

NIG 分布: 非正規分布を身近なものにするために

水野 敬*

2008 年 9 月 24 日投稿

2009 年 1 月 20 日受理

概要

株式、債券あるいは為替などの収益率の分布が正規分布に従わないことは一般的な認識である。しかし、平均と分散で決まる正規分布と異なり、パラメトリックな非正規分布には複雑な確率密度関数あるいはパラメータ推定の煩雑さなど、数学的にも実務的にも難しい点が多い。

幾つかのソフトウェアには非正規分布に関するルーチンが組み込まれており、それらを使える環境にあれば上のような困難は少ないかも知れない。それでもエクセル上で手軽に計算出来れば、非正規分布の世界がより身近になり、リスク評価の向上、翻って正規分布の正当な評価にも役立つかと思われる。

本稿では、NIG 分布と呼ばれる分布を取り上げ、資産運用リスク管理への応用上重要な性質、パラメータ推定のアルゴリズム、およびリスク尺度の計算をエクセル上で行うのに必要なルーチンについて、出来る限り自己完結的に紹介することにしたい。

キーワード：GH 分布，NIG 分布，一般逆ガウス分布，EM アルゴリズム，VBA プログラム

1 はじめに

NIG 分布 (normal inverse Gaussian distribution) は、GH 分布 (generalized hyperbolic distribution) と呼ばれる分布の族に属する。1 次元の場合、GH 分布は実質 5 つのパラメータを持つ分布であるが、NIG 分布はそのうちの 1 つを固定したものである。

そのため、まず GH 分布について定義とリスク管理への応用上必要な性質を述べ、それを受けて NIG 分布固有の性質を述べる。数式が多くなるが、エクセル上で扱える自在さを確保する一方で誤った使い方を避けるためには、基本的な事項や前提条件を正確に知っておくことが欠かせないので、ご容赦願いたい。この過程で、第 3 種変形ベッセル関数および一般逆ガウス分布というものが現れる。それらの定義および必要な性質については、第 6 章補遺において初等的な証明と共にまとめている。

次に、分布のパラメータ推定のためのアルゴリズムを、プログラミングを念頭において詳しく述べる。

最後に、NIG 分布の応用例として、対数収益率が NIG 分布に従う場合の VaR (Value at Risk) ならびに期待ショートフォール (expected shortfall) の計算を取り上げる。この 2 つのリスク尺度の計算方法を振り返った後、それらを計算するのに必要な確率密度関数、累積分布関数、累積分布関数の逆関数などのルーチンについて、数値計算のためのプログラムの百科事典的な存在である [Press et al.(1999)] を参照しつつ述べる。締め括りに具体的な計算例を図表と共に示した。

GH 分布の提示方法や特性関数に基づく基本性質の述べ方、パラメータ推定の EM アルゴリズムの骨格は [McNeil et al.(2005)] に拠っている。また、GH 分布および一般逆ガウス分布の様々な性質をまとめた総合報告 [増田 (2002)] も有益である。

なお、この場を借りて、拙稿を丁寧に査読して下さい、有益な文献の紹介と共に多くの貴重なご教示を頂いたレフェリーの方に厚くお礼を申し上げます。

* ジブラルタ生命保険 (株) e-mail: takashi.mizuno@prudential.com

2 GH分布について

2.1 定義と主要な性質

d 次元実ユークリッド空間を \mathbb{R}^d として, \mathbb{R}^d の元は列ベクトルで太字で表すことにし, 転置行列は ' を右肩に付けて表す. また, 確率変数あるいは確率分布の確率密度関数は単に密度関数という. NIG 分布が属する GH 分布の定義を述べるために,

\mathbf{Z} : 各成分の平均が 0, 共分散行列が単位行列の k 次元正規分布に従う k 次元確率変数

W : 非負実数値確率変数で \mathbf{Z} と独立

A : d 行 k 列実数値行列

m : $[0, \infty)$ から \mathbb{R}^d への可測関数

とおく.

d 次元確率変数 \mathbf{X} が,

$$\mathbf{X} = m(W) + \sqrt{W}AZ$$

と表せるとき, 多次元正規平均分散混合分布 (normal mean-variance mixture distribution) に従うという. W は混合要素 (mixing distribution) と呼ばれる.

