研究論文

気温過程における時系列構造の季節周期性と気温デリバティブ

若浦雅嗣*

2005年9月28日投稿
2006年2月2日受理

概要

ウェザーデリバティブは気温等の気象要素のインデックスを取引対象とする金融商品であり，気象要素の変動による収益の変動リスクをヘッジすることができる．そのプライシングは，将来の期待キャッシュ・フローを割り引くという方法が用いられるが，将来の期待キャッシュ・フローを求めるためには，対象となる気象要素の変動の確率分布をシミュレートすることからこれらをモデル化する必要がある．本稿においては，これまでの先行研究におけるモデル化の取り組みを踏まえた上で，気温過程の時系列構造における季節周期性を示し，この季節周期性についてARモデルをフーリエ形式による時変係数モデルに拡張した新たなモデルの当てはめを試みる．また，それを用いた気温デリバティブの評価では季節によるプライスの違いを示す．

キーワード：ウェザーデリバティブ，プライシング，季節周期性，時変係数ARモデル，フーリエ形式

1 はじめに

ウェザーデリバティブは，気温等の気象要素のインデックスを取引対象とした金融商品であり，気象要素の変動による収益の変動リスクをヘッジすることができる．対象となる気象要素も，当初の気温から風力，積雪量，さらには湿度や台風等も取引の対象となっており，インデックスも冷房や暖房の指標であるHDDやCDDの他，日次平均値の積算値，あるいは所定値を基準とした日数カウント等様々な形で発展している．

そのウェザーデリバティブのプライシングについては，市場における価格評価手法という点では，気象要素が取引可能な資産ではないこと，ならびに市場の非完備性からスタンダードな理論は存在しない．ただ，若浦[2005]で示した通り，いくつかの理論が存在し，それぞれ気象要素にかかるリスクの市場価格を織り込む手法は異なるものの，根本的なフレームワークとしては，将来の期待キャッシュ・フローを何らかの方法で割り引くという手法が用いられる．そこで問題となるのが，将来のキャッシュ・フローをいかに表現するかということである．

*総合研究大学院大学 複合科学研究科 統計科学専攻
〒106-8569 東京都港区南麻布4－6－7
E-mail: wakaura@ism.ac.jp

具体的には，対象となる気象要素の確率分布がどのようになるか，換言すれば，対象となる気象要素を発生させる真のモデルの推定，すなわちそれを表現する統計モデルの構築が課題となる．

本稿では，ウェザーデリバティブの対象となる気温過程のモデル化について，これまでの先行研究を踏まえつつ，新たな視点から季節周期性を表現するモデルの当てはめを試みる．

続く第２章では，気温過程のモデル化に関する先行研究を紹介する．第３章では，本稿で取り扱うデータとその周期構造を示すとともに，それを表現するためにフーリエ形式による時変係数 AR モデルの当てはめを試みる．第４章では，それによるシミュレーションと気温デリバティブのプライシング例を示す．

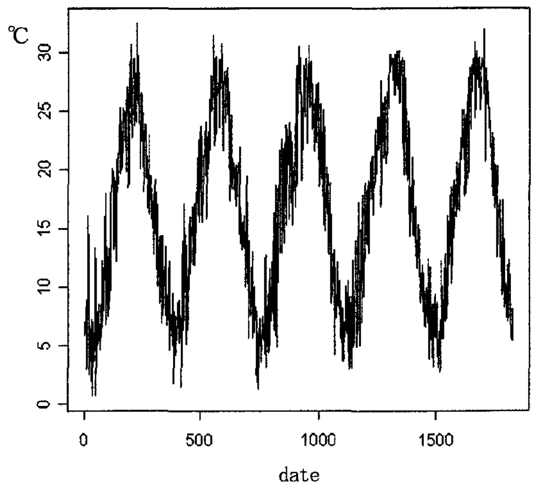


図１．気温日次平均値（東京・大手町）

2 気温過程のモデル化の試み

先に述べたが，ウェザーデリバティブの取引形態には様々なものがある．対象となる気象要素についても，気温，降水量，積雪量，湿度，風力等があるが，気温については，ウェザーデリバティブが登場した当初からの取引対象であり，上場され取引量も多いことから，そのモデル化も数多く議論されている．もちろん，ウェザーデリバティブ登場以前にも気温過程は，その季節周期性や自己相関から，季節調整法や AR あるいは ARMA モデル等時系列モデルの議論の対象となってきた．だが，ウェザーデリバティブが登場してからは，プライシングのためのシミュレーションを目的として新たなモデルが考案されている．単に季節周期性や自己相関だけではなく，分散や長期記憶性等様々な角度からのアプローチがなされている．本章では，次章のモデル化にあたり，これまでの先行研究を紹介することによって，気温過程がどのような特性を持つデータであるかを明らかにする．

図１は地上観測データ（気象庁提供）の東京大手町の日次平均値 1996 年から 2000 年（5 年）をプロットしたものである．明らかな季節周期性と平均まわりの変動という特徴が見てとれる．

この特性を表現するにあたって，まず，Vasicek [1977] の提案した金利の変動過程を表す平均回帰過程モデルを拡張し，対象を年間の気温過程 $\{T_n ; n=1,2,\cdots,365\}$ に置き換え，毎年 n 日の標準（平均）気温 $\{\Theta_n ; n=1,2,\cdots,365\}$ を用いて $T_n-\Theta_n$ が離散時間 Vasicek モデルに従う形式による次のモデルが挙げられる．

$$T_{n+1}=T_n+(\Theta_{n+1}-\Theta_n)+a(\Theta_n-T_n)+v_n\,, \qquad (1)$$

$$v_n \sim N(0,\sigma^2)$$

ここで，a は Θ_n に回帰する速さを表すパラメータ，v_n は誤差項で平均 0，分散 σ^2 の正規分布に従うホワイトノイズを仮定する．右辺第２項は Θ_n の日次変化を表し，気温の季節的な変化を取り入れた形式となっている．(1) の平均回帰形式の気温過程をベースにしたモデルとしては，Dischel[1999] や Dornier and Queruel [2000] が挙げられる．

一方，図２は図１と同じデータの 40 年分（1961～2000 年）から季節周期成分を除いた残差データの自己相関をプロットしたものであるが，前日だけでなく何日か前からの過去の履歴に依存しているのがわかる．ここから，AR や ARMA といった時系列モデルのクラスも利用されており、それらは，Moreno

