q(\mathcal{A}) \equiv E\left[\mathrm{I}_{\mathcal{A}}\Lambda(\tau)\right],\ \mathrm{I}_{\mathcal{A}} \equiv \begin{cases} 1 & \omega\in\mathcal{A} \\ 0 & \omega\notin\mathcal{A} \end{cases}, \tag{4}$$

で定義される確率測度Qに関して，

$$\tilde{W}(t) = W(t) + \lambda t,$$

は標準ブラウン運動であり，

$$dS_1(t) = rS_1(t)dt + \sigma S_1(t)d\tilde{W}(t),$$

が成立する．なお，ここで定義したλの解釈については後に詳述する．またさらに，派生証券価格$X(t)$を関数形式$\{X(S_1(t),t):t\in[0,\tau]\}$で表現し，伊藤の公式を用いると，

$$dX(S_1(t),t) = \left\{rS_1(t)\frac{\partial X(S_1(t),t)}{\partial S_1(t)} + \frac{\partial X(S_1(t),t)}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 X(S_1(t),t)}{\partial S_1(t)^2}\sigma^2 S_1(t)^2\right\}dt + \frac{\partial X(S_1(t),t)}{\partial S_1(t)}\sigma S_1(t)d\tilde{W}(t),$$

であり，一方，

$$\begin{aligned} dC(t) &= \pi_0(t)dS_0(t) + \pi_1(t)dS_1(t) \\ &= \pi_0(t)dS_0(t) + \pi_1(t)\left(rS_1(t)dt + \sigma S_1(t)d\tilde{W}(t)\right) \\ &= r\left(\pi_0(t)S_0(t) + \pi_1(t)S_1(t)\right)dt + \sigma\pi_1(t)S_1(t)d\tilde{W}(t), \end{aligned}$$

で，

$$\pi_1(t) = \frac{\partial X(S_1(t),t)}{\partial S_1(t)},$$

となるように原資産を保有することにより（デルタ・ヘッジ），$dX(S_1(t),t) = dC(t)$において，ブラウン運動$\tilde{W}(t)$の項が消えて，

$$\left\{rS_1(t)\frac{\partial X(S_1(t),t)}{\partial S_1(t)} + \frac{\partial X(S_1(t),t)}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 X(S_1(t),t)}{\partial S_1(t)^2}\sigma^2 S_1(t)^2\right\}dt = r\left(\pi_0(t)S_0(t) + \pi_1(t)S_1(t)\right)dt,$$

が成立し，$X(S_1(t),t) = C(t) = \pi_0(t)dS_0(t) + \pi_1(t)dS_1(t)$から，偏微分方程式

$$rS_1(t)\frac{\partial X(S_1(t),t)}{\partial S_1(t)} + \frac{\partial X(S_1(t),t)}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 X(S_1(t),t)}{\partial S_1(t)^2}\sigma^2 S_1(t)^2 - rX(S_1(t),t) = 0, \tag{5}$$

が導かれる．そして，この偏微分方程式をヨーロピ

アン・オプションのキャッシュ・フローを表す境界条件のもとに解くことによってブラック・ショールズ式が得られる.

以上から，導出された偏微分方程式が等価ポートフォリオを前提に構築されていることがわかる．一見，原資産の確率過程を気温等の気象要素の変動過程に置き換え，上記のような偏微分方程式を導出すれば価格評価は可能であるような錯覚に陥るが，気温等のインデックスは実体のある商品ではなく価格が存在しないため，原資産を保有するという行為ができず，デルタ・ヘッジによる等価ポートフォリオは構築できない．したがって，(5)のような偏微分方程式は導出できない.

4 リスクの市場価格

それでは，気温等の市場で取引できない状態過程の上に書かれた派生証券の価格はどのように評価すべきなのか．これは，異なる証券のポートフォリオを構築することによって可能となる.

まず，気温等の状態を記述する確率過程を $\{T(t):t\geq 0\}$ として，次の確率微分式に従っていると仮定する.

$$dT(t) = \mu_T T(t)dt + \sigma_T T(t)dW(t).$$

満期 τ で $T(t)$ の上に書かれた派生証券の価格を $\{F(T(t),t):t\in[0,\tau]\}$ とすると，伊藤の公式から,

$$dF(T(t),t) = \mu_F(T(t),t)dt + \sigma_F(T(t),t)dW(t), \quad (6)$$

$$\mu_F(T(t),t) = \mu_T T(t)\frac{\partial F(T(t),t)}{\partial T(t)} + \frac{\partial F(T(t),t)}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F(T(t),t)}{\partial T(t)^2}\sigma_T^2 T(t)^2, \quad (7)$$

$$\sigma_F(T(t),t) = \frac{\partial F(T(t),t)}{\partial T(t)}\sigma_T T(t), \quad (8)$$

が成立し，同様に，満期 $\tilde{\tau}$ $(\tau\neq\tilde{\tau})$ で $T(t)$ の上に書かれた派生証券の価格を $\{\tilde{F}(T(t),t):t\in[0,\tilde{\tau}]\}$ とすると,

$$d\tilde{F}(T(t),t) = \mu_{\tilde{F}}(T(t),t)dt + \sigma_{\tilde{F}}(T(t),t)dW(t),$$

$$\mu_{\tilde{F}}(T(t),t) = \mu_T T(t)\frac{\partial \tilde{F}(T(t),t)}{\partial T(t)} + \frac{\partial \tilde{F}(T(t),t)}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \tilde{F}(T(t),t)}{\partial T(t)^2}\sigma_T^2 T(t)^2,$$

$$\sigma_{\tilde{F}}(T(t),t) = \frac{\partial \tilde{F}(T(t),t)}{\partial T(t)}\sigma_T T(t),$$

が成立する．そして，満期の異なる派生証券 $F(T(t),t)$, $\tilde{F}(T(t),t)$ に対し，それぞれ w，$(1-w)$ の比率で投資するポートフォリオ $\{C_F(t):t\in[0,\tau]\}$ を構築すると,

$$\begin{aligned}dC_F(t) &= wdF(T(t),t) + (1-w)d\tilde{F}(T(t),t)\\ &= (w\mu_F(T(t),t)+(1-w)\mu_{\tilde{F}}(T(t),t))dt +\\ &\quad (w\sigma_F(T(t),t)+(1-w)\sigma_{\tilde{F}}(T(t),t))dW(t),\end{aligned}$$

となるので，第２式第２項のブラウン運動の項が 0 となるように,

$$w\sigma_F(T(t),t)+(1-w)\sigma_{\tilde{F}}(T(t),t) = 0$$

すなわち,

$$w = -\frac{\sigma_{\tilde{F}}(T(t),t)}{\sigma_F(T(t),t)-\sigma_{\tilde{F}}(T(t),t)}$$