GH 分布とは,

- m として一次写像 $m(y) = \boldsymbol{\mu} + \gamma y$ ($y \in [0, \infty)$; $\boldsymbol{\mu}, \gamma \in \mathbb{R}^d$)

- W として一般逆ガウス分布 $N^-(\lambda, \chi, \psi)$ (6.2 節参照)

をそれぞれ取った場合の正規平均分散混合分布のことをいう. すなわち,

$$\mathbf{X} = \boldsymbol{\mu} + W\gamma + \sqrt{W}AZ \quad (1)$$

である. $\Sigma = AA'$ とおいて, 以後 $GH_d(\lambda, \chi, \psi, \boldsymbol{\mu}, \Sigma, \gamma)$ と表す. Σ は定義より半正定値であり, λ, χ, ψ は次の条件を満たさなければならない.

$$\begin{cases} \chi > 0, \psi \geq 0 & (\lambda < 0) \\ \chi > 0, \psi > 0 & (\lambda = 0) \\ \chi \geq 0, \psi > 0 & (\lambda > 0) \end{cases}$$

$\gamma = 0$ の場合は楕円型分布 (elliptical distribution) の特別な場合になり, 密度関数は平均 $\boldsymbol{\mu}$ を中心として対称になる. 命題 2.4 の後に述べるように, γ は \mathbf{X} に非対称性を持たせる役割を担っている.

NIG 分布は, GH 分布のパラメータのうち, $\lambda = -\frac{1}{2}$ とおいた特別の場合であり, 命題 3.1 に述べるように, 再生性を有することが大きな特質である.

以下, Σ が非退化, すなわち階数が d の場合を考える. また, 場合分けの煩雑さを避けるため, $\chi > 0, \psi > 0$ に限定する.

(1) 式より, $W = w$ が与えられているとき, \mathbf{X} は平均ベクトル $\boldsymbol{\mu} + w\gamma$, 共分散行列 $w\Sigma$ の d 次元正規分布に従う. 以後の便利のために, (\mathbf{X}, W) の結合分布を見ておこう. $\mathbf{X}, \mathbf{x} (\in \mathbb{R}^d)$ の第 i 成分を X_i, x_i と書き, 不等式群 $X_i \leq x_i (i = 1, \dots, d)$ を簡単に $\mathbf{X} \leq \mathbf{x}$ と書くことにする. また \mathbb{R}^d におけるルベーグ測度 $dx_1 \cdots dx_d$ を簡単に $d\mathbf{x}$ と書く. さらに, 可測集合の確率を $P[\cdot]$ で表す. 多次元正規分布 AZ の密度関数を $\phi_A(\mathbf{u}) (\mathbf{u} \in \mathbb{R}^d)$, W の密度関数を $h(w)$ で表すと, AZ も W と独立だから (AZ, W) の結合分布の密度関数は $\phi_A(\mathbf{u})h(w)$ である. 従って,

$$\begin{aligned} P[\mathbf{X} \leq \mathbf{x}, W \leq w] &= P[AZ \leq \frac{\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu} - W\gamma}{\sqrt{W}}, W \leq w] \\ &= \int_D \phi_A(\mathbf{u})h(v) d\mathbf{u}dv \quad \left(D = \left\{ \mathbf{u} \leq \frac{\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu} - v\gamma}{\sqrt{v}}, 0 < v \leq w \right\} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^w \left(\int_{-\infty}^{\frac{x-\mu-v\gamma}{\sqrt{v}}} \phi_A(\mathbf{u}) d\mathbf{u} \right) h(v) dv \quad (\text{フビニの定理}) \\
&= \int_0^w \left(\int_{-\infty}^{\mathbf{x}} \phi_A \left(\frac{\mathbf{u} - \boldsymbol{\mu} - v\boldsymbol{\gamma}}{\sqrt{v}} \right) d\mathbf{u} \right) h(v) dv \\
&= \int_{-\infty}^{\mathbf{x}} \int_0^w \phi_A \left(\frac{\mathbf{u} - \boldsymbol{\mu} - v\boldsymbol{\gamma}}{\sqrt{v}} \right) h(v) d\mathbf{u} dv
\end{aligned}$$

