研究論文

経験積率母関数によるエッシャー変換

ノンパラメトリック・アプローチ

森平　爽一郎[1]
（もりだいら　そういちろう）

2007年2月1日投稿
2007年3月12日受理

1. はじめに

完備市場における資産価格決定と異なり、非完備市場においては一意な確率測度の変換はありえない。そのため、これまでに様々な測度変換が、非完備市場における価格決定のために提唱されてきた。このための一つの方法である、エッシャー変換（Esscher Transforms）は、当初 Esscher[1932]により確率分布の近似を行うための方法として提唱された。

エッシャー変換は、Borch[1980]、Buhlmann[1980,1984]、Gerber and Shiu[1980,1996]によって、保険価格決定におけるリスク調整済み確率分布を求めるために有用であることが明らかにされて以来、保険や年金の料率決定にとどまらず、金融資産価格決定、とりわけ、様々な派生証券の価格決定において極めて有効であることが示されてきた。

資産価格の決定は、当該資産から発生する将来キャシュフローのリスクを調整した確率分布のもとで期待現在価値を計算することに帰着する。特に、エッシャー変換を用いると、将来キャシュフローに関し特定の確率分布関数を想定したうえで、対応する積率母関数（MGM: Moment Generating Function）を用いることにより、期待値計算において必要となる複雑な積分計算を必要とすることなく、容易に保険や資産価格の閉じた解を求めることが出来る。

他方、こうした利点は、また幾つかの問題点を提示する。

第 1 に、保険数理やファイナンスでよく用いられる幾つかの確率分布に対しては、積率母関数が存在しないか、閉じた解として表現できない。とくに、対数正規分布、パレート分布、F 分布などの積率母関数は存在しない。また、ワイブル分布、ロジステック分布、t 分布、ベータ分布、超幾何分布などの積率母関数は閉じた解として求めることが出来ない。

また、最近、Kijima[2006]、Wang[2006]などにより、エッシャー変換を、多期間、多変量に拡張しようとする試みがなされている。この場合、多変量の条件付き積率母関数が存

[1] 早稲田大学大学院　ファイナンス研究科。 丁重な査読の労を執られた二人の査読者と本誌編集長にお礼申し上げます。

在するか、あるいはその閉じた解を必要とする。しかし、多変量の積率母関数を求めることは、通常極めて困難である。従って、こうした場合、エッシャー変換を用いて保険やその他の資産価格決定は行うことはできないように思われる

第 2 に、もし、将来キャシュフローに関し特定の確率分布を想定したことが間違いであった場合、それに対応した積率母関数を用いたエッシャー変換に基づく価格決定は適切ではありえない。

この論文では、こうした問題を回避するために、あらかじめ将来の資産価格に関して、特定の分布を想定することなく、与えられたデータにもとづき、エッシャー変換を用いた保険・資産価格決定を行う方法を提唱する。言い換えれば、エッシャー変換の経験、ノンパラメトリック・アプローチを提唱する。

本論文の構成は、以下の通りである。第 2 章では、まず、エッシャー変換による保険やその他の資産価格決定の概略を説明する。特に、エッシャー変換を用いると、資産価格がキュムラント母関数の微分によって表現できることを説明する。その後、特定の分布に依存しない標本にもとづく経験(標本)積率母関数。キュムラント母関数の考え方と、その統計的な特性に関する Feuerverger[1989]による幾つかの定理について示す。とくに、大数法則にもとづいて、経験（標本)積率母関数とその 1 階微分が真の積率母関数に(一様)収束することを明らかにする。また、グループ化されたデータ、例えば、ヒストグラムの形で与えられたデータに対して経験エッシャー変換を適用し、どの様に保険価格を求めたらよいかについても述べることにする。

第 3 章では、若干の数例と実証例を示すことにする。最後に要約と結論が示される。

2. エッシャー変換による保険価格決定

2.1 エッシャー変換

エッシャー変換を用いると、リスク調整後の現在の保険価格 P_0 は、将来損失のリスクを調整した確率密度関数のもとで期待値を計算することによって得られる。つまり $\tilde{X}_T$ を将来 T 期の不確実な損失(クレーム)額とし、h を保険購入者の絶対的リスク回避度とする。文字の上のチルダは、その変数が確率変数であることを示す。このようにすると、保険価格は次のようになる。

$$
\begin{aligned}
P_0 &= E_0^{\mathbf{Q}}\left[\tilde{X}_T\right] = E_0^{\mathbf{P}}\left[\tilde{X}_T\left(\frac{e^{h\tilde{X}_T}}{E_0^T\left[e^{h\tilde{X}_T}\right]}\right)\right] \\
&= \int_0^\infty x_T\left(\frac{e^{h\tilde{X}_T}}{E_0^T\left[e^{h\tilde{X}_T}\right]}\right) f_X^{\mathbf{P}}(x_T)\,dx \\
&= \int_0^\infty x_T f_X^{\mathbf{Q}}(x_T)\,dx_T
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

ここで、リスク調整後の損失の確率密度関数 $f_{\mathbf{X}}^{\mathbf{Q}}(x_T)$ は、実際の密度関数 $f_X^{\mathbf{P}}(x_T)$ を次のように変換することによって得られる。

$$
f_{\mathbf{X}}^{\mathbf{Q}}(x_T) = \left(\frac{e^{h\tilde{x}_T}}{E_0^{\mathbf{P}}\left[e^{h\tilde{x}_T}\right]}\right) f_X^{\mathbf{P}}(x_T) \tag{2.2}
$$

さらに、$e^{h\tilde{x}_T} / E_0^{\mathbf{P}}\left[e^{h\tilde{x}_T}\right]$ は、エッシャー変換を示し、ラドンニコディムの微分に相当する。つまり、エッシャー変換はリスク調整前の損失の確率密度関数をリスク調整後のそれに変換する役割を果たしている。