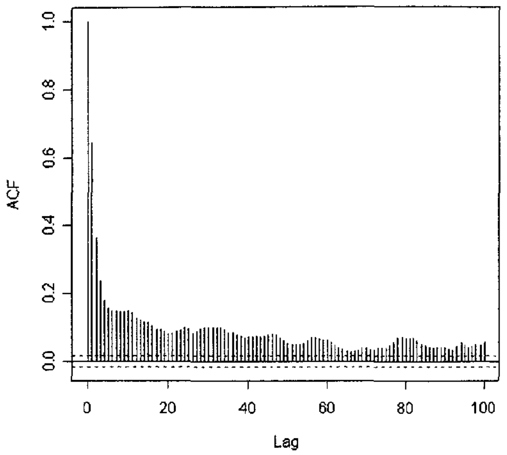


図２．残差データの自己相関
（点線は 95%信頼区間）

[2000]，Cao and Wei[2000]，Davis[2000]でシミュレーションにおいて使用されている．

また，平均のみならず分散の構造についても議論がなされている．Cao and Wei[2000]ではアメリカのデータから分散が年周期性を持つことを示し，若浦[2004]では一般化加法モデルを用いて日本における分散の年周期性とその形状を明らかにしている．一方，条件付分散変動構造を用いたモデル化も試みされており，Torró et al.[2001]では，平均回帰過程をベースに平均値に周期構造を与え，誤差項に条件付分散変動構造を取り入れた拡散係数与える次のモデルを提案している．

$$\begin{aligned}\Delta T_n &= [a_0 + a_1 T_n + a_2 \cos(2a_3 \pi n/365 + a_4)]\Delta n \\ &\qquad + \varphi_n T_n^{\gamma} \Delta W_n, \\ \Delta W_n &= \varepsilon_{n+\Delta n}\sqrt{\Delta n}, \\ \varphi_{n+\Delta n}^2 &= b_0 + b_1 \varepsilon_n^2 + b_2 \varphi_n^2,\end{aligned} \tag{2}$$

ここで，Δn は時間間隔を表し，$\Delta T_n = T_{n+\Delta n} - T_n$ は気温の変化を表す．また，W_n は標準ブラウン運動を離散化したもので，φ_n はその拡散係数である．一方，ε_n は気温の平均値に対する残差で，標準正規分布に従うものと仮定している．(2)のモデルはパラメータ a_0，a_1，a_2，a_3，a_4 により平均の周期トレンドを，b_0，b_1，b_2 で条件付分散変動の構造を表現し，さらにパラメータ γ の設定により，Vasicek[1977]、Cox et al.[1985]、Brennan and Schwartz[1982]等の平均回帰過程モデルを表現できるように一般化されている．

また，刈屋ほか[2003]では東京のデータを用いて分散変動モデルを提案している．

さらに，図２の長く尾を引く自己相関の形状からその長期記憶性が示唆される（なお，ここでは本稿の目的とは異なるため，ハースト指数等の厳密な議論は行わない）．Brody et al. [2002]では，非整数ブラウン運動によるモデル化を提案し，そのような気温過程の上に書かれた条件付請求権の価格過程もまた長期記憶性を持つことを示した．また，Caballero et al. [2002]では，非整数 ARIMA モデルを実際にデータに当てはめて議論するとともに，季節によって自己相関の次数が異なることも示唆しており，Jewson and Caballero [2003]では次のような移動平均によって平滑化されたデータを項としたARモデル

$$y_n = \sum_{j=1}^{M} a_j x_{m_j} + v_n, \quad x_{m_j} = \frac{1}{m_j}\sum_{k}^{m_j} y_{n-k}, \tag{3}$$

$$v_n \sim N(0, \sigma^2)$$

をあてはめ，(3)式の係数 a_j を移動平均により季節変化を与えた形で推定し，自己相関の季節性に関するモデル化を試みている．

3 モデル化

前章で示したように，気温過程は様々な特性を持つが故に，様々な角度からアプローチが試みられているが，その構造は大きく分けると，平均の構造，分散の構造，そして共分散（自己相関）の構造に分けることができる．本稿では，この自己相関の構造を「時系列構造」と呼ぶこととし，Caballero et al. [2002]や Jewson and Caballero [2003]が指摘した時系列構造の季節性に着目し新たな視点でモデルの当てはめを試みる．すなわち，気温データから平

均の周期と分散の周期を取り除いた後の残差データの自己相関に周期性が存在することを示すとともに，さらにそのパワースペクトルによる表現を念頭においてモデルを構築する．パワースペクトル密度関数と自己共分散関数（あるいは，正規化パワースペクトル密度関数と自己相関関数）は，フーリエ変換・逆変換の関係から数学的には全く同一のものとみられるが，パワースペクトルは情報処理の観点から人間が目で見た場合の著しい見やすさがあり（赤池・中川[1972]），本稿で取り上げる時系列構造の季節周期性を直截的に可視化し比較することができる．

3.1 データ

解析するデータは，地上観測データ（気象庁提供）の日次平均気温データで，1961～2000の40年分（データ数14600．なお，閏年の2月29日は除外した．）である．地点はシカゴ・マーカンタイル取引所にも上場されていることを鑑み，東京（大手町）と大阪を取り上げる．

また，若浦[2004]が示すように，気温データにはその平均構造と分散構造に明確な周期性が確認される．従って，気温データ$\{T_n\,; n=1,2,\cdots,14600\}$に対し，フーリエ形式による多項式，

$$T_n=\mu_n+\upsilon_n\varepsilon_n\,,\ \ \varepsilon_n\sim N(0,1) \tag{4}$$

$$\mu_n=a+\sum_{j=1}^{\bar{P}}b_j\sin 2\pi jn/365+\sum_{j=1}^{\bar{Q}}c_j\cos 2\pi jn/365\,,$$

$$\upsilon_n^2=\tilde{a}+\sum_{j=1}^{\tilde{P}}\tilde{b}_j\sin 2\pi jn/365+\sum_{j=1}^{\tilde{Q}}\tilde{c}_j\cos 2\pi jn/365\,,$$

を当てはめて平均と分散の季節周期μ_n，υ_n^2を推定し，これを標準化したデータ$y_n=\dfrac{T_n-\hat{\mu}_n}{\hat{\upsilon}_n}$を用いる．

3.2 パワースペクトルの構造

まず，季節性の存在を確認するために，次のようにデータを月別に分割する．

$$\{d_j=y_{1\omega+t_j}\,,\cdots,y_{1\omega+w_j}\,,y_{2\omega+t_j}\,,\cdots,y_{2\omega+w_j}\,,\cdots$$

$$,y_{39\omega+t_j}\,,\cdots,\ y_{39\omega+w_j}\,;j=1,2,\cdots,12\,,\omega=365\}\ \ ,$$

ここで，$\{t_j\,;j=1,2,\cdots,12\}$は$j$月の初日の年間通し日数番号で，例えば1月は1，2月は32，3月は60となる．また，$\{w_j\,;j=1,2,\cdots,12\}$は$j$月の末日の年間通し日数番号で，例えば1月は31，2月は59，3月は90となる．そして，次の通り月別データセットd_jの各要素$\{d_{j,n}\,;n=1,2,\cdots,N\}$に対し$M$次の履歴を持つ形で計画行列

$$\begin{bmatrix} y_{1\omega+t_j-1} & \cdots & y_{1\omega+t_j-M} & d_{j,1} \\ y_{1\omega+t_j} & \cdots & y_{1\omega+t_j-M+1} & d_{j,2} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y_{39\omega+w_j-1} & \cdots & y_{39\omega+w_j-M} & d_{j,N} \end{bmatrix}, \tag{5}$$