となる。よって、右辺の被積分項が (\mathbf{X}, W) の結合分布の密度関数である。 ϕ_A を具体的に書けば、

$$\begin{aligned}
&(\mathbf{X}, W) \text{ の結合分布の密度関数} \\
&= \frac{1}{(2\pi w)^{\frac{d}{2}} |\Sigma|^{\frac{1}{2}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2w} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu} - w\boldsymbol{\gamma})' \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu} - w\boldsymbol{\gamma}) \right\} h(w) \quad (2)
\end{aligned}$$

となる。

X の密度関数 $f(\mathbf{x})$ は、 (\mathbf{X}, W) の結合分布の密度関数を w について $(0, \infty)$ 上積分して得られるから、

$$f(\mathbf{x}) = \frac{e^{(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})'\Sigma^{-1}\boldsymbol{\gamma}}}{(2\pi)^{\frac{d}{2}} |\Sigma|^{\frac{1}{2}}} \int_0^{\infty} w^{-\frac{d}{2}} \exp \left\{ -\frac{(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})'\Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})}{2w} - \frac{(\boldsymbol{\gamma}'\Sigma^{-1}\boldsymbol{\gamma})w}{2} \right\} h(w) dw$$

となる。6.2節に述べるように、 $h(w)$ は第3種変形ベッセル関数 $K_{\lambda}(x)$ (6.1節参照) を用いて、

$$h(w) = \frac{\chi^{-\lambda}(\sqrt{\chi\psi})^{\lambda}}{2K_{\lambda}(\sqrt{\chi\psi})} w^{\lambda-1} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\chi w^{-1} + \psi w) \right\} \quad (w > 0)$$

と書ける。これを代入すると、

$$\begin{aligned}
f(\mathbf{x}) &= \frac{e^{(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})'\Sigma^{-1}\boldsymbol{\gamma}}}{(2\pi)^{\frac{d}{2}} |\Sigma|^{\frac{1}{2}}} \frac{\chi^{-\lambda}(\sqrt{\chi\psi})^{\lambda}}{2K_{\lambda}(\sqrt{\chi\psi})} \\
&\quad \cdot \int_0^{\infty} w^{\lambda-1-\frac{d}{2}} \exp \left[-\left\{ \chi + (\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})'\Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu}) \right\} \frac{1}{2w} - (\psi + \boldsymbol{\gamma}'\Sigma^{-1}\boldsymbol{\gamma}) \frac{w}{2} \right] dw
\end{aligned}$$

となる。右辺の積分を計算するのに、 $a, b > 0$ に対して、

$$aw^{-1} + bw = \sqrt{ab} \left(\sqrt{\frac{a}{b}} w^{-1} + \sqrt{\frac{b}{a}} w \right)$$

であることに注意して、

$$v = \left\{ \frac{\psi + \boldsymbol{\gamma}'\Sigma^{-1}\boldsymbol{\gamma}}{\chi + (\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})'\Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})} \right\}^{\frac{1}{2}} w$$

と変数変換すると、

上の積分項

$$\begin{aligned}
&= \left\{ \frac{\psi + \boldsymbol{\gamma}'\Sigma^{-1}\boldsymbol{\gamma}}{\chi + (\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})'\Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})} \right\}^{-\frac{1}{2}(\lambda-1-\frac{d}{2})-\frac{1}{2}} \\
&\quad \cdot \int_0^{\infty} v^{\lambda-\frac{d}{2}-1} \exp \left[-\frac{1}{2} \sqrt{\{\chi + (\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})'\Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})\} (\psi + \boldsymbol{\gamma}'\Sigma^{-1}\boldsymbol{\gamma})\}} (v + v^{-1}) \right] dv
\end{aligned}$$

となる。この右辺第2項の積分は、

$$2K_{\lambda-\frac{d}{2}} \left(\sqrt{\{\chi + (\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})'\Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})\} (\psi + \boldsymbol{\gamma}'\Sigma^{-1}\boldsymbol{\gamma})\}} \right)$$

に他ならない。従って GH 分布の密度関数が、

$$f(\mathbf{x}) = c \frac{K_{\lambda-\frac{d}{2}} \left(\sqrt{\{\chi + (\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})'\Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})\} (\psi + \boldsymbol{\gamma}'\Sigma^{-1}\boldsymbol{\gamma})\}} \right) \cdot e^{(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})'\Sigma^{-1}\boldsymbol{\gamma}}}{\left(\sqrt{\{\chi + (\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})'\Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})\} (\psi + \boldsymbol{\gamma}'\Sigma^{-1}\boldsymbol{\gamma})\}} \right)^{\frac{d}{2}-\lambda}} \quad (3)$$