更に、式(2.1)を、損失のリスク調整前の積率母関数 $M^{\mathbf{P}}(h) = E_0^{\mathbf{P}}\left[e^{h\tilde{x}_T}\right]$ を用いて書き直すと、次のように表現できる。

$$
\begin{aligned}
P_0 &= \frac{\int_0^\infty \tilde{x}_T e^{h\tilde{x}_T} f_X^{\mathbf{P}}(x_T)\,dx_T}{E_0^{\mathbf{P}}\left[e^{h\tilde{x}_T}\right]} = \frac{E_0^{\mathbf{P}}\left[\tilde{x}e^{h\tilde{x}_T}\right]}{M^{\mathbf{P}}(h)} = \left(\frac{1}{M^{\mathbf{P}}(h)}\right)\left(\frac{dM^{\mathbf{P}}(h)}{dh}\right) \\
&= \frac{d\log_e M^{\mathbf{P}}(h)}{dh} \equiv \frac{dK^{\mathbf{P}}(h)}{dh}
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

ここで、$K(h) \equiv \log_e M(h)$ はキュムラント母関数であり、積率母関数の対数をとったものである。

従って、将来損失のリスク調整済み期待値である保険価格は、将来損失分布のキュムラント母関数を、絶対的危険回避度でもある積率母関数のパラメータ h で一階微分して表現できる。つまり、保険価格を求めるためには、式(2.1)の積分計算は必要ない。価格を得るために唯一必要なことは、将来損失の確率分布を想定し、そのキュムラント母関数を知り、それを積率母関数パラメータ h で微分すればよい。これが、エッシャー変換によって保険や金融資産の理論価格ならびに数値価格を求める場合の利点である。

2.2　経験積率母関数と経験エッシャー変換

エッシャー変換を用いて保険価格を求めるためには、損失分布の特定化を行わなければならない。しかし、既に述べたように、特定の損失分布に対して、その積率母関数が存在しないか、あるいは閉じた解として表現できない場合が多々ある。また、あらかじめ想定した分布に間違いがあるかもしれない。

こうした場合であっても、特定の確率分布と積率母関数をあらかじめ想定することなく、エッシャー変換を適用して、適切な理論価格を求めることを考える。そのためには、二つの方法を考えることが出来る。

方法１　経験エッシャー変換　実際の損失データに基づいて式(2.1)を直接推定する。具体的には、式(2.1)の標本推定値

$$P_0 = \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\frac{e^{hx_i}}{\sum_{j=1}^{n} e^{hx_j} \Big/ n} \right) \left(\frac{1}{n} \right) = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i e^{hx_i}}{\sum_{i=1}^{n} e^{hx_i}} \tag{2.4}$$

を計算する。ここで、n は標本数であり、$1/n$ は実(P)確率を示す。従って、$\left(\sum_{j=1}^{n} e^{hx_j} \Big/ n \right)$ は、式(2.2)の右辺に対応する経験ラドンニコディムの微分、すなわち経験エッシャー変換によって、実確率 $1/n$ をリスク調整済み(Q)確率に変換する役割を果たしている。

方法２　経験キュムラント母関数　式(2.3)において、まず実際の損失データから経験積率母関数を推定し、その結果を積率母関数のパラメータ h で数値微分することによって、保険の理論価格を求める。

$$P_0 = \frac{dK_n(h)}{dh} \approx \frac{\Delta K_n(h)}{\Delta h} \tag{2.5}$$

ここで、$M_n(h)$ は n 個の損失(クレーム)標本から推定された経験積率母関数であり、$K_n(h)$ は同様に経験キュムラント母関数であり、次のように定義される。

$$\begin{aligned} M_n(h) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} e^{hx_i} \\ K_n(h) &= \log_e M_n(h) = \log_e \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} e^{hx_i} \end{aligned} \tag{2.6}$$

いずれの方法によっても、損失について特定の分布を仮定すること無く、実際のデータにもとづいてエッシャー変換を行い、保険価格を求めることが出来る。

以下の分析では、保険価格を計算する場合、実際の損失データに基づき式(2.1)を直接推

定する方法を選択する。つまり、式(2.4)を用いる。経験キュムラント母関数を推定し、それを微分して保険価格を求める方法は、数値微分を行う際、数値計算誤差が生ずる可能性があるために用いない。

ただし、実際の損失データ数は有限であり、得られた値は標本推定値である。そのため、式(2.1)にもとづく保険価格は標本誤差を含む。標本数を無限に大きくすることにより、推定保険価格が真の母集団価格に収束あるいは一様収束することが保証されなければならない。また標本推定値である保険価格が、不偏かつ最小分散などの統計的性格を有することがあらかじめ保証されている必要がある。

この点を担保するために、第 2 の推定方法において、経験キュムラント母関数の一階微分が、標本数を増やすことによって、母集団におけるそれに収束すること明らかにした、Feuerverger[1989]による定理を援用することにする。

2.3 経験積率母関数と経験キュムラント母関数の特性

大数法則により、経験積率母関数$M_n(h)$は、定数hに対して、その母集団の値$M(h)$にほぼ確実に収束する。また、その対数の連続性によりに関しても$K_n(h)$同様のことが言える。この収束は一様であり、また同様なことは、これらの一次微分に関しても言える。つまり、

定理 1 Feuerverger[1989] $-\infty < a \le b < \infty$ とし、ともに積率母関数$M(h)$が有限であるような区間**I**内に存在するとしよう。この場合、ほぼ確実に次式が成立する。

$$\begin{aligned} &\sup_{a\le h\le b}\left|M_n(h)-M(h)\right|\to 0 \\ &\sup_{a\le h\le b}\left|K_n(h)-K(h)\right|\to 0 \end{aligned} \tag{2.7}$$

さらに、a,bが区間**I**の内点にあれば、$M_n(h)$と$K_n(h)$の微分はほぼ確実に次の関係を満足する。

$$\begin{aligned} &\sup_{a\le h\le b}\left|\frac{\partial M_n(h)}{\partial h}-\frac{\partial M(h)}{\partial h}\right|\to 0 \\ &\sup_{a\le h\le b}\left|\frac{\partial K_n(h)}{\partial h}-\frac{\partial K(h)}{\partial h}\right|\to 0 \end{aligned} \tag{2.8}$$