を構成し，(5)に対して，ハウスホルダー変換による最小二乗法（北川[1993]参照）を用いてARモデル

$$d_{j,n}=\sum_{m=1}^{M}a_m d_{j,n-m}+v_n\,,\ \ v_n\sim N(\,0\,,\sigma^2\,)\,, \tag{6}$$

を当てはめる．なお，次数Mの選択についてはAICを用いた．

また，(6)のARモデルの推定値から，周波数fにおけるパワースペクトル$p(f)$は次式により求められる（赤池・中川[1972]）．

$$p(f)=\frac{\sigma^2}{\left|1-\sum_{m=1}^{M}a_m e^{-i2\pi fm}\right|^2}\,, \tag{7}$$

ここで，iは虚数単位を表す．

図3は，(6)及び(7)式により求めたパワースペクトルを月別にプロットしたものである．横軸はlog

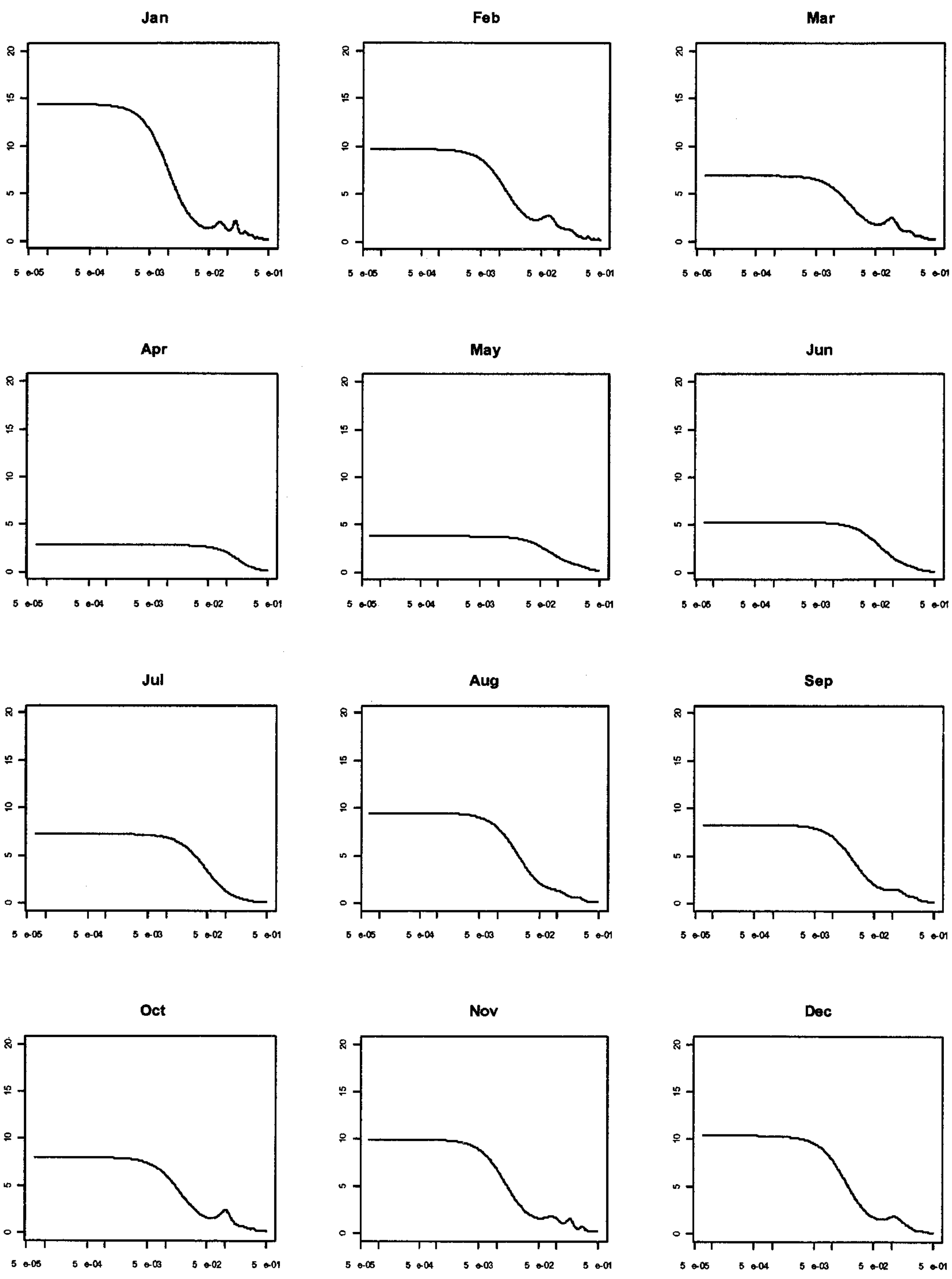


図 3. (a) 月別データのパワースペクトル（東京）

横軸は log スケールの周波数，縦軸はパワースペクトル．

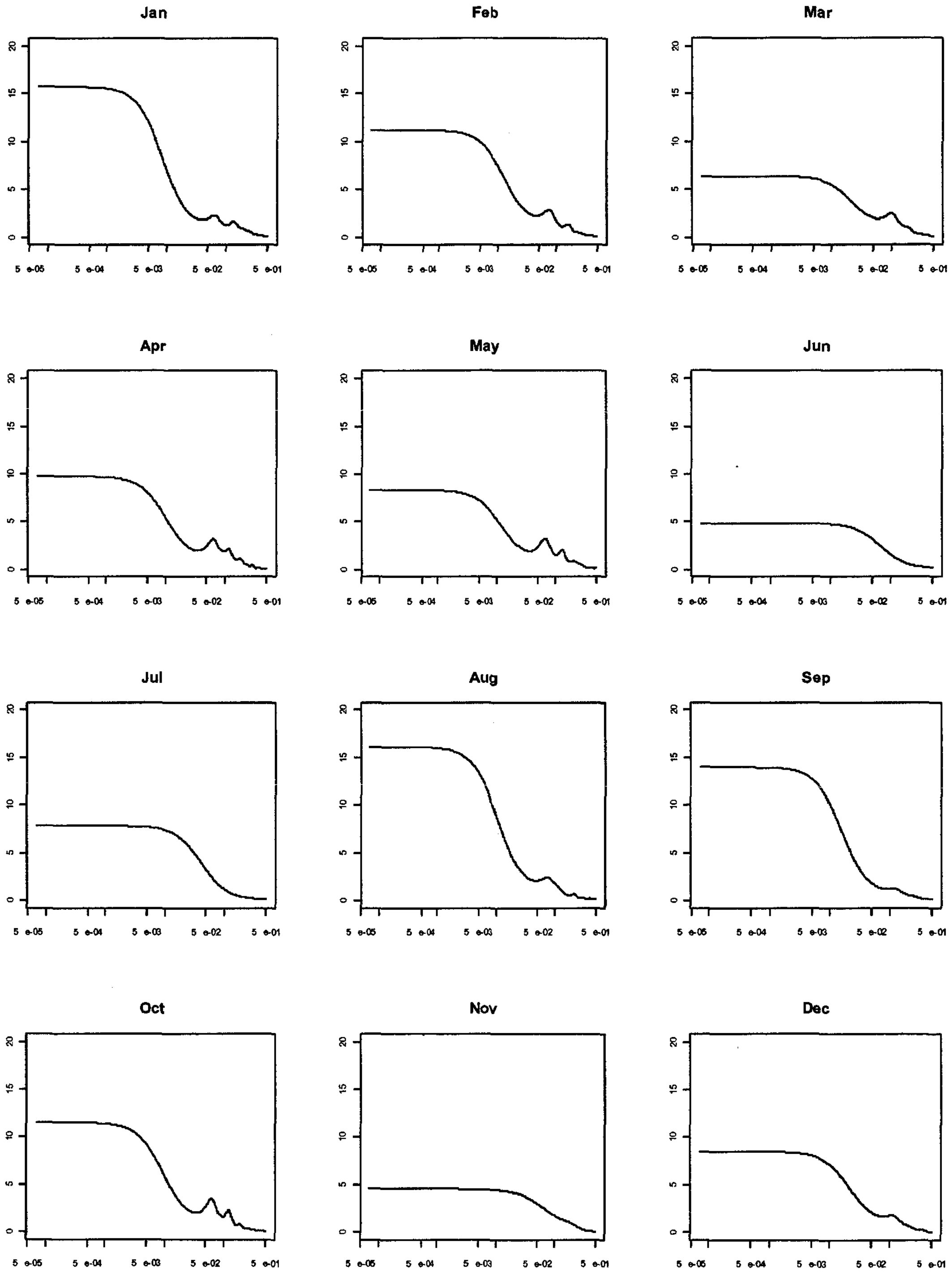


図 3. (b) 月別データのパワースペクトル（大阪）
横軸は log スケールの周波数，縦軸はパワースペクトル．

表 1. 最小 AIC と AR 次数

(a) 東　京

データセット		最小 AIC	次数
分割データ	1月	2915.2	17
	2月	2586.8	15
	3月	2938.9	10
	4月	2868.0	2
	5月	3011.1	3
	6月	2600.9	3
	7月	2227.9	3
	8月	2452.5	7
	9月	2671.3	7
	10月	2949.0	9
	11月	2901.3	11
	12月	2882.0	9
	合計	33004.9	
非分割データ		33251.7	33

(b) 大　阪

データセット		最小 AIC	次数
分割データ	1月	2662.4	15
	2月	2300.1	12
	3月	2654.7	9
	4月	2492.0	16
	5月	2866.8	15
	6月	2680.6	1
	7月	2331.7	1
	8月	2473.2	13
	9月	2398.3	7
	10月	2600.9	15
	11月	2507.5	3
	12月	2626.0	8
	合計	30594.1	
非分割データ		30741.5	44

スケールの周波数，縦軸はパワースペクトルである．いずれもパワースペクトルが月毎に変化している様子が見てとれる．また，表 1 は，月別に分割したデータセットに AR モデルを当てはめたものと，分割せずに 40 年の全データに対し AR モデルを当てはめたものについて，最小 AIC とそれにより選択された AR 次数を比較したものである．各月の AIC の合計と全データ AIC を比較すると，各月の AIC の合計が下回っており，通年で考えるよりも月単位で構造を変化させることによってパフォーマンスの優れたモデルを構築できることが示唆される．

3.3 FFAR によるモデル化