と得られる。ここで、定数 c は、

$$c = \frac{(\sqrt{\chi\psi})^{-\lambda} \psi^\lambda (\psi + \gamma' \Sigma^{-1} \gamma)^{\frac{\lambda}{2} - \lambda}}{(2\pi)^{\frac{d}{2}} |\Sigma|^{\frac{1}{2}} K_\lambda(\sqrt{\chi\psi})} \quad (4)$$

である。

$f(\mathbf{x})$ および c の形から、任意の正数 r に対して、

$$GH_d(\lambda, \frac{\chi}{r}, r\psi, \boldsymbol{\mu}, r\Sigma, r\boldsymbol{\gamma}) = GH_d(\lambda, \chi, \psi, \boldsymbol{\mu}, \Sigma, \boldsymbol{\gamma}) \quad (5)$$

であることが分かる。すなわち、1つの GH 分布を与えるパラメータの組合せが無数にある。パラメータを決める際に留意しておかなければならない点である。

この関係から、1次元の場合、 $\chi, \psi, \Sigma, \boldsymbol{\gamma}$ の1つを固定することにより、パラメータの個数を1つ少なく出来ることが分かる。そのため、パラメータの取り方を次のようにしている文献も多い。

$$\sqrt{\chi\Sigma} \rightarrow \delta, \quad \sqrt{\frac{\psi}{\Sigma}} \rightarrow \gamma', \quad \frac{\boldsymbol{\gamma}}{\Sigma} \rightarrow \beta \quad (\lambda, \boldsymbol{\mu} \text{ はそのまま})$$

この後、さらに、

$$\sqrt{\frac{\gamma'^2}{\Sigma^2} + \frac{\psi}{\Sigma}} \rightarrow \alpha = \sqrt{\beta^2 + \gamma'^2}$$

とにおいて、 $(\lambda, \alpha, \beta, \delta, \boldsymbol{\mu})$ によってパラメータを記述している場合もある。

GH 分布のリスク管理上有用な性質の一つに、一次変換で閉じていることが挙げられる。何故なら、運用資産のポートフォリオ収益率は、ポートフォリオを構成する個々の資産の収益率の加重平均、すなわち一次変換で表されるからである。

この性質を示すために、特性関数を調べる。併せて積率母関数も計算する。

$E[\cdot]$ で確率変数の平均を表わして、GH 分布に従う確率変数 \mathbf{X} の特性関数 $E[e^{it'\mathbf{X}}]$ を $\varphi_{\mathbf{X}}(t)$ で表すことにする。計算の途中で、命題 6.6 および 6.7 で述べる次の結果を用いる。一般逆ガウス分布 $N^-(\lambda, \chi, \psi)$ に従う確率変数 W の積率母関数を $M_W(t)$ とすると、 $t < \frac{\psi}{2}$ および $|z| < \frac{\psi}{2}$ なる実数 t と複素数 z に対して、

$$M_W(t) = \int_0^\infty e^{tw} h(w) dw = \left(\frac{\psi}{\psi - 2t} \right)^{\frac{\lambda}{2}} \frac{K_\lambda(\sqrt{\chi(\psi - 2t)})}{K_\lambda(\sqrt{\chi\psi})} \quad \left(t < \frac{\psi}{2} \right)$$

$$\int_0^\infty e^{zw} h(w) dw = M_W(z) = \left(\frac{\psi}{\psi - 2z} \right)^{\frac{\lambda}{2}} \frac{K_\lambda(\sqrt{\chi(\psi - 2z)})}{K_\lambda(\sqrt{\chi\psi})} \quad \left(|z| < \frac{\psi}{2} \right)$$

である。第3種変形ベッセル関数の複素変数に対する値が現れるが、命題 6.7 の証明で触れるように 0 を除く複素数に対してこれが定義出来ることを注意しておく。

命題 2.1 $GH_d(\lambda, \chi, \psi, \boldsymbol{\mu}, \Sigma, \boldsymbol{\gamma})$ に従う確率変数 \mathbf{X} の特性関数は、次のように表せる。