となるようにポートフォリオを組めば，ポートフォリオの不確実性が取り除かれることになる．そして，不確実性のない証券の収益は，無裁定の条件から無危険資産の利子に等しくなければならないことから,

$$w\mu_F(T(t),t)+(1-w)\mu_{\tilde{F}}(T(t),t) = rC_F(t)$$

$$-\frac{\mu_F(T(t),t)\cdot\sigma_{\tilde{F}}(T(t),t)}{\sigma_F(T(t),t)-\sigma_{\tilde{F}}(T(t),t)} + \frac{\mu_{\tilde{F}}(T(t),t)\cdot\sigma_F(T(t),t)}{\sigma_F(T(t),t)-\sigma_{\tilde{F}}(T(t),t)} = rC_F(t)$$

$$\frac{\mu_F(T(t),t)-rC_F(t)}{\sigma_F(T(t),t)} = \frac{\mu_{\tilde{F}}(T(t),t)-rC_F(t)}{\sigma_{\tilde{F}}(T(t),t)},$$

が成立する．ここで，

$$\lambda \equiv \frac{\mu_F(T(t),t)-r(x,t)}{\sigma_F(T(t),t)}, \tag{9}$$

を定義し，これに，$r(x,t) = rF(T(t),t)$として，(7)式，(8)式を代入すると，

$$(\mu_T-\lambda\sigma_T)T(t)\frac{\partial F(T(t),t)}{\partial T(t)} + \frac{\partial F(T(t),t)}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F(T(t),t)}{\partial T(t)^2}\sigma_T^2 T(t)^2 - rF(T(t),t) = 0, \tag{10}$$

が導かれる（なお，(10)式の導出にあたっては木島[1994]を参照した）．

ここで，(9)で定義したλの解釈を与えると，(10)式の意味がより明快となる．すなわち，$\mu_F(T(t),t)$が収益を表すことから，$\mu_F(T(t),t)-r(x,t)$は市場での安全利子率を超過した期待収益を表すことになり，一方，$\sigma_F(T(t),t)$を不確実性すなわちリスクと考えるならば，(9)で定義したλは，リスク1単位あたりの期待収益，すなわち，リスクの市場価格（market price of risk）という解釈が可能である．なお，$T(t)$が市場で取引可能な原資産の場合，直接$T(t)$の値が利用でき，$\mu_F(T(t),t) = \mu_T$，$\sigma_F(T(t),t) = \sigma_T$，$r(x,t) = r$として，$\lambda$を(10)式に代入すれば，(5)式が導かれる．つまり，(10)式は陽にリスクの市場価格λを定式化することによって(5)式を一般化し，市場で取引されない状態過程の上に書かれた派生証券に拡張したものと言える．

したがって，(10)式を派生証券の境界条件のもとに解くことによって，市場で取引できない状態過程の上に書かれた派生証券の評価式を導出することができる．つまり，理論的にはウェザーデリバティブの価格もこれにより評価が可能ということになるが，そのためには，リスクの市場価格λが既知か，あるいは一意に決まっている必要がある．市場で取引可能な原資産の場合，先述したように直接原資産の値を利用できることからλを一意に決定することができるが，そうでない場合リスクの市場価格を把握することは困難と言わざるを得ない．直感的にも，取引が無いあるいは活発でない場合，そのリスクの市場価格の観測は不能か困難であるということは明らかであろう．このことは多数資産の市場に拡張するとさらにわかり易い．すなわち，市場にm個の危険資産と，n個のブラウン運動で表現される不確実性をもたらす要素が存在し，各資産の価格が(1)式に従っていると仮定すると，

$$\mathbf{S}(t) = (S_1(t),\cdots,S_m(t))^T,$$

$$\boldsymbol{\mu} = (\mu_1(t),\cdots,\mu_m(t))^T,$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix}\sigma_{11} & \cdots & \sigma_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \sigma_{m1} & \cdots & \sigma_{mn}\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{W}(t) = (W_1(t),\cdots,W_n(t))^T,$$

として，(1)は行列形式で，

$$d\mathbf{S}(t) = \mathrm{diag}[\mathbf{S}(t)]\{\boldsymbol{\mu}dt+\boldsymbol{\sigma}d\mathbf{W}(t)\},$$

と表される（なお，$(\cdot)^T$は転置を表し，diag[·]は対角行列を表す）．一方，リスクの市場価格は，$\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1,\cdots,\lambda_n)^T$で表され，(9)の定義から，

$$\sigma\lambda = \mu - r, \tag{11}$$

と表される．ここで，市場において不確実性をもたらす要素よりも多くの危険資産が取引されている（$m \geq n$）市場は完備市場（complete markets）と呼ばれ，その場合行列σはフルランクであり(11)式のλは一意に求められるが（詳しくはDuffie[1992]，Brody[2000]などを参照），不確実性をもたらす要素よりも少ない数の危険資産しか取引されていない市場（$m < n$）は非完備市場（incomplete markets）と呼ばれ，σは縮退が生じλは一意に求められない．

実際，ウェザーデリバティブの市場を考えると，気温等の不確実性は存在するものの，それが資産として取引されていないことから非完備市場における価格評価となり，リスクの市場価格が一意に求められないことから，(10)式を用いた評価もできない．したがって，ウェザーデリバティブは，これまでの金融デリバティブのフレームワークでの評価は困難と言わざるを得ない．

5 ウェザーデリバティブのプライシング理論に関する研究

前章までに金融デリバティブの手法がウェザーデリバティブで利用できない理由とその価格評価の困難性を明らかにした．すなわち，対象となる気温等の気象要素が市場で取引されないことから，ポートフォリオの構築ができず無裁定価格評価は困難であり，同時にその市場は非完備市場でありリスクの市場価格が一意に決まらないことから価格評価自体が困難なものとなる．

しかしながら，これらの事情を踏まえた上でいくつかの評価手法が研究・提起されている．もちろん，現段階では試行錯誤的な部分もあり標準的な理論は存在しないが，実際の取引は行われており，それを裏付ける形で一定の方向性は示されつつあると考えることができる．本章では，これらの研究の成果を紹介しその方向性を示唆したい．

なお，先行研究を紹介する前に，ここでリスク中立化法による評価法の概要を確認しておく．それは，その表現や手法が，これから説明する先行研究の結論や方法を比較検討するに際の基準となるからである．