以上の議論から，時変係数 AR モデルを拡張し，係数に周期構造を持たせた次の季節周期係数 AR モデル(Fourier Form Auto-Regressive <FFAR> model, Wakaura and Ogata[2006])の当てはめを試みる．

$$y_n = \sum_{m=1}^{M}\{a_m + \sum_{j=1}^{P} b_{mj}\sin 2\pi j(n-m)/365 + \sum_{j=1}^{Q} c_{mj}\cos 2\pi j(n-m)/365\}\, y_{n-m} + v_n\,, \quad (8)$$

$$v_n \sim N(0,\sigma^2)\,.$$

なお，推定にあたっては，先の AR 同様，ハウスホルダー変換による最小二乗法を用いて AIC による次数選択を行った．

表 2 は，通常の AR モデルと FFAR モデル の最小 AIC とそれによって選択された次数を比較したものであるが，東京，大阪ともに AIC は FFAR の方が向上している．また，FFAR モデルのパワースペクトルについて，第 n 日のパワースペクトルを求める形で (7) 式を次の通り拡張する．

$$p_n(f) = \frac{\sigma^2}{\left|1 - A_n(f)\right|^2},$$

$$A_n(f) = \sum_{m=1}^{M}\{a_m + \sum_{j=1}^{P} b_{mj} \sin 2\pi j(n-m)/365 + \quad (9)$$

$$\sum_{j=1}^{Q} c_{mj} \cos 2\pi j(n-m)/365\} e^{-i2\pi fm} \quad ,$$

図4は(9)式により求めたFFARモデルのパワースペクトルをプロットしたものである．図の横軸は logスケールの周波数（なお，“y”，“q”，“m”，“w”の表示は，それぞれ1年，四半期，月，週の周期に相当する周波数を表している），縦軸は n に対応する日付で目盛は月（1月～12月）を表し，パワースペクトルの大きさは等高線で表現している．東京，大阪ともに1月と8月あたりにピークが認められ季節周期性を捉えていることがわかる．

4 シミュレーション

実際に，シミュレーションによる気温デリバティブのプライシング例を示す．

ここで，気温デリバティブとは，気温値をインデックスとしたオプション取引である．そのプライシングについては，本来，何らかの投資家のリスク選好を含むような形で行うか，将来の期待キャッシュ・フローにリスクプレミアムを付加するような形で行われなければならない．しかし，第1章で指摘したように，気温が取引可能な資産ではないことや市場の非完備性からそれらの評価には様々な議論があり，さらに本稿の目的はむしろ予測分布の評価であることから，いわば投資家のリスク選好やリスクプレミアムは中立的であると仮定して，それらを付加することなく単に将来の期待キャッシュ・フローを求める形でプライシングを行う．

シミュレーションは，1961年1月から2000年12月のデータにより推定した係数に乱数を加え，2001年1月1日～12月31日の所定の日をスタートとする一定期間を予測する形で初期値を与え実行した．なお，シミュレーション回数は1000回とし，通常のARモデルの結果と比較を行った．