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathbf{X}}(t) &= e^{it'\boldsymbol{\mu}} M_W \left(-\frac{1}{2} t' \Sigma t + it' \boldsymbol{\gamma} \right) \\ &= e^{it'\boldsymbol{\mu}} \left(\frac{\psi}{\psi + t' \Sigma t - 2it' \boldsymbol{\gamma}} \right)^{\frac{\lambda}{2}} \frac{K_\lambda(\sqrt{\chi(\psi + t' \Sigma t - 2it' \boldsymbol{\gamma})})}{K_\lambda(\sqrt{\chi\psi})} \quad (6) \\ &\quad (\text{ただし, } |-t' \Sigma t + 2it' \boldsymbol{\gamma}| < \psi) \end{aligned}$$

証明 W が与えられたときの条件付平均、すなわち W が生成する σ 集合体を与えられたときの条件付平均を $E[\cdot | W]$ で表すと、(1) 式および条件付平均の性質より、

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathbf{X}}(t) &= E[e^{it'\mathbf{X}}] = E[E[e^{it'\mathbf{X}} | W]] \\ &= E[E[e^{it'(\boldsymbol{\mu} + W\boldsymbol{\gamma} + \sqrt{W}\mathbf{AZ})} | W]] = e^{it'\boldsymbol{\mu}} E[e^{it'\boldsymbol{\gamma}W} \cdot E[e^{i\sqrt{W}t'\mathbf{AZ}} | W]] \end{aligned}$$

となる．各成分の平均が 0，共分散行列が C の多次元正規分布の特性関数が $e^{-\frac{1}{2}t' Ct}$ であることより， $E[e^{i\sqrt{w}t'AZ} | W] = e^{-\frac{1}{2}(t'\Sigma t)w}$ ．よって， W と Z が独立であることより， $E[e^{i\sqrt{W}t'AZ} | W] = e^{-\frac{1}{2}(t'\Sigma t)W}$ となる (直感的に受け入れられるが，厳密には [西尾 (1978)] §1 の例 1 と §2 の例 1，または [Williams(1991)]9.10 節による) から，

$$E[e^{it'\gamma W} \cdot E[e^{i\sqrt{W}t'AZ} | W]] = E[e^{it'\gamma W} e^{-\frac{1}{2}(t'\Sigma t)W}] = \int_0^\infty e^{it'\gamma w} e^{-\frac{1}{2}(t'\Sigma t)w} h(w) dw$$

が従う．上で見た命題 6.6 および 6.7 の結果である 2 つ目の等式の最初の等号より， $|-t'\Sigma t + 2it'\gamma| < \psi$ なる t に対して，右辺は $M_W(-\frac{1}{2}t'\Sigma t + it'\gamma)$ に等しい．よって，同じ等式の 2 つ目の等号より (6) 式が従う．

(証明終)

積率母関数は次のように計算出来る．その結果より， $\chi > 0$ かつ $\psi > 0$ の場合は 0 の近傍で積率母関数が存在するので，全ての次数の積率が存在する．

命題 2.2 1 次元 ($d = 1$) の場合， $GH_1(\lambda, \chi, \psi, \mu, \Sigma, \gamma)$ に従う確率変数 X の積率母関数 $M_X(t)$ は，次のように表せる．

$$M_X(t) = e^{t\mu} M_W\left(\frac{1}{2}t^2\Sigma + t\gamma\right) = e^{t\mu} \left(\frac{\psi}{\psi - t^2\Sigma - 2t\gamma}\right)^{\frac{\lambda}{2}} \frac{K_\lambda\left(\sqrt{\chi(\psi - t^2\Sigma - 2t\gamma)}\right)}{K_\lambda(\sqrt{\chi\psi})} \quad (7)$$

(ただし， $t^2\Sigma + 2t\gamma < \psi$)

証明 特性関数のときと異なり， e^{tX} が有界ではないので， (Z, W) の結合分布の密度関数を用いて示す． Z の密度関数を $\phi(x)$ ($x \in \mathbb{R}$) とすると， Z と W が独立だから (Z, W) の結合分布の密度関数は $\phi(x)h(w)$ である．平均が 0，分散が σ^2 である正規分布の積率母関数が $e^{\frac{1}{2}t^2\sigma^2}$ であることに注意して，

$$\begin{aligned} M_X(t) &= E[e^{tX}] = E[e^{t(\mu + W\gamma + \sqrt{W}AZ)}] \\ &= e^{t\mu} \int_{\mathbb{R} \times (0, \infty)} e^{t\gamma w} e^{t\sqrt{w}Ax} \phi(x)h(w) dx dw \\ &= e^{t\mu} \int_0^\infty e^{t\gamma w} h(w) \left(\int_{-\infty}^\infty e^{t\sqrt{w}Ax} \phi(x) dx \right) dw \\ &= \int_0^\infty e^{t\gamma w} e^{\frac{1}{2}t^2\Sigma w} h(w) dw \end{aligned}$$