まず，摩擦のない市場とその不確実性の確率空間(Ω, F, P)の仮定，及び原資産価格$S_1(t)$，無危険資産価格$S_0(t)$，無危険利子率r，オプション等の派生証券価格$X(t)$の定義はそれぞれこれまでと同様とする．次に，

$$\hat{S}_1(t) \equiv \frac{S_1(t)}{S_0(t)}, \quad t \in [0, \tau],$$

を定義すると，$\hat{S}_1(t)$は(3)，(4)で定義された確率測度Qのもとでマルチンゲールとなる．(2)のポートフォリオ$C(t)$において派生証券価格$X(t)$と等価となるポートフォリオは，

$$X(t) = \pi_0(t)S_0(t) + \pi_1(t)S_1(t), \quad t \in [0, \tau],$$

であり，さらに$\{\pi_0(t) + \pi_1(t)\hat{S}_1(t) : t \in [0, \tau]\}$も確率測度$Q$のもとでマルチンゲールとなることから，派生証券価格$X(\tau)$の現在価格$X(t)$は

$$\begin{aligned}
X(t) &= \pi_0(t)S_0(t) + \pi_1(t)S_1(t) \\
&= S_0(t)[\pi_0(t) + \pi_1(t)\,\hat{S}_1(t)] \\
&= S_0(t)E^Q[\pi_0(\tau) + \pi_1(\tau)\hat{S}_1(\tau) \mid \mathcal{F}_t] \\
&= S_0(t)E^Q[S_0(\tau)^{-1}(\pi_0(\tau)S_0(\tau) + \\
&\qquad \pi_1(\tau)S_1(\tau) \mid \mathcal{F}_t] \\
&= E^Q[\,e^{-r(\tau-t)}X(\tau) \mid \mathcal{F}_t]
\end{aligned}$$

となり（ここで，E^Qは確率測度Qでの期待値を表す），満期時点の派生証券価格のキャッシュ・フローを無危険利子率で割り引いたものを確率測度Qのもとでの期待値をとることによって求められる．なお，$\hat{S}_1(t)$ならびに$\pi_0(t) + \pi_1(t)\hat{S}_1(t)$が確率測度$Q$のもとでマルチンゲールとなることについては，一般的な

金融工学の教科書に解説があるが，例えば岩城[1998]などを参照されたい.

5.1 Cao and Wei モデル

Cao and Wei[2000]は，市場で取引される原資産が存在せず，裁定理論による価格付けが困難であることから，代表的投資家の効用に基づく均衡アプローチをとっている.

その概要は，経済における基本的な不確実性が総配当と気象要素によって産み出されるとの仮定のもとで均衡価格を求め，更にリスク・プレミアムとの関係を考察する.

具体的な展開は以下の通りである．なお，原著においては，契約形態としては主に先渡取引を中心に議論を展開しているが，本稿においてはオプション取引を対象として議論する.

まず，日次平均気温 $\{T(t): t\in\{0,1,\cdots,\tau\}\}$ を次のようにモデル化する.

$$Z(t)=T(t)-\Theta(t),$$

$$Z(t)=\sum_{i=1}^{p}\phi_i Z(t-1)+\sigma(t)\cdot\varepsilon(t),$$

$$\sigma(t)=\sigma_0-\sigma_1|\sin(\pi t/365+b)|,$$

$$\varepsilon(t)\sim i.i.d.\ N(0,1),$$

ここで，$\Theta(t)$ は t 日の平均的（標準的）気温である．次に代表的投資家の t 時点の効用関数 $U(c(t),t)$ は次の通りと仮定する.

$$U(c(t),t)=e^{-\beta t}\frac{c(t)^{\gamma+1}}{\gamma+1},\quad t\in\{0,1,\cdots,\tau\},$$

ここで，$c(t)$ は時点 t における消費，β は時間選好（割引率），γ はリスク回避度（$\gamma\in[-1,0]$）である．そして，総配当 $\{\delta(t): t\in\{0,1,\cdots,\tau\}\}$ は次の過程を仮定する.

$$\log\delta(t)=\alpha_1+\alpha_2\log\delta(t-1)+\upsilon(t),$$

$$\upsilon(t)=\sigma\xi(t)+\sigma\left(\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\varepsilon(t)+\sum_{i=1}^{m}\eta_i\varepsilon(t-1)\right),$$

ここで，$\xi(t)$ は $i.i.d.$ で，気温以外の要因による誤差項，ρ は配当 $\delta(t)$ と気温 $T(t)$ の相関係数である．つまり，配当の誤差成分は，気温とそれ以外の成分で構成され，気温については現時点ばかりでなく過去の気温とも関係する構造を考える.

一方，投資と消費における代表的投資家の期待効用最大化の問題から導かれる有価証券 $\{X(t): t\in\{0,1,\cdots,\tau\}\}$ の価格は，確率的な限界代替率で割り引かれた配当の合計の期待値に等しく次式によって与えられる．$t<s$ とすると，

$$X(t)=E\left[\sum_{s=t+1}^{\tau}\frac{U_c(c(s),s)}{U_c(c(t),t)}D(s)\middle|\mathcal{F}_t\right],$$

ここで，D_t は時点 t までの累積配当，$U_c(c,t)$ は $U(c,t)$ の c に関する偏微分を表し，その均衡条件から，満期 τ に $h(\tau)$ のペイオフを持つ t 時点の条件付請求権の均衡価格 $X(t,\tau)$ は，

$$X(t,\tau)=\frac{1}{U_c(\delta(t),t)}E\left[U_c(\delta(\tau),\tau)h(\tau)\,|\,\mathcal{F}_t\right]$$

となり，したがって，$U_c(\delta(t),t)=e^{-\beta t}\delta(t)^{\gamma}$，$U_c(\delta(\tau),\tau)=e^{-\beta\tau}\delta(\tau)^{\gamma}$ で，約定期間の累積 HDD 値を $H(\tau)$，ストライク HDD を K，1 DD あたりの単位金額（tick size）を M とすると，HDD コールオプション $X_{HC}(t)$ の価値は，そのペイオフが $h(\tau)=\max(M(H(\tau)-K),0)$ であることから，

$$X_{HC}(t)=$$
$$e^{-\beta(\tau-t)}\delta(t)^{-\gamma}E\left[\delta(\tau)^{\gamma}\max(M(H(\tau)-K),0)\middle|\mathcal{F}_t\right], \tag{12}$$

である．満期 τ で消費財 1 単位の支払いのある無リス

ク債券の t 時点での均衡価格 $B(t,\tau)$ が,

$$B(t,\tau)=\frac{1}{U_c(\delta(t),t)}E\left[U_c(\delta(\tau),\tau)\,\middle|\,\mathcal{F}_t\right]$$
$$=e^{-\beta(\tau-t)}\delta(t)^{-\gamma}E\left[\delta(\tau)^{\gamma}\,\middle|\,\mathcal{F}_t\right]$$

と表されることから，配当過程と気温過程が完全に独立の場合，すなわち，$\rho=0$, $\eta_i=0$ の場合，(12) 式は

$$X_{HC}(t)=B(t,\tau)\,E\left[\max(M(H(\tau)-K),0)\,|\,\mathcal{F}_t\right],\quad(13)$$