証明 Feuerverger[1989]の定理 2.1 を参照[2]。

[2] この定理は、標本数が増加するにつれ、経験積率母関数がその真の値に一様に収束をすることを示しているが、収束の速さについて明らかにしているわけではない。

ここで、$M_n(h)$は$M(h)$の不偏推定量であり、またその微分も不偏推定量である。

$$E\left[M_n(h)\right] = M(h), \quad E\left[\frac{\partial M_n(h)}{\partial h}\right] = \frac{\partial M(h)}{\partial h} \tag{2.9}$$

式(2.7)は、標本数が大きくなるにつれて、経験積率(キュムラント)母関数が母集団の積率(キュムラント)母関数に一致することがほぼ確実であることを示している。また、式(2.8)は、同様な結果が、積率母関数のパラメータhで積率母関数、キュムラント母関数を微分した結果についても成立することを示している。

つまり、この定理を援用すると、経験キュムラント母関数をパラメータhで微分したことで得られる、言い換えれば、経験エッシャー変換によって得られる保険価格は、標本数が大きくなるにつれ、真の、母集団における保険価格に一致する。

従って、式(2.5)、あるいは式(2.4)を用いることにより、十分な数の標本数を得ることが出来れば、経験分布に基づいたエッシャー変換により、リスクを調整した保険価格の母集団に近い値を得ることが出来る。

また、Epps, Singleton and Pulley[1982]により、経験積率母関数が、想定した真の積率母関数に等しいかどうかの検定を次の式によって行うことができる。

$$\frac{\sqrt{n}\cdot\left[M_n(h) - M(h)\right]}{\sqrt{\hat{V}ar\left(M_n(h)\right)}} \sim N(0,1) \tag{2.10}$$

$\hat{V}ar\left(M_n(h)\right) = \dfrac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n} e^{2hx_i} - \dfrac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} e^{hx_i}\right)^2\right]$は、経験積率母関数の標本分散である。ただし同様のことはそのキュムラント母関数とその微分に関してもいえる[3]。

2.4 ヒストグラムの形で与えられた損失データの経験エッシャー変換

保険価格決定のための保険支払い額データは、ヒストグラムなどの形で要約して与えられることが多い。さらに、種々の事故件数や損害額の官庁や業界統計などは要約された形で公表されることが多い。こうした場合、経験エッシャー変換をどの様に行うか考えてみよう。

説明のために、たとえばKlugman, Panjer and Willmot[1998]で示された、次のようなデータを考えてみる。

[3] $Y_n(h) = \sqrt{n}\left(M_n(h) - M(h)\right)$が、有限区間$[a,b] \subseteq I/2$上で、平均ゼロで有限の共分散を持つGaussian過程に弱収束する。Feuerverger[1989]の定理2.3と2.4を参照のこと。

表 1　歯科医療費支払い額　Klugman, Panjer and Willmot[1998]第 2 章

支払額			件数
0	−	25	30
25	−	50	31
50	−	100	57
100	−	150	42
150	−	250	65
250	−	500	84
500	−	1,000	45
1,000	−	1,500	10
1,500	−	2,500	11
2,500	−	4,000	3
		合計	378

C0 − C1	n0
C1 − C2	n1
C2 − C3	n2
C3 − C4	n3
C4 − C5	n4
C5 − C6	n5
C6 − C7	n6
C7 − C8	n7
C8 − C9	n8
C9 − C10	n9
	n

表 1 の左側の表は歯科医療費の支払い額をヒストグラムの形で表した実数値であり、右側の表は支払い額と支払い件数を、以下の議論を行うために左側の数値に対応した変数で表している。各節点$\left(C_0 = 0, C_1 = 25, C_2 = 50, \cdots, C_{10} = 4{,}000,\right)$での分布関数は、各階級の件数合計$n_j$を、その総計$n = \sum_{j=1}^{r} n_j$で割った結果を累積して得られる。つまり、

$$F_n\left(C_j\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{j} n_j \tag{2.11}$$

節点を直線で結んだ累積分布曲線図(Ogive)と、その密度関数（ヒストグラム）は、それぞれ、

$$\hat{F}_n\left(C_j\right) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ \dfrac{\left(C_j - x\right)F_n\left(C_{j-1}\right) - \left(x - C_j\right)F_n\left(C_j\right)}{C_j - C_{j-1}} & 0 \le x \le C_r \\ 1 & x > C_r \end{cases} \tag{2.12}$$

$$\hat{f}_n\left(C_j\right) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ \dfrac{F_n\left(C_{j-1}\right) - F_n\left(C_j\right)}{C_j - C_{j-1}} = \left(\dfrac{n_j}{n}\right)\left[\dfrac{1}{C_j - C_{j-1}}\right] & 0 \le x \le C_r \\ 0 & x > C_r \end{cases} \tag{2.13}$$

で示される。累積分布曲線図(Ogive)は、各接点での分布関数を加重平均したものである。また、ヒストグラムは、上の累積分布曲線図に式(2.11)を代入し、その結果をxで微分して得られ、それは、密度関数の区分線形近似になっている。

リスク調整前の期待価格

これから、損失のリスク調整前の期待値は、線形近似した区間内での損失の期待値（積

分）をもとめ、それを全ての区間で合計したものになる。つまり、損失額の期待値としての保険価格は、次のようになる。

$$
\begin{aligned}
P_0 = E_0^{\mathbf{P}}\left[\tilde{X}_T\right] &= \sum_{j=1}^{r}\int_{C_{j-1}}^{C_j} x\left[\left(\frac{n_j}{n}\right)\left(\frac{1}{C_j - C_{j-1}}\right)\right]dx \\
&= \sum_{j=1}^{r}\left[\left(\frac{n_j}{n}\right)\left(\frac{1}{C_j - C_{j-1}}\right)\right]\int_{C_{j-1}}^{C_j} xdx \\
&= \sum_{j=1}^{r}\left[\left(\frac{n_j}{n}\right)\left(\frac{C_j + C_{j-1}}{2}\right)\right]
\end{aligned}
\tag{2.14}
$$