図5は，1月から12月の月別シミュレーション結果のヒストグラムである．各月1日をスタートとし各月末日までシミュレートしたものである．また，表3にはその月別シミュレーション結果の基本統計量を示した．図5と表3はそれぞれ通常のARモデルと FFARモデルを比較して示してある．東京については，平均と標準偏差で7月，8月あたりの違いが注目される．また，大阪の方も比較すれば8月の標準偏差に差が認められる．

さらに，シミュレーションされた標準化データ $\hat{y}_n$ を $\hat{T}_n = \hat{\mu}_n + \hat{v}_n \hat{y}_n$ として気温データに変換し，実際の気温デリバティブのプライシングについて ARモデルと FFARモデルの比較を行った．プライシングの設定は次の通りである．まず，気温のインデックスは，次のHDD，CDDとする．

$$\mathrm{HDD} = \max(18 - T, 0), \quad (10)$$

$$\mathrm{CDD} = \max(T - 18, 0). \quad (11)$$

また，契約方式はプットオプションで，約定期間の累積HDD／CDDとストライクDDによってペイオフが決まる．すなわち，プライス S は，

$$S = M\int_0^K (K - I)F(I)dI\,, \quad (12)$$

ここで，M は1DDあたりの取引単位（金額），K はストライクDD，I は約定期間の累積HDD／CDD，$F(I)$ は I の確率密度関数である．実際には，(12)式を離散化した次式によってプライシングを行う．

$$\hat{S} = M\sum_{I=0}^{K}(K - I)\hat{F}(I)\,, \quad (13)$$

ここで，$\hat{F}(I)$ は(10)あるいは(11)式とシミュレートされた気温データ $\hat{T}_n$ から推定される累積 HDD／CDDの予測分布である．なお，想定する契約内容は，HDDについては，約定期間が1月～2月，ストライクDD

表 2. 通常の AR モデルと FFAR モデルの最小 AIC と次数

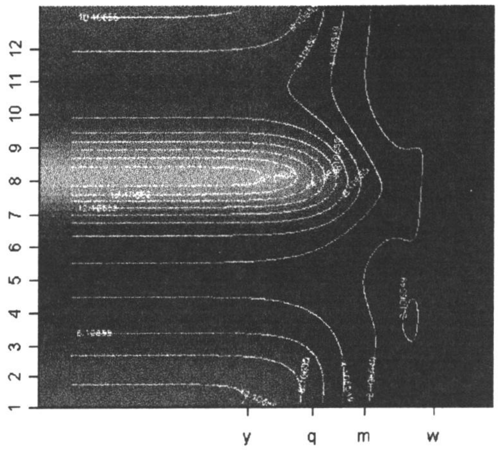
(a) 東 京

モデル	最小 AIC	次数		
		M	P	Q
AR モデル	34046.6	33	—	—
FFAR モデル	34003.5	10	3	3

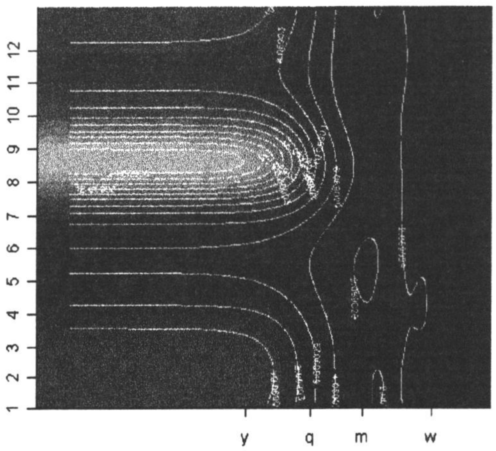
(b) 大 阪

モデル	最小 AIC	次数		
		M	P	Q
AR モデル	31544.2	32	—	—
FFAR モデル	31447.3	16	3	2

次数の M, P, Q は(8)式に対応したもので，M は自己相関，P は周期 sin 項，Q は周期 cos 項の次数をそれぞれ表す.



(a) 東 京



(b) 大 阪

図 4. FFAR のパワースペクトル

等高線はパワースペクトル，横軸は log スケールの周波数（“y”，“q”，“m”，“w” はそれぞれ 1 年，四半期，月，週の周期に相当する周波数），縦軸は日付（目盛は月）.