となり，HDD コールオプションの現在価値は将来のペイオフを無危険利子率で割り引いたものとなる．したがって，HDD プットオプション $X_{HP}(t)$ も同様にして,

$$X_{HP}(t)=B(t,\tau)\,E\left[\max(M(K-H(\tau)),0)\,|\,\mathcal{F}_t\right],\quad(14)$$

となる．将来のペイオフを正規分布等の特定の確率分布と仮定すれば，上式から解析的に解を求めることも可能である．一方，配当過程と気温過程が完全に独立ではない場合，(13)，(14) 式に共分散の項 $Cov[\cdot,\cdot]$ がついて,

$$X_{HC}(t)=$$
$$B(t,\tau)\,E\left[\max(M(H(\tau)-K),0)\,|\,\mathcal{F}_t\right]+$$
$$e^{-\beta(\tau-t)}\delta(t)^{-\gamma}Cov\left[\delta(\tau)^{\gamma},\max(M(H(\tau)-K),0)\right],$$

$$X_{HP}(t)=$$
$$B(t,\tau)\,E\left[\max(M(K-H(\tau)),0)\,|\,\mathcal{F}_t\right]+$$
$$e^{-\beta(\tau-t)}\delta(t)^{-\gamma}Cov\left[\delta(\tau)^{\gamma},\max(M(K-H(\tau)),0)\right],$$

となるが，この共分散の項がリスク・プレミアムとして配当と気温の相関の度合いに応じてオプションの価格に付加される．いわば，前節で議論したリスクの市場価格を定式化することになる訳であるが，この場合，想定される確率分布は複雑となり解析的に解を求めることはできない．Cao and Wei [2000] では，先渡の評価式として，正規分布を仮定し相関はない (すなわち $\rho=0$, $\eta_i=0$) として解析解を求め，さらに相関のあるケースについては，相関係数の他，リスクパラメータ γ を変化させ数値計算することによりその関係をシミュレーションしている．

なお，以上の議論は CDD の場合も同様にあてはまる．

5.2 Davis モデル

Cao and Wei [2000] が，代表的な投資家に視点をおいたのに対し，Davis [2000] は，そのビジネス (Davis [2000] ではガス取引を想定している) が気象リスクに直面した投資家を仮定した．彼らはその効用を最大化するためにウェザーデリバティブを利用するとしてモデルを考案する．以下，Davis [2000] のモデルを詳述する．

まず，t 時点における 1 ヶ月単位の累積 HDD $\{H(t):t\in[0,\tau]\}$ が対数正規分布に従い，次の確率微分式に従っていると仮定する．

$$dH(t)=\mu_H H(t)dt+\sigma_H H(t)dW_H(t),$$

ここで，μ_H はドリフト係数，σ_H は拡散係数，W_H は標準ブラウン運動である．

次に，ガスの消費量 $\{G(t):t\in[0,\tau]\}$ は HDD の値 $H(t)$ と線形関係にあると仮定する．すなわち $G(t)=bH(t)$ とし，また，ガスのスポット・プライス $\{S_G(t):t\in[0,\tau]\}$ も対数正規分布に従い，下記の確率微分式に従うとすると

$$dS_G(t)=\mu_G S_G(t)dt+\sigma_G S_G(t)dW_G(t)$$

ここで，μ_G はドリフト係数，σ_G は拡散係数，W_G は標準ブラウン運動である．すると，資産としてのガ

ス$L(t) = bH(t)S_G(t)$は，次の確率微分式に従う．

$$dL(t) = \mu_L L(t)dt + \sigma_L L(t)dW_L(t),$$
$$L(0) = bH(0)S_G(0),$$

なお，線形関係にあることから，係数bは$S_G(t)$の単位として捉えることが可能で，$b = 1$と仮定することができる．ここで，1ヶ月間の HDD 値と，ガスのスポット・プライスのブラウン運動の相関が$E[dW_H dW_G] = \rho_{HG}dt$とすると，

$$\mu_L = \mu_H + \mu_G + \rho_{HG}\sigma_H\sigma_G,$$

$$\sigma_L = \sqrt{\sigma_H{}^2 + \sigma_G{}^2 + 2\rho_{HG}\sigma_H\sigma_G},$$

$$dW_L = \frac{1}{\sigma_L}(\sigma_H dW_H + \sigma_G dW_G),$$

となる．

以上を仮定し，モデル化のベースは，限界代替率としてのポートフォリオに対するオプションの価値で，所有するポートフォリオの一部をオプションの購買にまわした時の効用が最大となるオプションの最適価格$X(\tau)$を求める下記公式(Davis[1998])において，

$$X(\tau) = \frac{E[U'(C^*(\tau))h(\tau)]}{V'(\iota)},$$

ここで，

$C^*(\tau)$：初期賦存量ιでの取引可能な資産の最適ポートフォリオ，

ι：初期賦存量，

$V(\iota)$：$E[U(C^*(\tau))]$，

$h(\tau)$：満期τにおけるオプションのペイオフ，

$C^*(\tau)$として$L(\tau)$を仮定し，$U(y) = \log y$とすると，$V(\iota) = E[U(C^*(\tau))]$であることから，初期賦存量$\iota = L(0)$に対し，$V(L(0)) = E[\log L(\tau)]$で，

$$L(\tau) = L(0)\exp\left(\left(\mu_L - \frac{\sigma_L^2}{2}\right)\tau + \sigma_L W_L(\tau)\right),$$

となることから，

$$V(L(0)) = E\left[\log L(0) + \left(\mu_L - \frac{\sigma_L^2}{2}\right)\tau + \sigma_L W_L(\tau)\right]$$
$$= \log L(0) + \left(\mu_L - \frac{\sigma_L^2}{2}\right)\tau$$
$$= \log L(0) + const.,$$

となる．したがって，

$$V'(L(0)) = \frac{1}{L(0)}$$

となり，

$$U'(C^*(\tau)) = (\log L(\tau))' = \frac{1}{L(\tau)}$$

から，

$$X(\tau) = \frac{E\left[\frac{1}{L(\tau)}h(H(\tau))\right]}{\frac{1}{L(0)}}$$
$$= E\left[\frac{L(0)}{L(\tau)}h(H(\tau))\right], \quad (15)$$

となる．ここで，$h(H(\tau))$は HDD 値$H(\tau)$のオプションのペイオフである．続いて，

$$Y_L(t) \equiv \frac{L(0)}{L(t)},$$

を定義すると，伊藤の公式から次式が導かれる．

$$dY_L(t) = -r^* Y_L(t)dt - \sigma_L Y_L(t)dW_L(t), \quad Y_L(0) = 1,$$

ここで,

$$r^* = \mu_H + \mu_G - \sigma_H{}^2 - \sigma_G{}^2 - \rho_{HG}\sigma_H\sigma_G,$$

である．さらに，ラドン・ニコディム微分を,

$$\frac{dQ_Y}{dP} \equiv \exp\left(-\frac{\sigma_L^2}{2}\tau - \sigma_L W_L(\tau)\right),$$