したがって、価格は、隣接する接点での保険金支払い額の中値に、右側の接点に対応する確率密度をかけ、全ての点に関し合計して得られる。

次に、こうしたグループ化されたデータに対してエッシャー変換を適用し、どの様にリスクを織り込んだ損失期待値を計算するか、言い換えれば、式(2.14)にどのようにしてエッシャー変換を施すか考えてみる。まず、データがヒストグラムで与えられている時に、エッシャー変換の分母になる経験積率母関数$E_0^{\mathbf{P}}\left[e^{h\tilde{X}_T}\right]$を直接計算すると、次の結果が得られる。

$$
E_0^{\mathbf{P}}\left[e^{h\tilde{X}_T}\right] = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{r}\left[\left(\frac{n_j}{n}\right)\left(\frac{1}{C_j - C_{j-1}}\right)\right]\left(\frac{e^{hC_j} - e^{hC_{j-1}}}{h}\right)
\tag{2.15}
$$

危険をまったく考慮しない保険会社、つまり、リスク回避係数hをゼロにすると、L'Hospitalの規則によって、この積率母関数の値は 1 になる。また、この結果をリスク回避係数hで微分し、$h = 0$で評価すると、式(2.15)のリスク調整前の期待価格が得られ

これらの結果からエッシャー変換は、

$$
\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} = \left(\frac{e^{h\tilde{X}_T}}{E_0^{\mathbf{P}}\left[e\tilde{X}_T\right]}\right) = \frac{e^{h\tilde{X}_T}}{\sum_{j=1}^{r}\left[\left(\frac{n_j}{n}\right)\left(\frac{1}{C_j - C_{j-1}}\right)\right]\left(\frac{1}{h}\right)\left(e^{hC_i} - e^{hC_{i-1}}\right)}
\tag{2.16}
$$

となる。したがって、上の式(2.16)を式(2.1)に代入し、区分線形近似データであることに注意すると、エッシャー変換を用いた時の期待損失額としての保険価格は、

$$P_0 = E_0^{\mathbf{Q}}\left[\tilde{X}_T\right] = E_0^{\mathbf{P}}\left[\tilde{X}_T\left(\frac{e^{h\tilde{X}_T}}{E_0^{\mathbf{P}}\left[e^{h\tilde{X}_T}\right]}\right)\right]$$

$$= \sum_{j=1}^{r}\int_{C_{j-1}}^{C_j} x\left(\frac{e^{hx}}{\sum_{i=1}^{r}\left[\left(\frac{n_i}{n}\right)\left(\frac{1}{C_i - C_{i-1}}\right)\right]\left(\frac{1}{h}\right)\left(e^{hC_i} - e^{hC_{i-1}}\right)}\right)\times\left[\left(\frac{n_j}{n}\right)\left(\frac{1}{C_j - C_{j-1}}\right)\right]dx$$

$$= \sum_{j=1}^{r}\left(\frac{\left(\frac{n_j}{n}\right)\left(\frac{1}{C_j - C_{j-1}}\right)}{\sum_{i=1}^{r}\left[\left(\frac{n_i}{n}\right)\left(\frac{1}{C_i - C_{i-1}}\right)\right]\left(\frac{1}{h}\right)\left(e^{hC_i} - e^{hC_{i-1}}\right)}\right)\int_{C_{j-1}}^{C_j} xe^{hx}dx$$

$$= \sum_{j=1}^{r}\left[\frac{\left(\frac{n_j}{n}\right)\left(\frac{1}{C_j - C_{j-1}}\right)}{\sum_{i=1}^{r}\left[\left(\frac{n_i}{n}\right)\left(\frac{1}{C_i - C_{i-1}}\right)\right]\left(e^{hC_i} - e^{hC_{i-1}}\right)}\right]\left[e^{hC_j}\left(C_j - \frac{1}{h}\right) - e^{hC_{j-1}}\left(C_{j-1} - \frac{1}{h}\right)\right] \tag{2.17}$$

となる。この結果が示すように、保険価格は、リスク回避度hの複雑な関数になっている。この結果を、リスクを調整しない期待価格である式(2.14)と比べてみると、その点をより理解できよう。最後の式の右辺の第1番目の鍵カッコ内の分母は、式(2.15)の積率母関数にリスク回避度hを掛けた形になっており、リスク調整前の密度関数にリスクを織り込んで調整する役割を担っていると解釈できる。

2.5　多変量エッシャー変換と多変量経験積率母関数

Gerber and Shiu[1994,1996]は原資産が二つ以上の時のエキゾチックなオプション価格を、エッシャー変換を用いて容易に導出できることを示した。しかし、このときに、彼等は収益率xが正規分布をする、言い換えれば、S_{0j}をj番目の原資産の現在価格としたときに、将来時点Tにおける原資産価格$\tilde{S}_{Tj} = S_{0j}\exp\{\tilde{x}\}$の形をとることを仮定した。もしこのような仮定を置かず、かつ原資産の収益率や価格をより正規分布以外の確率分布を想定した場合、そのオプション価格の導出は極めて困難に成ることが予想される。一方、Wang[2006]は、エッシャー変換を多変量に拡張し、その場合のワン変換との関係を明らかにした。また Kijima[2006]は多変量、多期間のエッシャー変換を Buhlmann[1980]による結果を拡張するもとして、その理論な裏づけを行った。しかし、これらの成果は、多変量

積率母関数が存在することを仮定している。一般に多変量の積率母関数やキュムラント母関数の計算は、特に相関をもつ多変量の確率分布の場合困難である。しかし、多変量の経験積率母関数は常に存在する。

2.6 オプション価格決定と経験エッシャー変換

オプション価格を決定するためには、例えばコールオプションであれば、将来の原資産価格から行使価格(定数)を差し引くことによりコールからのペイオフを算出し、その期待値を計算すればよい。この操作は、Winkler, Roodman, and Britney[1972]による部分積率、部分積率母関数の計算に対応する。部分積率母関数に関しても、これまでの議論と同様な確率論・統計上の特性を確認することが出来る。言い換えれば、部分「経験」エッシャー変換を試みることにより、標本数を大きくしたときに、その値が母集団のオプション価格に一様収束するようなオプション価格を求めることが出来ることを意味している。