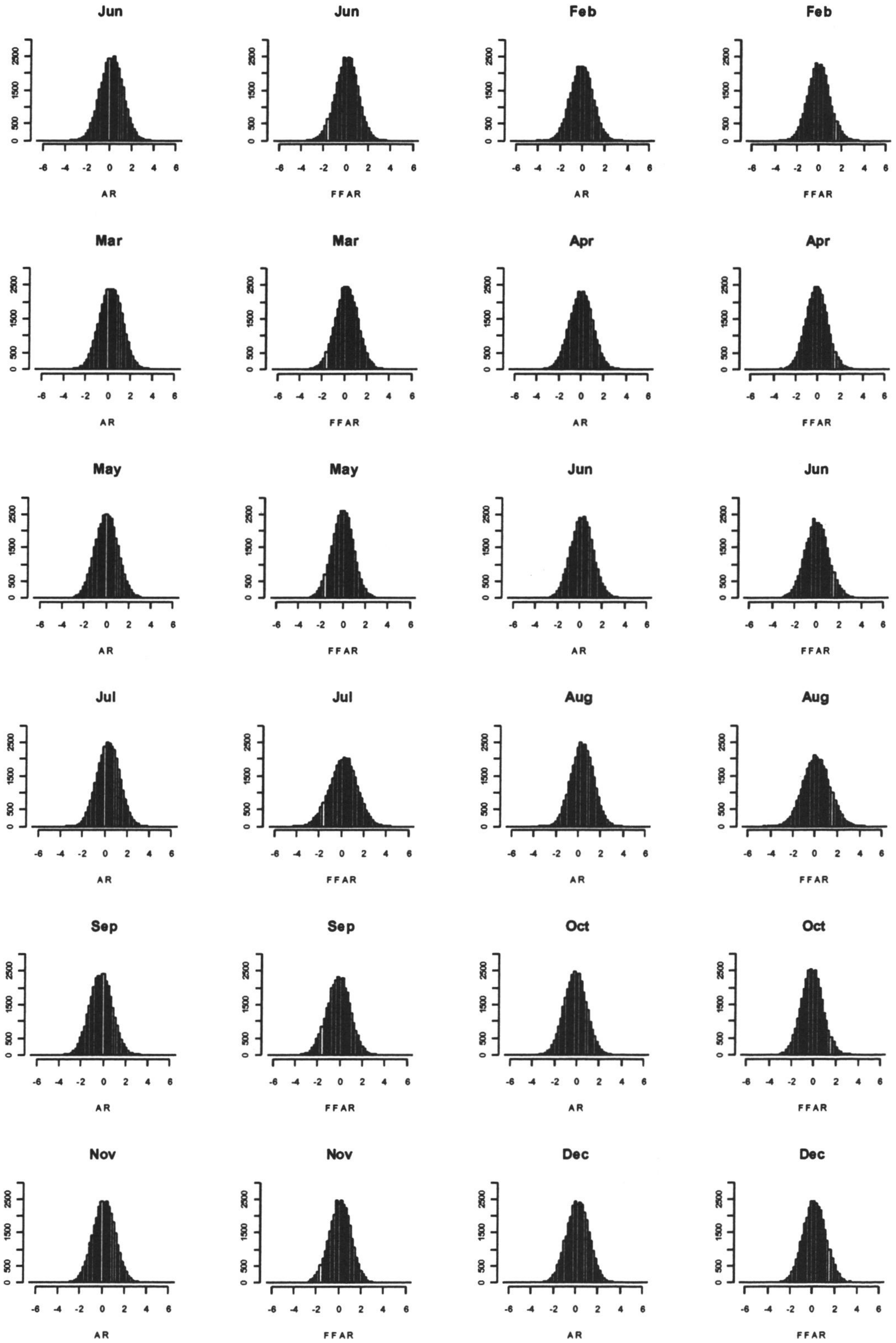


図 5. (a) AR と FFAR のシミュレーション結果の月別ヒストグラム比較（東京）

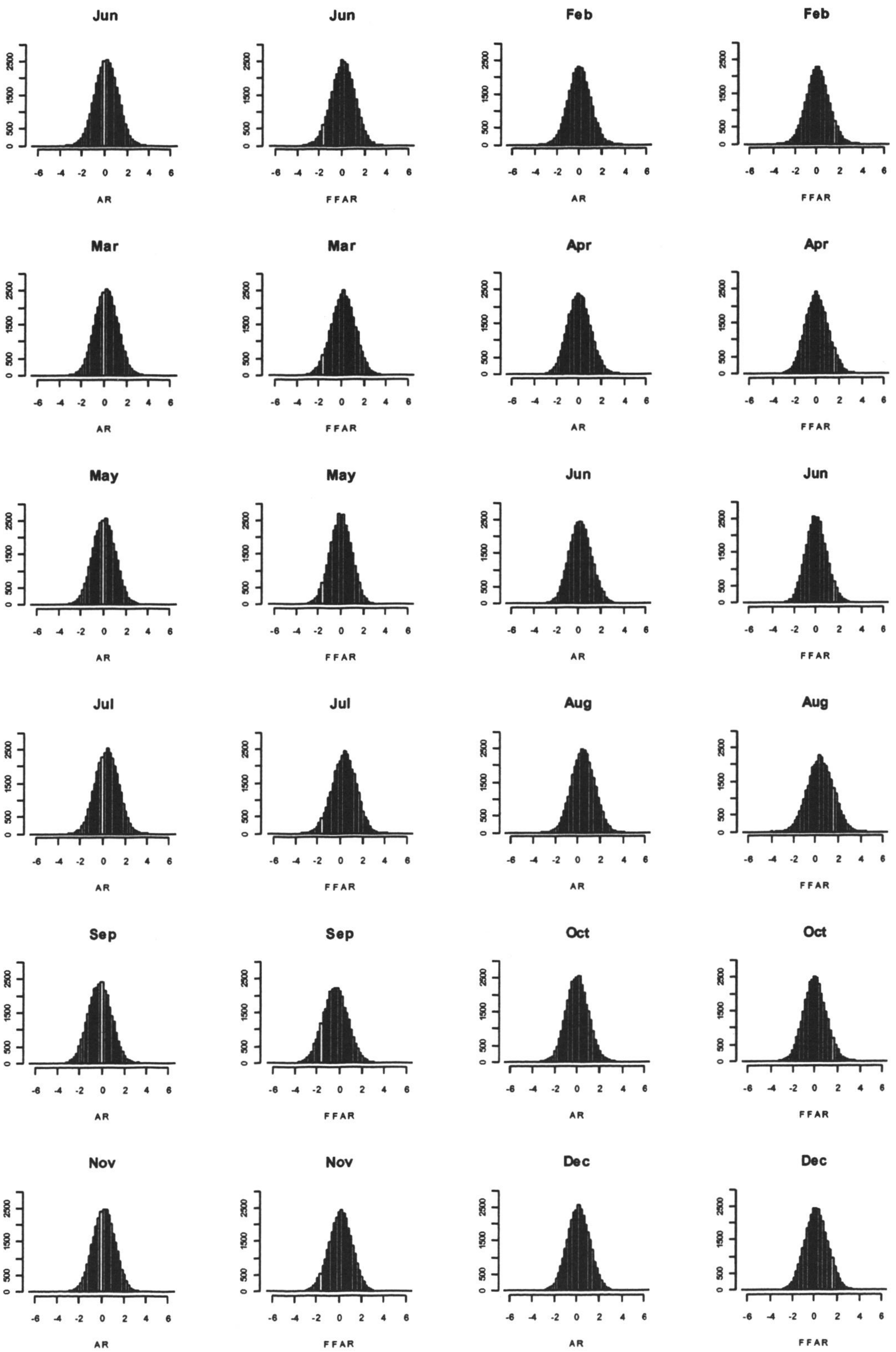


図 5. (b) AR と FFAR のシミュレーション結果の月別ヒストグラム比較（大阪）

表 3. シミュレーション結果の基本統計量

月	モデル	東京				大阪			
		平均	標準偏差	歪度	尖度	平均	標準偏差	歪度	尖度
1月	AR	0.2143	0.9930	-0.0168	3.0235	0.1743	0.9898	-0.0130	3.0224
	FFAR	0.0671	0.9914	-0.0148	3.0309	0.1035	0.9985	-0.0171	3.0154
2月	AR	-0.0820	0.9862	-0.0056	3.0345	0.0131	0.9812	-0.0209	3.0531
	FFAR	-0.0022	0.9795	0.0019	3.0423	0.0772	0.9970	-0.0165	3.0620
3月	AR	0.2855	1.0049	-0.0115	2.9930	0.2042	0.9862	-0.0100	3.0348
	FFAR	0.1763	1.0005	0.0049	2.9752	0.1611	1.0255	-0.0120	3.0287
4月	AR	0.0026	1.0310	-0.0324	3.0125	0.0176	1.0125	0.0199	2.9835
	FFAR	-0.0867	0.9736	-0.0405	3.0207	0.0312	1.0184	0.0243	2.9716
5月	AR	0.0219	0.9963	0.0265	3.0242	0.0554	0.9865	-0.0087	3.0332
	FFAR	-0.0546	0.9465	0.0192	3.0329	-0.0090	0.9326	-0.0078	3.0269
6月	AR	0.1929	0.9857	0.0026	3.0480	0.1721	0.9893	0.0341	3.0181
	FFAR	0.0399	1.0486	-0.0062	3.1011	0.0217	0.9373	0.0222	3.0349
7月	AR	0.3277	0.9924	-0.0081	3.0289	0.3748	0.9961	-0.0182	3.0030
	FFAR	0.1737	1.2143	-0.0213	3.0861	0.3412	1.0511	-0.0594	3.0258
8月	AR	0.3555	0.9986	-0.0178	3.0151	0.4731	1.0066	-0.0168	2.9756
	FFAR	0.1267	1.1849	-0.0229	3.0091	0.4213	1.1225	-0.0544	2.9854
9月	AR	-0.2078	0.9936	0.0241	3.0302	-0.2013	1.0065	0.0225	2.9804
	FFAR	-0.1373	1.0253	0.0108	3.0292	-0.3664	1.0663	0.0441	2.9945
10月	AR	-0.1274	0.9980	0.0258	3.0246	-0.0027	0.9832	0.0252	3.0563
	FFAR	-0.1134	0.9591	0.0153	3.0230	-0.0016	1.0002	0.0175	3.0598
11月	AR	0.2125	0.9868	-0.0051	3.0405	0.2331	0.9833	-0.0090	3.0469
	FFAR	0.1292	0.9680	-0.0181	3.0338	0.1400	1.0108	-0.0138	3.0446
12月	AR	0.2219	1.0049	-0.0094	2.9920	0.1676	0.9952	-0.0153	3.0036
	FFAR	0.2287	1.0071	-0.0176	2.9992	0.1776	1.0206	-0.0158	2.9862