と定義すると．(15)式から,

$$X(\tau) = E\left[e^{-r^*\tau}\exp\left(-\frac{\sigma_L^2}{2}\tau - \sigma_L W_L(\tau)\right)h(H(\tau))\middle|\mathcal{F}_t\right]$$

$$= E^{Q_Y}\left[e^{-r^*\tau}h(H(\tau))\middle|\mathcal{F}_t\right], \qquad (16)$$

なお，E^{Q_Y} は新たな確率測度 Q_Y での期待値を表す．そして，Davis (2000)ではHDD値 $H(t)$ が対数正規分布に従うという仮定から評価式を導出している．また，r^* は先述したリスク中立化法との対比でそれを見易くするために r に＊を付して表記したが，無危険利子率 r とは全く異なるものであることに注意していただきたい．

ここで，(15)式と(16)式の解釈を考えてみる．Davisモデルは，資産としてのガス $L(t)$ をポートフォリオとして利用し，満期時にその一部をオプションの購買にまわした時の期待効用が最大となるように価格評価しているが，実はこの満期の効用最大化ポートフォリオ $L(\tau)$ は，先述のリスク中立化法に用いた無危険利子率 r と同じニューメレール(numeraire)に相当する．つまり，リスク中立化法においては，ニューメレールすなわち市場の基準となる指標として市場共通の債券価格を利用したが，Davisモデルでは HDD 値と線形関係にあるガス資産の効用最大化ポートフォリオを単位として測った HDD 値のウェザーデリバティブの評価を行っている．したがって，ガス資産の効用最大化ポートフォリオ比 $\frac{L(0)}{L(t)}$ の確率過程 $Y_L(t)$ の拡散係数 σ_L が先述のリスクの市場価格 λ に相当し，これを補正する形で確率測度を変換するとそれはマルチンゲールとなり評価が可能となる．つまり，限界代替率の概念を導入することにより，ガスという取引のある資産からみた，気温リスクを扱うオプション取引の相対価格を定式化し，取引資産としてのガスを代替として，マルチンゲール測度変換によりウェザーデリバティブの価格評価を行う．ただ，このことが成立するためには，ガス資産ポートフォリオが HDD 値と線形関係にあることが前提になる．

以上の議論は，後述するオプションのベンチマーク・プライシング（Platen and West モデル）の概念を理解するとさらに明快となるのだが，Davisモデルは，市場でウェザーデリバティブの対象となる気象要素は取引がないとしても，それと相関のある取引可能な資産（ポートフォリオ）があり，それが市場参加者にとって誰でも自由に利用（取引）できれば，その価格を基準としてウェザーデリバティブそのものの無裁定価格評価が可能であるということを示唆している．

5.3 Platen and West モデル

Platen and West[2003]は，benchmark approach と呼ばれる手法を用いて，金融工学の手法であるリスク中立化法と保険数理的なプライシングを統合する形でウェザーデリバティブの価格評価手法を提案している．ここで，benchmark approach とは，Platen[2002] や Buhlmann and Platen[2002] において示された手法で，growth optimal portfolio(GOP)の期待成長率が市場において最適となるようなポートフォリオをベンチマークとして価格評価を行うものである．

まず，ポートフォリオの価格を $S_i(t)$ と表す．ここで，添え字 $i \in \{0, 1, \cdots, d\}$ は保有資産の種類を表し 0 番目は無危険資産とし，t は離散時点 $t \in \{0, 1, \cdots, \tau\}$

とする．次に，i 番目の資産の $t+1$ 時における資産成長率 $z_i(t+1)$ を，

$$z_i(t+1) = \begin{cases} \dfrac{S_i(t+1)}{S_i(t)} & for \quad S_i(t) > 0 \\ 0 & otherwize \end{cases},$$

とする．したがって，i 番目の資産の t 時点における価格は，

$$S_i(t) = S_i(0)\prod_{m=1}^{t} z_i(t),$$

と表すことができる．また，自己ファイナンシングとなるような保有割合の過程を $\pi = \{\pi(t) = (\pi_0(t), \pi_1(t), \cdots, \pi_d(t)) : t \in \{0, 1, \cdots, \tau\}\}$ とすると，

$$\sum_{i=0}^{d} \pi_i(t) = 1$$

で，そのような保有割合で構成された t 時点における自己ファイナンシングポートフォリオの価値を $\{C_\pi(t) : t \in \{0, 1, \cdots, \tau\}\}$ と表すと，t 時点のポートフォリオの成長率 $z_\pi(t+1)$ は，

$$z_\pi(t+1) = \sum_{i=0}^{d} \pi_i(t-1) z_i(t)$$

で，t 時点のポートフォリオの価値は，

$$C_\pi(t) = C_\pi(0)\prod_{m=1}^{t} z_\pi(t),$$

と表せる．ここで，その価値が正となる自己ファイナンシングポートフォリオの集合を Ψ と表し，$C_\pi(t) \in \Psi$ となるポートフォリオの期待成長率（growth rate）を

$$g_\pi(t) = E[\log(z_\pi(t+1)) \mid \mathcal{F}_t]$$

とし，最適期待成長率（optimal growth rate）

$$\underline{g}(t) = \sup_{C_\pi \in \Psi} g_\pi(t)$$

を導入する．そして，$\underline{g}(t) = g_{\underline{\pi}}(t)$ となるような保有割合過程 $\underline{\pi}(t)$ で構成されたポートフォリオ $C_\pi(t) \in \Psi$ を $C_{\underline{\pi}}(t)$ で表すとすると，$C_{\underline{\pi}}(0) = 1$ で，

$$E\left[\left.\frac{z_\pi(t+1)}{z_{\underline{\pi}}(t+1)}\right| \mathcal{F}_t\right] < \infty,$$

となるようなポートフォリオが市場に存在するとすると，$C_{\underline{\pi}}(t)$ は最適期待成長率ポートフォリオ（growth optimal portfolio, GOP）であり，その市場は可積分（integrable）であると言うこととする．投資において，ＧＯＰはその成長率の点でこれを超える他の正の自己ファイナンシングポートフォリオが存在しないことから，最良のベンチマーク・ポートフォリオ（benchmark portfolio）という解釈が可能である．

Buhlmann and Platen[2002]は，$C_{\underline{\pi}}(t) \in \Psi$ がＧＯＰであるための必要十分条件は，すべてのポートフォリオ $C_\pi(t) \in \Psi$ が $C_{\underline{\pi}}(t)$ 単位で表現された時，それらが優マルチンゲール，すなわち，

$$E\left[\left.\frac{z_\pi(t+1)}{z_{\underline{\pi}}(t+1)}\right| \mathcal{F}_t\right] \leq 1$$