3. 数値例と応用例

これまでの結果に基づき、幾つかの数値例と応用例を示すことにしよう。

数値例　歯科保険料支払い額データ Klugman, Panjer and Willmot[1998]

表 2 は、Klugman, Panjer and Willmot[1998]による歯科保険料支払いデータである。これは 10 件のみでの小標本であるが、実際のデータを用いて、エッシャー変換にもとづく保険価格を計算するか、その手続きを示す数値例として説明することにしよう。

表 2　経験エッシャー変換による歯科保険料の決定

Klugman, Panjer and Willmot[1998]第 2 章の数値例を利用。リスク回避係数 h＝0.001

1	2	3	4	5	6	7	8
番号	X(j)	実確率	exp{h・X(j)}	exp{h・X(j)}	リスク調整済後	X(j)×Q確率	相対価格比
	保険金	P確率		/E[exp{h・X(j)]	Q確率		
				(4)/E[4]	(3)×(5)	(2)×(6)	(7)/価格
1	141	0.10	1.151	0.731	0.073	10.31	0.017
2	16	0.10	1.016	0.645	0.065	1.03	0.002
3	46	0.10	1.047	0.665	0.066	3.06	0.005
4	40	0.10	1.041	0.661	0.066	2.64	0.004
5	351	0.10	1.420	0.902	0.090	31.65	0.052
6	259	0.10	1.296	0.823	0.082	21.30	0.035
7	317	0.10	1.373	0.872	0.087	27.63	0.046
8	1,511	0.10	4.531	2.877	0.288	434.67	0.720
9	107	0.10	1.113	0.707	0.071	7.56	0.013
10	567	0.10	1.763	1.119	0.112	63.46	0.105
合計	3,355	1.00	15.752	10.00	1.000	603.31	1.000
平均	335.5		1.575	1.00			
Kn(h)			0.4544				
分散	923,880		1.1319				

このデータは、50 ドルを免責とした歯科保険金支払いデータである。表 2 で、第 1 列は標本（クレーム）番号を示し、第 2 列が保険金支払い額 $x(j)$ を示す。第 3 列は、リスクを調整していない実(**P**)確率を示している。10 件のクレームに対して、それぞれ、等確率 $1/10 = 0.1$ を割当てている。第 4 列は、絶対的リスク回避度 $h = +0.001$ に第 2 列の支払い額を掛け、指数変換したものである。つまり $\exp\{h \cdot x(j)\}$ を示す。第 4 列の平均(期待)値は $\sum_{j=1}^{10} \exp\{0.001x(j)\} \Big/ 10 = 1.575$ になる。第 5 列は、第 4 列の結果をその平均値(1.5752)で割り基準化したものである。これは、ラドンニコディム微分の経験値であり、そのためのエッシャー変換を表し、式(2.4)に対応している。第 6 列は、第 3 列の実(**P**)確率に、第 5 列でしめされるエッシャー変換を施したリスク調整済み(**Q**)確率である。このリスク調整後の確率に、実際の保険金支払い額を掛けて得られたリスク調整後の保険金額は第 7 列に示されている。

その合計は 603.31 ドルとなり、リスクを調整していない平均（純）保険料の 333.5 ドルの約 2 倍になっている。これは、保険金請求番号 8 番の保険金支払い額が 1,511 ドルに上り、そうした高額な保険料支払いリスクを高く評価(434.67 ドル)したためである。もちろん、この結果は、標本数が 10 個と小さく、極値の影響が大きいことに注意すべきであろう。

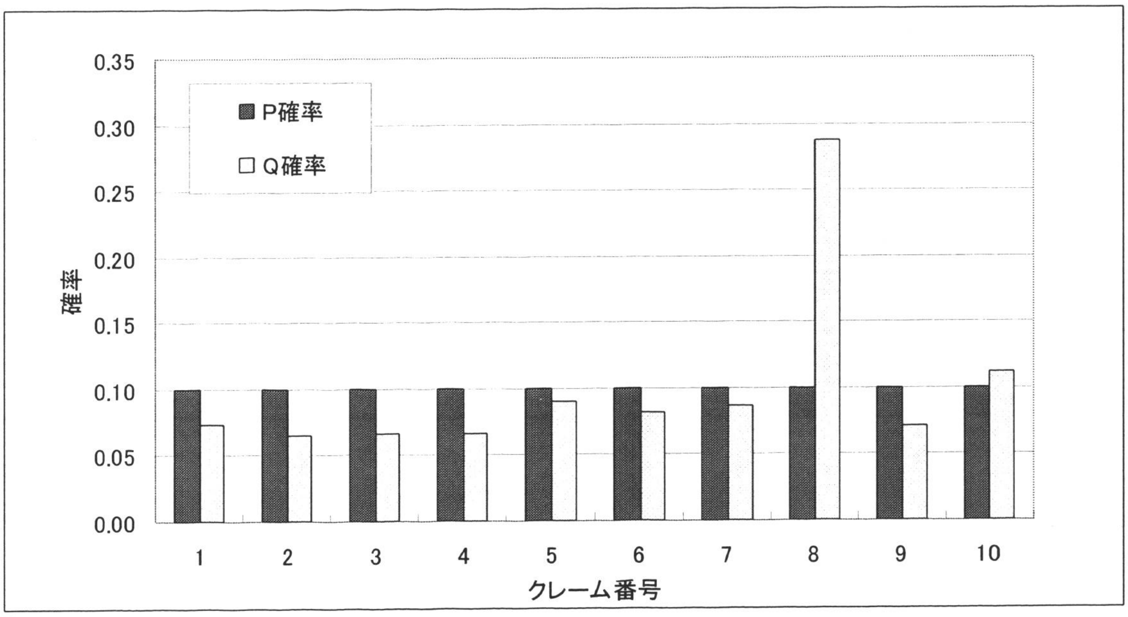

図 1　実確率とエッシャー変換によるリスク調整済み確率

また、このことは、実(**P**)確率(1/10=0.1)と、リスク調整後(**Q**)確率を比較した
図 1 を見れば、リスク回避的な保険会社がクレーム番号 8 番の保険金支払額のリスクを高く評価したことがわかる。