は，東京，大阪ともに650DD．一方CDDについては，約定期間が7月～8月，ストライクDDは平均CDDの違いから，東京が450DD，大阪は530DDとした．なお，取引単位は1DDあたり100,000円とした．

図6は，想定契約のHDD／CDD予測分布である．通常のARによる結果とFFARによる結果をそれぞれ示した．また，表4はそれぞれの予測分布に基づき(13)式によりプライシングした結果を示してある．ARとFFARで差が表れているが，冬期（HDDの期間）に比べ夏期(CDDの期間)において差が顕著である．これは，Jewson and Caballero [2003]でも，モデルの季節性の有無による夏期のプライスの違いが指摘されており，本稿においても，図4における8月のパワースペクトルのピークや，図5や表3の月別シミュレーション結果における差異との関連も指摘されよう．以上から少なくとも，実際のプライシングにおいても季節性を無視することは妥当ではないと考える．

5 最後に

本稿においては，気温データにおける時系列構造の季節周期性と気温デリバティブについて議論してきた．

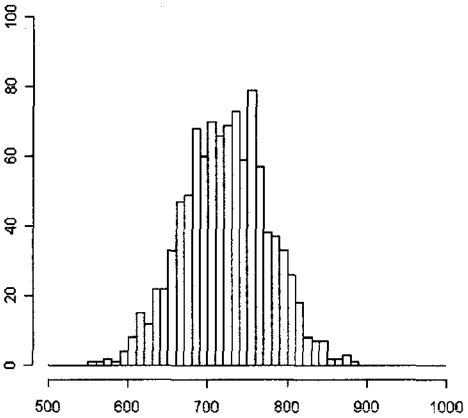
実際，季節毎に気温を支配するメカニズムは異なると考えられる．もちろん様々な気候的特性や気象事象が複雑に絡み合って影響するもので，1つの事象や側面に限定して述べるのは妥当ではないが，一例を述べるならば，日本においては，夏は太平洋高気圧とオホーツク海高気圧，一方，冬はシベリア高気圧や暖流の影響等が指摘されよう．すなわち，季節的に異なる発生メカニズムにより時系列の変動構造も変化すると考えるならば，その構造を表現するARモデルの係数を時間的（季節的）に変化させてモデル化することは，適切な方向性と考える．

一方，気温デリバティブについては，その季節周期性が極めて特徴的な気温過程を対象とする取引である以上，通常の金融デリバティブとは異なり，季節性を意識したプライシングが必要であると考える．本稿はその一例を示したものに過ぎないが，今後，その物理的な背景を明らかにするとともに，より最適な評価モデルの構築を目指したい．

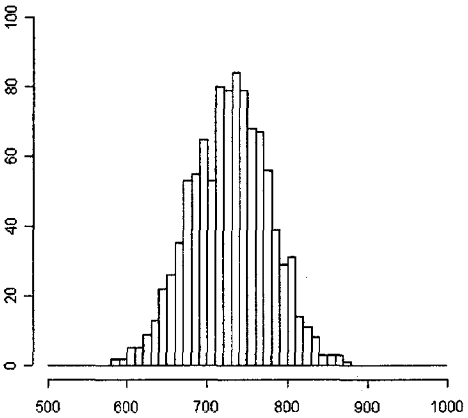
謝辞

本稿のモデル構築にあたり，在籍する総合研究大学院大学の指導教官である尾形良彦教授から多大なるご支援を頂きました．また本稿作成にあたり，査読者の方々から有意義なアドバイスを頂きました．ここに記して謝意を表します．