であることを証明している．また，このことから，ＧＯＰでベンチマークされたポートフォリオ（benchmarked portfolio）を，

$$\hat{C}_\pi(t) = \frac{C_\pi(t)}{C_{\underline{\pi}}(t)}$$

とすると，それは優マルチンゲール，すなわち，

$$\hat{C}_\pi(t) \geq E\left[\hat{C}_\pi(s)\middle|\mathcal{F}_t\right], \quad t < s,$$

であり，これがマルチンゲール，すなわち，

$$\hat{C}_\pi(t) = E\left[\hat{C}_\pi(s)\middle|\mathcal{F}_t\right], \quad t < s,$$

となる場合，$C_\pi(t)$はフェアーな価格過程(fair price process) であると言い，ここで，$\theta \in (0, 1/2)$ で

$$z_{\theta,\pi}(t+1) = \theta \cdot z_\pi(t+1) + (1-\theta) \cdot z_{\underline{\pi}}(t+1),$$

を導入し，さらに

$$g_{\theta,\pi}(t) = E\left[\log(z_{\theta,\pi}(t+1)) \middle| \mathcal{F}_t\right],$$

とすると，可積分な市場（integrable market）において，$C_\pi(t)$がフェアーな価格過程であるための必要十分条件は，

$$\left.\frac{\partial g_{\theta,\pi}(t)}{\partial \theta}\right|_{\theta=0} = 0$$

であることをBuhlmann and Platen[2002]は示している．

以上の議論を踏まえ，満期τにおけるオプションのペイオフを$h(\tau)$とし，そのGOPでベンチマークされたものを

$$\hat{h}(\tau) = \frac{h(\tau)}{C_{\underline{\pi}}(\tau)},$$

とすると，そのt時点のオプションのGOPでベンチマークされた価値$\hat{X}(t)$は，

$$\hat{X}(t) = E\left[\hat{h}(\tau)\middle|\mathcal{F}_t\right],$$

であり，t時点のオプションの価値$X(t)$は，

$$X(t) = C_{\underline{\pi}}(t)\,\hat{X}(t), \tag{17}$$

と表すことができる．

ここで，GOPでベンチマークされた無危険資産を，

$$\hat{S}_0(t) = \frac{S_0(t)}{C_{\underline{\pi}}(t)},$$

とすると，Platen[2002]によれば，確率測度Pと等価となるリスク中立確率測度Qの存在を仮定すると，ラドン・ニコディム微分過程

$$\Lambda(t) = \frac{S_0(t)}{S_0(0)}\frac{C_{\underline{\pi}}(0)}{C_{\underline{\pi}}(t)} = \frac{\hat{S}_0(t)}{\hat{S}_0(0)},$$

はマルチンゲールで，

$$\frac{dQ}{dP} = \Lambda(\tau)$$

である．そして，(17)を

$$X(t) = E\left[\frac{C_{\underline{\pi}}(t)}{C_{\underline{\pi}}(\tau)}h(\tau)\middle|\mathcal{F}_t\right],$$

と表すと，

$$X(t)=E\left[\frac{\Lambda(\tau)}{\Lambda(t)}\frac{S_0(t)}{S_0(\tau)}h(\tau)\middle|\mathcal{F}_t\right]$$

$$=E\left[\frac{dQ}{dP}\frac{S_0(t)}{S_0(\tau)}h(\tau)\middle|\mathcal{F}_t\right]$$

$$=E^Q\left[\frac{S_0(t)}{S_0(\tau)}h(\tau)\middle|\mathcal{F}_t\right],$$

が導かれ，これはリスク中立化法による公式である．なお，E^Q は確率測度Qでの期待値である．

さらに，ウェザーデリバティブの場合そのペイオフ$h(\tau)$とGOPは独立であると仮定すると，(17)は

$$X(t)=C_{\underline{\pi}}(t)\,E\left[\frac{1}{C_{\underline{\pi}}(\tau)}\middle|\mathcal{F}_t\right]E\left[h(\tau)\mid\mathcal{F}_t\right],$$

となり，満期τで消費財１単位の支払いのある無リスク債権のt時点での価値$B(t,\tau)$は，

$$B(t,\tau)=C_{\underline{\pi}}(t)\,E\left[\frac{1}{C_{\underline{\pi}}(\tau)}\middle|\mathcal{F}_t\right],$$

であることから，

$$X(t)=B(t,\tau)\,E\left[h(\tau)\mid\mathcal{F}_t\right], \tag{18}$$

が導かれこれはアクチュアル・プライシングである．

Platen and West[2003]では，さらに(18)式のペイオフ$h(\tau)$の分布について，気温のヒストリカルデータから推定する方法と正規分布を仮定する方法でウェザーデリバティブの価格評価を行っている．Platen and West[2003]の方法は，GOPというニューメレールを仮定し，金融工学の手法であるリスク中立化法と保険数理的なアクチュアル・プライシングを統合している点で興味深いものであると同時に，これまで異なるアプローチで評価されてきたウェザーデリバティブのプライシング理論を統合し体系付ける契機を与える理論として注目すべきである．

6 ウェザーデリバティブのプライシング理論の方向性

以上，これまで研究されてきたウェザーデリバティブのプライシングモデルのうち，リスクの市場価格に関してポートフォリオと気象変動の関係から定式化の方向性を示す３つのモデルを紹介した．ここで，これらの各理論を体系付け，ウェザーデリバティブのプライシング理論について１つの方向性を示すこととする．

何度も言うように，ウェザーデリバティブのプライシング理論における最大の問題は，取引対象の気象要素インデックスが市場で取引されていないという非完備性がリスクの市場価格の評価を困難にするとともに，定式化をどう図るかが様々な理論が登場してきた背景になっている．Cao and Wei モデルでは均衡理論というアプローチを用いて代表的投資家の求めるウェザーデリバティブのプライシング理論を展開した．Davis モデルは限定的な投資家の効用という観点から測度変換を用いた方法で理論を展開した．さらに，Platen and West モデルは，ベンチマークというアプローチで，リスク中立化法とアクチュアル・プライシングを統合する形で理論を展開している．

ここで，注目したいのが Platen and West モデルの(18)式と Cao and Wei モデルの(13)式が同じものであるということである．すなわち，将来のウェザーデリバティブのペイオフの期待値を無危険利子率で割り引くというものであるが，異なるアプローチから同一のものが導出されている．これには前提として市場参加者の富と気象要素の相関がないということがある．ここで市場参加者の富とは，Platen and West モデルではGOP $C_{\underline{\pi}}(t)$であり，Cao and Wei モデルでは配当$\delta(t)$である．