保険金支払い額に平均μ、分散σ^2の正規分布を仮定すると、その積率母関数は

$M(h)=\exp\left\{\mu h+h^2\sigma^2/2\right\}$となり、その対数変換をしたキュムラント母関数は

$K(h)=\mu h+h^2\sigma^2/2$となる。したがって、式(2.6)にもとづいて、パラメートリックなエッシャー変換を行った時の保険価格は、

$$P_0=\frac{\partial K(h)}{\partial h}=\mu+h\sigma^2=335.5+(0.001)\times 923{,}880=1{,}259.38 \qquad (3.1)$$

となり、非常に高い保険価格になる。これは、損失に正規分布を仮定したことによる誤りが影響している。事実、経験的な積率母関数の値は、式(2.6)に基づき計算され、表 2 の第 4 列下の欄に示されているように、$M_n(h)=1.575$であるのに対し、理論的な積率母関数は

$M(h)=\exp\left\{\mu h+h^2\sigma^2/2\right\}=2.220$となる。式(2.10)に基づき、検定をおこなうと、

$$\frac{\sqrt{n}\cdot\left[M_n(h)-M(h)\right]}{\sqrt{\hat{V}ar\left(M_n(h)\right)}}=\frac{\sqrt{10}\cdot[1.575-2.220]}{\sqrt{1.1319}}=-1.91622$$

となり、1 パーセント水準で、正規性の仮説は棄却される。

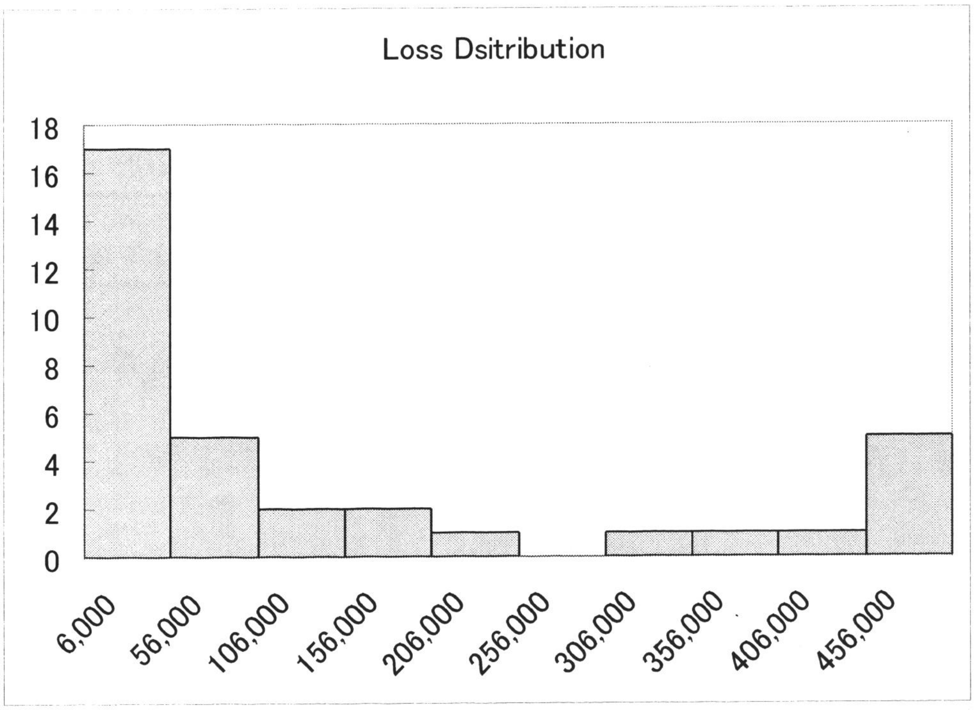

図 2　上限 50 億ドルで制限され、下限 500 万ドルで切断された、ハリケーン（台風）被害額分布。

Hogg and Klugman[1984]、

応用例１　風水害保険価格決定への応用

つぎに、1949 年から 1980 年にわたる米国本土 32 年間の台風被害総額(Hogg and Klugman[1984])をもとにして、そのリスク調整済み台風保険価格の決定を、経験的エッシャー変換によって考えてみることにしよう。台風被害額は居住用不動産建築費用指数を調整係数として調整されている。これは、ハリケーン被害によって保険会社がこうむる保険金支払いのインフレ効果を考えているからである。また、インフレ調整後で 100 万ドル以上の被害額データが報告され、さらに 500 万ドル以下の台風被害額は削除されている。従ってデータは下限で truncated されていることに注意しなければならない。Hogg and Klugman[1984]は、この切断損失分布に対して対数正規分布が適切であることを示唆している。しかし、損失額が対数正規すると、対数正規分布に対する積率母関数が存在しないため、エッシャー変換を適用することができない。従って、そうした場合でも積率母関数が存在する経験積率母関数が必要になる。さらに、Klugman, Panjer and Willmot[1998]は、同じデータを考え、損害額が多額に上った時の政府保証の免責を考慮し、上限 50 億ドル以上の損害をすべて 50 億ドルとした損失分布を考え、保険価格決定を考えようとしている。

その時の、損失額の分布は、図 2 のようになる。分布は、500 万ドルと 50 億ドルを上下限として、U 字型の分布をしている。これに対し、どの様な分布を考え、価格を決定すべきであろうか？適切な分布を想定することは困難であろう。従って、ここでは、経験エッシャー変換を試みることにしたい。数値例で示した計算方法に従い、各種の統計量を計算すると次のようになる。