約定期間 1 月～2 月（HDD）の予測分布

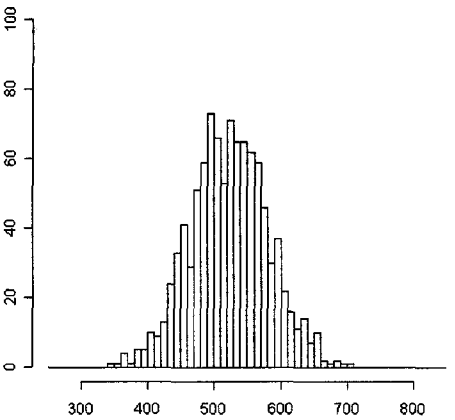


AR モデル
平均：722. 17
標準偏差：53. 72

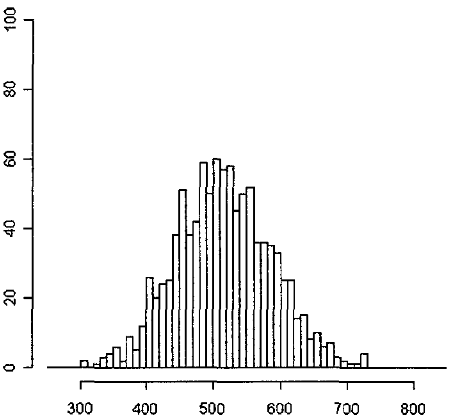


FFAR モデル
平均：728. 21
標準偏差：49. 08

約定期間 7 月～8 月（CDD）の予測分布



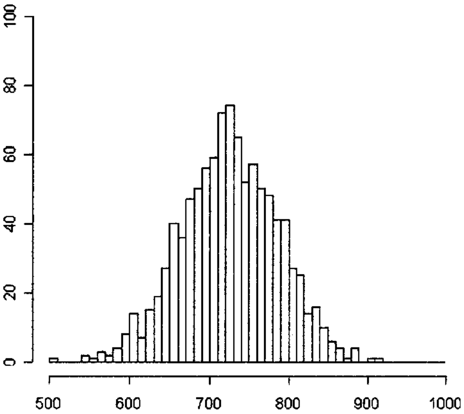
AR モデル
平均：522. 67
標準偏差：57. 94



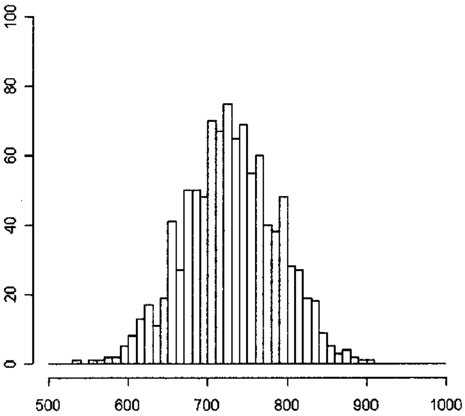
FFAR モデル
平均：515. 47
標準偏差：71. 23

図 6. (a) 想定契約の HDD／CDD 予測分布（東京）

約定期間1月~2月 (HDD) の予測分布

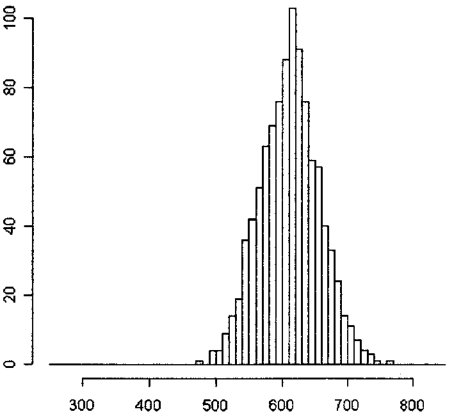


AR モデル
平均 : 725.49
標準偏差 : 60.76

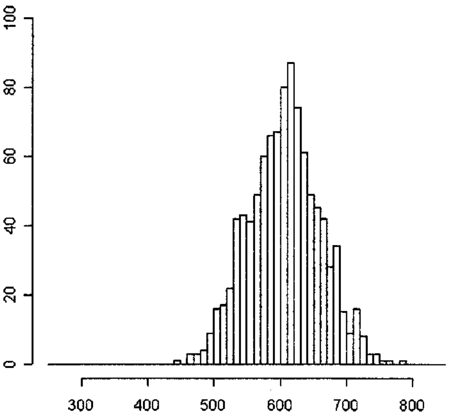


FFAR モデル
平均 : 729.87
標準偏差 : 58.32

約定期間7月~8月 (CDD) の予測分布



AR モデル
平均 : 611.61
標準偏差 : 44.49



FFAR モデル
平均 : 606.25
標準偏差 : 53.57

図6. (b) 想定契約のHDD/CDD予測分布 (大阪)

表4. プライシングの比較

(a) 東　京

約定期間		1月～2月	7月～8月
ストライクDD		650	450
プライス（円）	AR	223,734	282,834
	FFAR	115,374	656,664

(b) 大　阪

約定期間		1月～2月	7月～8月
ストライクDD		650	530
プライス（円）	AR	322,889	49,192
	FFAR	234,769	166,359

参考文献

赤池弘次，中川東一郎[1972]，『ダイナミックシステムの統計的解析と制御』，サイエンス社.

刈屋武昭，遠藤良輔，牛山史郎[2003]，「分散変動（SV）モデルによる東京の日次平均気温の予測分布（第1版）—気温デリバティブ・プライシングモデル—」，http://www.kier.kyoto-u.ac.jp/fe-tokyo /workingpapers/KIER_fe_wp04.pdf，2004/09/16.

北川源四郎[1993]，『ＦＯＲＴＲＡＮ７７時系列解析プログラミング』，岩波書店.

若浦雅嗣[2004]，「一般化加法モデルを用いた気温過程の平均・分散構造解析」，『応用統計学』，Vol.33，No.2，181-200頁.

若浦雅嗣[2005]，「ウェザーデリバティブの価格決定とその方向」，『リスクと保険』，Vol.1，21-39頁.

Brennan, M.J. and E.Schwartz [1982], "An equilibrium model of bond pricing and a test of market efficiency", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 17, 75-100.

Brody, D., J.Syroka, and M.Zervos [2002], "Dynamical pricing of weather derivatives", *Quantitative Finance*, 2, 189-198.

Cao, M. and J.Wei [2000], "Equilibrium Valuation of Weather Derivatives", working paper, University of Toronto (http://www.rotman.utoronto.ca/~wei/research/hddcdd.pdf, 2004/09/16).

Caballero, R., S.Jewson, and A.Brix [2002], "Long memory in surface air temperature: detection, modeling and application to weather derivative valuation", *Climate Res.*, 21, 127-140.

Cox, J.C., J.Ingersoll, and S.Ross [1985], "A theory of the term structure of interest rates", *Econometrica*, 53, 385-407.

Davis, M. [2000], " Pricing weather derivatives by marginal value", *Quantitative Finance*, 1, 305-308.

Dischel, B [1999], "The Fledgling Weather Market Takes Off - Part 5: The D1 Stochastic Temperature Model For Valuing Weather Futures and Options", *Applied Derivatives Trading*, April.

Dornier, F. and M.Queruel [2000], "Caution to the Wind", *Energy and Power Risk Management*, August.

Jewson, S. and R.Caballero [2003], "Seasonality in the statistics of surface air temperature and the pricing of weather derivatives", *Meteorol.Appl.*, 10, 367-376.

Moreno, M. [2000], "Riding the Temp", Published in FOW, Special Weather Derivatives Supplement (December).

Torró, H., V.Meneu, and E.Valor [2001], "Single Factor Stochastic Models With Seasonality Applied to Underlying Weather Derivative Variables", working paper in European Financial Management Association.

Vasicek, O. [1977], "An equilibrium characterization of the term structure", *Journal of Financial Economics*, 5, 177-188.

Wakaura, M. and Y.Ogata [2006], "A statistical model for air temperature anomalies", *In preparation*.

Seasonal Autocorrelation Structure in Air Temperature Processes and Weather Derivatives

Masatsugu Wakaura

Department of Statistical Science, The Graduate University for Advanced Studies,
4-6-7, Minami-Azabu, Minato-ku, Tokyo 106-8569, Japan
E-mail address : wakaura@ism.ac.jp

Abstract

Weather derivatives are contingent claims written on weather indices such as temperature and can hedge the fluctuation of profits caused by the change in the weather. The price of weather derivatives is determined by discounting the expected payoff from them. Since the expected payoff is estimated by the outcome of the weather index, it is necessary to build statistical models for the simulation of the probability distribution of the index, and various models have been proposed. In this paper, the seasonality of the autocorrelation in the anomalies of surface air temperature is shown and a new model which represents the seasonality is applied. In the valuation of the CDD/HDD temperature option, it is shown that the prices differ depending on the seasonality.

Key words : weather derivatives, pricing, seasonal periodicity, time-varying coefficients AR model, Fourier form