それでは，富と気象要素に相関がある場合はどうなるか．Cao and Wei モデルでは，その共分散の項が

付加，つまりリスク・プレミアムが付加されてリスクの市場価格が定式化されている．一方，Davis モデルでは，市場参加者の富はそれが気象インデックスと線形関係にある資産としてのガス$L(t)$で，ポートフォリオとして市場参加者の効用が最大となる$L(t)$は Platen and West モデルで言うところのGOPである．そして，それをベンチマークすなわちニューメレールと位置付けることで，その割引過程$Y_L(t)$の拡散係数σ_Lをリスクの市場価格としてラドン・ニコディム微分を構成し新たな確率測度で定式化している．つまり，富である資産としてのガスが気象インデックスと線形関係にあるという仮定から，相関についてニューメレールを与えることで割引過程の拡散係数として構成し測度変換によってリスクの市場価格を定式化している．

ペイオフの期待値にリスク・プレミアムを付加するというのは，そのキャッシュ・フローが不確定な保険やデリバティブの基本的な価格算出方法である．ただ，問題はそのリスク・プレミアムをどう推定するかであり，金融工学では確率測度変換を用い，保険数理手法では，例えば期待値原理（expectation principle），分散原理（variance principle），標準偏差原理（standard deviation principle），半分散原理（semi-variance principle）などが用いられる．そういう意味では，第5章で，Davis モデルは金融工学の確率測度変換の立場で，Cao and Wei モデルは均衡理論から導出された保険的手法に近い立場で，また，Platen and West モデルは確率測度変換と保険的手法を一般化した立場でリスク・プレミアムを捉えている．実際，取引の行われているウェザーデリバティブはペイオフの期待値に何らかの形でリスク・プレミアムをのせてプライシングが行われていると考えられるが，リスク・プレミアムは，個々のリスク・テイカーによって異なるのが実態であろう．

それでは，どのような形でリスクの市場価格を捉え，それをプレミアムとして定式化していくべきか．つまり，全ての市場参加者が利用できる標準的なフェアー・プライスはどのような形で定式化されるべきなのか．その答えは第5章で紹介したモデルから，次のステップで構成されることになろう．

① ウェザーデリバティブの市場参加者が所有するポートフォリオの特定
② ①のポートフォリオと気象要素との関係（相関）の定式化
③ 気象要素との関係（相関）を定式化されたポートフォリオについてニューメレールとなるような価格過程の導入
④ ③のニューメレールを用いたリスクの市場価格の導出とそれを用いた確率測度変換による価格式の導出

確かに気象要素のインデックスは市場で取引などはなされていない．一方，これまでの金融デリバティブの価格評価のフレームワークはその取引されている資産（株や預金）のみによって構成されたポートフォリオに基づいて構成されている．その理由はモデルの必要概念として，市場の参加者は取引されている資産のみに限定して評価すれば足りるため，当然，投資資産という金融デリバティティブの枠組みから見れば，ポートフォリオの構成要素ではない気象要素のインデックスは明らかに異質であり，市場以外のリスクすなわち非完備市場という概念で対処せざるを得ない．そこで，その市場参加者の富の概念であるポートフォリオを従来の金融デリバティティブの構成から拡張し，気象要素のインデックスと関連した形で構成あるいは関連づける必要がある．つまり，ポートフォリオとは市場参加者の富であり，その市場参加者がウェザーデリバティブの取引を行うのは，富あるいはその一部が気象変動によってリスクにさらされている．つまり富の一部が特定の気象要素と相関をもって変動しているためである．そのような市場参加者のポートフォリオはどういうものかを特定することが必要である．そこで，まず①と，そして②のステップが必要となる．Cao and Wei モデルでは配当$\delta(t)$を富（ポートフォリオ）として捉え，それが気温と過去も含めた形で相関があると仮定している．また，Davis モデルでは資産としてのガス$L(t)$を富（ポートフォリオ）と仮定しそれが気温と単純な線形関係にあると仮定し定式化している．

だが，これらの仮定は実証されていない．現在ウェザーデリバティブ市場が発展途上にあり，代表的な市場参加者がどのようなものか判然としない部分があるため，その富（ポートフォリオ）が気象とどのような関係（相関）があるかを実証・特定することは困難な状況にある．ここに標準的なモデルが存在しない理由があるのであるが，今後，市場が成長し代表的な市場参加者が特定され，富がどのようなポートフォリオとして表され，富がどのような形で気象リスクと関っているか，つまりどのような相関関係があるか，（それは，Davis モデルのように単純に線形関係の相関でモデル化されるかもしれないし，Cao and Wei モデルような多重マルコフ的な相関関係でモデル化されるかもしれない．さらに言えば非線形な関係が導出されるかもしれない．）明らかになれば定式化は可能であろう．

続いて，③のステップであるが，これについては，Platen and West モデルにおけるＧＯＰの構築に該当する．また，Davis モデルにおいては市場参加者の効用が最大となるガス$L(t)$で，①及び②のポートフォリオにおいて市場の共通の基準となる価格過程，つまりその割引過程がマルチンゲールとなるような価格過程の探索である．Platen and West モデルでは，growth optimal という条件によって，また，Davis モデルではポートフォリオとなるガス$L(t)$が対数正規分布に従うという仮定を与えるによってこの点を保証している．特に，Platen[2002]と Buhlmann and Platen [2002]が与えた growth optimal という条件は一般化された概念であり，実際①及び②においてどのようなポートフォリオが構築されるかによるが，多様なポートフォリオに対し応用が可能ではないかと考える．

最後に④のステップであるが，③のニューメレールによって基準を与えることによりプレミアムとして評価されるべきリスクが定量化される．すなわち，富の過程の成長，つまり期待値と基準（ニューメレール）との差を，富の過程の変動幅，例えば分散値等と定量的に比較することによって得られる．ただ，これについては，富と気象要素の関係（相関）が非線形な関係にある場合や複雑な関係にある場合は，解析的に求めることは困難となるであろう．しかし，この点は昨今のコンピュータの性能とシミュレーション技法の進歩によって容易に克服されるものと考える．また，測度変換に関しては，金融工学と保険数理の融合という立場から，エッシャー変換（Gerber and Shiu[1994]）等の議論がなされている．この点，ウェザーデリバティブは保険の立場から代替的リスク移転(alternative risk transfer(ART))という位置付けがなされており，金融工学と保険数理の融合というテーマの題材として，ウェザーデリバティブのプライシングの議論が発展することも期待される．

7 最後に

以上，ウェザーデリバティブのプライシング理論に関する数理ファイナンスの側面における取り組みとその方向性について展望した．これは，端的に言えば，将来のキャッシュ･フローの期待値を割り引くというものであった．次の課題は，キャッシュ･フローの期待値をどう求めるかという問題である．言い換えれば，キャッシュ･フローの確率分布をどのように求めるかということである．ただし，これについては，第１章で述べたように，その詳細を本稿では議論しない．ここでは，その概観を示すことによって，次の議論の機会への橋渡しとしたい．