まずリスクを調整していない損失の期待値 μ と標準偏差 σ は、それぞれ、153,139 と 174,014 になる。さらに、リスク回避度 $h = 0.00002$ を仮定すると、経験積率母関数と経験キュムラント母関数は、

$$M_n(h) = 3{,}346.03 \qquad K_n(h) = \log_e M_n(h) = 8.11$$

これに対し理論的な積率母関数は

$$M(h) = \exp\left\{h\mu + \frac{h^2\sigma^2}{2}\right\} = \exp\left\{\begin{matrix}0.00002 \times 153{,}139 + (0.00002)^2 \times \\ 174{,}014^2/2\end{matrix}\right\} = 9{,}126.97$$

であり、理論価格は、

$$P_0 = \frac{\partial K(h)}{\partial h} = \mu + h\sigma^2 = 335.5 + (0.00002)174{,}014^2 = 758{,}759$$

となる。また経験エッシャー変換にもとづく理論価格は、493,454 となる。この値は、単純な期待損失である $\mu = 153{,}139$ よりは大きいが、正規性を仮定した時のエッシャー変換をお

こなった時の価格758,759.48よりは小さい。おおよそ二つの中間値になっている。

一方、正規性の仮定は、明らかに棄却される。

$$\frac{\sqrt{n}\cdot\left[M_n(h)-M(h)\right]}{\sqrt{\hat{V}ar\left(M_n(h)\right)}}=\frac{\sqrt{10}\cdot\left[1.575-2.220\right]}{\sqrt{1.1319}}=-4.396$$

従って、正規性を仮定したときのエッシャー変換に基づく価格758,759.48は誤りである、あまりにも高すぎる可能性が高い。

数値例　歯科医療費のヒストグラムデータに対する経験エッシャー変換

式(2.17)に基づき、表 1にヒストグラムの形で示された歯科医療費支払い額に対する経験エッシャー変換を行い、リスク調整済み保険価格がどの様にして決定されるか見てみよう。まずリスク回避度$h=0.001$とする。表 3 第 1 列から第 3 列までは、表 1と同じヒストグラムを示している。第 4 列は、第 2 列の支払い件数n_jを、その合計$n=\sum_{j=1}^{r}n_j=378$で除して得られた、階級の端での密度関数を示している。第 5 列は、リスク調整前の各階級の端での歯科保険金支払い額を示している。第 6、7 列は$e^{hC_i},e^{hC_{i-1}}$を示し、リスクを調整後の階級の両端での歯科保険金支払い額である。第 8 列は、これらの計算結果にもとづき、式(2.17)の分母

$$\sum_{i=1}^{10}\left[\left(\frac{n_i}{378}\right)\left(\frac{1}{C_i-C_{i-1}}\right)\right]\left(e^{.001C_i}-e^{.001C_{i-1}}\right)=0.00178$$

を計算している。列 9 と 10 は、式(2.17)の分子を第 1 項と第 2 項$e^{hC_j}\left(C_j-\frac{1}{h}\right)-e^{hC_{j-1}}\left(C_{j-1}-\frac{1}{h}\right)$を示している。列 11 は、これらの値と、第 4 列、6 列と 7 列の差の逆数を用いて、式(2.17)分子の値が計算されている。この値を第 8 列の合計で割り、その合計をとると、期待保険金、つまりこの場合の歯科保険料979.97が得られる。第 8 列の合計をしたものを、危険回避度hで割った物は、式(2.15)に対応したヒストグラムに対する経験積率母関数を示す。この場合、その値は$E_0^{\mathbf{P}}\left[e^{h\tilde{X}_T}\right]=1.785$である。

表 3　ヒストグラムの形で示された歯科医療費支払い額対する経験 Esscher 変換

Klugman, Panjer and Willmot[1998]第 2 章の数値例を利用。リスク回避係数 h＝0.001

h=　0.001

j	1		2	3	4	5
j	支払額			件数	密度	
j	C(j-1)		C(j)	n(j)	n(j)/n	C(j)-C(j-1)
1	0	－	25	30	0.079	25
2	25	－	50	31	0.082	25
3	50	－	100	57	0.151	50
4	100	－	150	42	0.111	50
5	150	－	250	65	0.172	100
6	250	－	500	84	0.222	250
7	500	－	1,000	45	0.119	500
8	1,000	－	1,500	10	0.026	500
9	1,500	－	2,500	11	0.029	1,000
10	2,500	－	4,000	3	0.008	1,500
			合計(n)	378	1.000	

6	7	8	9	10	11	12
Exp{h*C(j)}	Exp{h*C(j-1)}	分母	Exp{h*C(j)}*[C(j)-1/h]	Exp{h*C(j-1)}*[C(j-1)-1/h]	分子	比率
1.025	1.000	0.00008	-999.68	-1000	0.00101	0.565
1.051	1.025	0.00009	-998.71	-999.68	0.00320	1.792
1.105	1.051	0.00016	-994.65	-998.71	0.01223	6.850
1.162	1.105	0.00013	-987.56	-994.65	0.01577	8.834
1.284	1.162	0.00021	-963.02	-987.56	0.04220	23.644
1.649	1.284	0.00032	-824.36	-963.02	0.12325	69.058
2.718	1.649	0.00025	0.00	-824.36	0.19628	109.974
4.482	2.718	0.00009	2240.84	0.00	0.11856	66.431
12.182	4.482	0.00022	18273.74	2240.84	0.46657	261.417
54.598	12.182	0.00022	163794.45	18273.74	0.76995	431.404
		0.00178			価格	979.97
	EMGF	1.785				

3　要約と結論

分布の型に依存しないエッシャー変換、つまり経験積率母関数、経験キュムラント母関数にもとづくエッシャー変換を提唱し、その可能性について議論をした。経験キュムラント母関数の微分、つまり経験エッシャー変換による保険価格は、その母集団の真の価格に一様収束することを保証できることをしめした。また、経験積率母関数、経験キュムラント母関数は、損失の確率分布によらず必ず存在する。その意味で、対数正規、ガンマ、t、ワイブル、ベータなど保険数理でよく用いられる分布に対して理論的な積率母関数が存在しないか、その閉じた解を求めることが出来ない場合であっても、エッシャー変換を行い、リスクを調整した保険価格を求めることが出来ることを示した。また、大数法則により、経験エッシャー変換に基づく保険価格が特定の確率分布を指定した時のエッシャー変換価

格と異なるかどうかの検定を行うことができることを示した。

この論文では、経験エッシャー変換の基本的な考え方と、応用に関する数値例を示した。実際の適用にあたっては、モンテカルロ法などの数値実験により経験 Esscher 変換の有効性明らかにする必要があろう。たとえば、損保数理における損失やファイナンスにおける資産価格の分布をしめす対数正規分布、回収率を記述するためのベータ分布など、その積率母関数は存在しないことを明らかにした。しかし、この場合、標本数の増加にともない、経験積率母関数とその経験エッシャー変換がどのような振る舞いや収束速度をしめすかを検討することは、応用に当たって有用な知見を与えるものとなろう。

エッシャー変換は、保険や年金のみならず、非完備市場における資産やそのデリバティブズ価格決定において重要な役割を果たすようになってきている。その意味で、経験エッシャー変換の果たす役割を考えることは理論上も応用面からも大きな意味があるものと思われる。

参考文献

1. Borch, Karl H. [1980] *Economics of Insurance,* Amsterdam: North-Holland
2. Buhlmann, H. [1980] "An Economic Premium Principle." *ASTIN Bulletin,* 1980, 11: 52–60.
3. Buhlmann, H [1983] "The General Economic Premium Principle." *ASTIN Bulletin,* 1984, 14: 13–21.
4. Borch, Karl H[1980] *Economics of Insurance, 1980,*: North-Holland、Amsterdam
5. Buhlmann, H[1980] "An Economic Premium Principle." *ASTIN Bulletin,* 1980, 11: 52–60.
6. Buhlmann, H [1984] "The General Economic Premium Principle." *ASTIN Bulletin,* 1984, 14: 13–21.
7. Collender, Robert Neil and James A. Chalfant. [1986] "An Alternative Approach to Decisions Under Uncertainty Using the Empirical Moment-Generating Function," American *Journal of Agricultural Economics,* 1986, 68(3), 727-731.
8. Epps T. W., Singleton K. J., and L B. Pulley[1982] "A Test of Separate Families of Distributions Based on the Empirical Moment Generating Function," *Biometrika*, 1982, 89(2), 391-9.
9. Esscher, F [1932] "On the Probability Function of the Collective theory of Risk.," *Scandinavian Actuarial Journal ,* 15, 175-195
10. Feuerverger, Audrey.[1989] "On the Empirical Saddlepoint Approximation,"

Biometrika, 1989, 76(3), 457-464.

11. Gerber, Hans U.[1980] "A Characterization of Certain Families of Distributions Via Esscher Transforms and Independence," *Journal of the American Statistical Association*, 1980, 75(372), 1015-1018.
12. Gerber, H. U., and E. S. W. Shiu[1994] "Option Pricing by Esscher Transforms," Transactions of Society of Actuaries, 46, 1994, 99-191
13. Gerber, H. U., and E. S. W. Shiu[1996] "Actuarial Bridges to Dynamic Hedging and Option Pricing." *Insurance: Mathematics and Economics* 18, 183–218.
14. Hogg Robert V., and Stuart A. Klugman.[1984] *Loss Distributions*, Wiley.
15. Kijima Masanori.[2006] "A Multivariate Extension of Equilibrium Pricing Transforms: The Multivariate Esscher and Wang Transforms for Pricing Financial and Insurance Risks," *Astin Bulletin*, to be appeared.
16. Klugman Stuart A., Harry H. Panjer and Gordon E. Willmot[1998] *Loss Model from Data to Decisions*、日本アクチュアリー会、損保数理ロスモデル研究会訳、『統計データの数理モデルへの適用』、丸善プラネット、2004 年
17. Wang, S. Shaun[2006] "Normalized Exponential Tilting: Pricing and Measuring Multivariate Risks," (Jan.,2006),20pp. http://www.ermii.org/Research/Multivariate_Exponential_Titiling_01-08-2006.pdf
18. Wang, Shaun S[2006] "Universal Framework for Pricing Financial and Insurance Risks," *Astin Bulletin,* 2002, 32(2),213-234
19. Winkler, Robert L.,Gary M. Roodman, and Robert R. Britney,[1972] " The Determination of Partial Moments.," *Management Science*, 19(3),(Nov., 1972), 290-296

Esscher Transforms by Empirical Moment Generating Function

Soichiro Moridaira

Graduate School of Finance, Accounting and Law, Waseda University

Esscher transforms was proposed by Esscher[1932] as a method of approximating unknown insurance claim distributions. After 60 years later, Gerber and Shiu[1994] rediscovered it as a useful tool, not only for pricing insurance, but also for valuing complex derivatives including Black and Scholes model, under the framework of incomplete market. Esscher transforms is defined as transformation of the original probability distribution function in the real world to the risk adjusted distribution. Only a thing we need to know to derive the Esscher transforms is to find out Moment Generating Function: MGF of the claim distributions, which is shown in many statistics textbooks. This merit, however, brings us a problem such that we need to specify the distribution first and then to find corresponding MGF. The last step is quite easy, but, if we make incorrect specification the distribution function at the first step, resulting insurance price will be biased.

To avoid this problem, we propose to employ empirical MGF approach instead of using subjectively selected distribution function and the corresponding exact MGF. Given a sample claim data of size n , empirical MGF is computed as

$$M_{(n)}(x;h)=\left(\frac{1}{n}\right)\sum_{i=1}^{n}\exp\{hX_i\}$$

Where X_i is i-th realized insurance claim data. We can usually observe the past insurance claim data and easy to calculate the above result. Based on this result, we can obtain the insurance price without knowing the exact shape of the claim distribution and its corresponding theoretical MGF.

It is fortunate that much research has been done already about statistical properties of empirical MGF which must be sample estimates of the true MGF. For example Feuerverger[1989] ascertained the empirical MGF can be minimum variance unbiased estimator of the true MGF. Some numerical example and real world application were showed.