キャッシュ･フローの確率分布を求める取り組みに関しては，実際には，ヒストリカル・データを分析することによって行われる．その方法としては大きく２つに分けられる．１つは，burn analisys という方法で，ヒストリカル・データから直接 HDD や CDD のインデックス値を計算し平均するという方法である．また，もう１つは，いわばシミュレーション・アプローチで，ヒストリカル・データから確率モデルや統計モデルを構築してシミュレーションにより確率分布を求める方法である．簡潔で計算が容易という点では burn analisys が有効であるが，応用を考えるとシミュレーション・アプローチの方が優位であることは明白であろう．

ただ，一言でシミュレーション・アプローチといっても，様々な方法が提案されている．この分野におけるこれまでの先行研究は主に気温過程によるも

のであるが，例えば，Dornier and Queruel [2000]では平均回帰過程を拡張したモデルを示しており，Dischel[1999]も平均回帰過程をベースにした D1-Model というモデルを考案している．また，ARモデルでは，Moreno[2000]や，先のCao and Wei[2000]にも用いられているし， Davis[2000]もシミュレートにあたってはARモデルを用いている．一方，Torro，Meneu and Valor[2001]では条件付分散変動構造（conditional heteroskedasticity）を取り入れたモデルを提案しており，刈屋，遠藤，牛山[2003]では東京のデータを用いて分散変動モデルを提案している．さらに，気温データは長期の自己相関すなわち長期記憶（long memory）を持つとされており，この視点から，Brody,Syroka and Zervos[2002]では非整数ブラウン運動（fractional Brownian motion）によるモデル化を，そしてCaballero,Jewson and Brix[2002]では非整数ARIMAモデル（fractional ARIMA model）を用いたモデルを提案している．また，宮崎[2003]では気温パスのモデル化としてマルコフ型モデルを採用している．

ウェザーデリバティブのプライシングの手法は未だ発展途上にあると言える．それは，ウェザーデリバティブが気象と金融・保険という複合的な領域の新たな産物であり，その市場が完全に形成されていないことが要因と考えられる．今後，電力市場の自由化等による新たなプレイヤーの参加が増大し，気象リスクというものに対する考え方がさらに一般的になることによって，ウェザーデリバティブ市場がより完成されたものになるであろう．それにより，ウェザーデリバティブのプライシング理論がさらに洗練されたものとなることを期待する．

謝辞

本稿をまとめるにあたり，査読者の方々より有益なコメントを頂きました．ここに謝意を表します．

参考文献

岩城秀樹[1998]，『デリバティブ - 理論と応用 - 』，朝倉書店．

刈屋武昭，遠藤良輔，牛山史郎[2003]，「分散変動（SV）モデルによる東京の日次平均気温の予測分布（第1版）－気温デリバティブ・プライシングモデル－」，http://www.kier.kyoto-u.ac.jp/fe-tokyo /workingpapers/KIER_fe_wp04.pdf，2004/09/16.

木島正明[1994]，『ファイナンス工学入門，第Ⅱ部：派生証券の価格付け理論』，日科技連出版社．

土方薫 [2000] 『天候デリバティブ』，シグマベイスキャピタル．

宮崎浩一[2003]，「天候デリバティブにおけるマルコフ連鎖型モデルに基づく評価法の提案」，『オペレーションズ・リサーチ』，48，218-230.

Black,F. and M.Scholes[1973]， "The Pricing Options and Corporate Liabilities"，*Journal of Political Economy*, 3, 637-654.

Brody,D[2000]，『現代ファイナンス数理』，日本評論社．

Brody,D.， J.Syroka， and M.Zervos [2002]， "Dynamical pricing of weather derivatives"，*Quantitative Finance*, 2, 189-198.

Buhlmann, H.， and E.Platen [2002]， "A Discrete Time Benchmark Approach for Finance and Insurance"， *Research Paper Series*， 74， Quantitative Finance Research Centre, University of Technology, Sydney.

Caballero,R.， S.Jewson， and A.Brix，[2002]， "Long memory in surface air temperature: detection,modeling and application to weather derivative valuation"，*Climate Res.*, 21, 127-140.

Cao,M. and J.Wei[2000]， "Equilibrium Valuation of Weather Derivatives"， working paper, University of Toronto (http://www.rotman.utoronto.ca/~wei/research/hddcdd.pdf，2004/09/16).

Davis,M.[1998]， "Option pricing in incomplete markets"，*Mathematics of Derivative Securities*, eds. M.A.H. Dempster and S.R. Pliska, Cambridge

University Press, 216-226.

Davis, M. [2000], " Pricing weather derivatives by marginal value" , *Quantitative Finance*, 1, 305-308.

Dischel, B [1999]. "The Fledgling Weather Market Takes Off - Part 5: The D1 Stochastic Temperature Model For Valuing Weather Futures and Options" , *Applied Derivatives Trading*, April.

Dornier, F. and M. Queruel [2000]. "Caution to the Wind" , *Energy and Power Risk Management*, August.

Gerber, H.U. and Shiu, E.S.W. [1994], "Option Pricing by Esscher Transforms." , *Transactions of the Society of Actuaries*, 66, 99-140.

Duffie, D. [1992], *Dynamic Asset Pricing Theory*, Princeton University Press.

Moreno, M. [2000], "Riding the Temp" , Published in FOW, Special Weather Derivatives Supplement (December).

Platen, E. [2002], "Arbitrage in Continuous Complete Markets" , *Advances in Applied Probability*, 34, 3, 540 - 558.

Platen, E. and J. West [2003], "Fair Pricing of Weather Derivatives," Research Paper Series 106, Quantitative Finance Research Centre, University of Technology, Sydney.

Torro, H., V. Meneu and E, Valor [2001] , "Single Factor Stochastic Models With Seasonality Applied to Underlying Weather Derivative Variables" , working paper in European Financial Management Association.

The Theory and Methodology of Weather Derivatives Pricing

Masatsugu Wakaura

Department of Statistical Science, The Graduate University for Advanced Studies,
4-6-7, Minami-Azabu, Minato-ku, Tokyo 106-8569, Japan
E-mail addresses : wakaura@ism.ac.jp

Abstract

Weather derivatives are contingent claims which are written on the index of meteorological elements (e.g. air-temperature, rain-fall etc.). Using them, one can hedge the profit fluctuation risk caused by the fluctuation of meteorological elements. There is, however, no standard pricing theory of weather derivatives. That is the reason why one cannot utilize the Black-Scholes option-pricing formula, that is, no-arbitrage pricing theory, since the indices of meteorological elements are not tradable assets in the markets. This paper accounts for the reason, and shows that weather derivatives are incomplete markets, and that the formulation of the market price of risk is necessary for the pricing. From those points of view, preceding studies are interpreted, and the pricing method of weather derivatives is shown in this paper.

Key words : weather derivatives, option-pricing, market price of risk, incomplete market, ART(alternative risk transfer)