が従う．右辺は $M_W(\frac{1}{2}t^2\Sigma + t\gamma)$ であるから，命題 2.1 の前で見た命題 6.6 の結果である 1 つ目の等式より (7) 式が従う．

(証明終)

GH 分布の特性関数が求められたから，特性関数の一意性を適用して，GH 分布が一次変換で閉じていることが次のように言える．

命題 2.3 $X \sim GH_d(\lambda, \chi, \psi, \mu, \Sigma, \gamma)$ とする． B を l 行 d 列の行列， $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^l$ とし

$$Y = BX + \mathbf{b}$$

とおく．このとき，

$$Y \sim GH_l(\lambda, \chi, \psi, B\mu + \mathbf{b}, B\Sigma B', B\gamma) \quad (8)$$

である．ここに， \sim は左辺の確率変数が右辺の分布に従うことを表す．

証明 Y の特性関数を計算すると,

$$\begin{aligned}\varphi_Y(\mathbf{t}) &= \mathbb{E}[e^{i\mathbf{t}'Y}] = e^{i\mathbf{t}'\mathbf{b}}\mathbb{E}[e^{i(B'\mathbf{t})'X}] \\ &= e^{i\mathbf{t}'\mathbf{b}}\varphi_X(B'\mathbf{t}) \\ &= e^{i\mathbf{t}'\mathbf{b}}e^{i(B'\mathbf{t})'\boldsymbol{\mu}}M_W\left(-\frac{1}{2}(B'\mathbf{t})'\Sigma B'\mathbf{t} + i(B'\mathbf{t})'\boldsymbol{\gamma}\right) \\ &= e^{i\mathbf{t}'(B\boldsymbol{\mu}+\mathbf{b})}M_W\left(-\frac{1}{2}\mathbf{t}'B\Sigma B'\mathbf{t} + i\mathbf{t}'B\boldsymbol{\gamma}\right)\end{aligned}$$

となる. これは, X の特性関数において,

$$\boldsymbol{\mu} \longrightarrow B\boldsymbol{\mu} + \mathbf{b}, \quad \Sigma \longrightarrow B\Sigma B', \quad \boldsymbol{\gamma} \longrightarrow B\boldsymbol{\gamma}$$

と置き換えた GH 分布の特性関数に他ならない. 従って, (8) が言えた.

(証明終)

λ, χ, ψ が一次変換で不変であることは (1) 式から分かるが, (8) によれば, 1次元の場合 $\frac{\gamma}{\sqrt{\Sigma}}$ も一次変換で不変である.

2.2 中心積率および歪度・尖度

以下この節では, $d = 1$ とする. 非正規分布では, 高次の積率が重要である. 非正規分布を試みる主な動機が, 平均を挟んだ非対称性や正規分布よりも高い尖りを反映したいことだからである. 非対称性の尺度としては, 3次の中心積率を分散の $\frac{3}{2}$ 乗で除した歪度, 尖がり具合の尺度としては, 4次の中心積率を分散の 2乗で除した尖度が用いられる. 正規分布では, 歪度が 0, 尖度が 3であった.

GH 分布の分散, 歪度および尖度の性質を知るために, まず, GH 分布の中心積率を混合要素である一般逆ガウス分布 W の中心積率で表してみる.

命題 2.4 $GH_1(\lambda, \chi, \psi, \boldsymbol{\mu}, \Sigma, \boldsymbol{\gamma})$ に従う確率変数 X の平均, および 2次から 4次までの中心積率はそれぞれ次のとおりである.

$$\mathbb{E}[X] = \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbb{E}[W] \quad (9)$$

$$\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \Sigma \cdot \mathbb{E}[W] + \boldsymbol{\gamma}^2 \cdot \mathbb{E}[(W - \mathbb{E}[W])^2] \quad (10)$$

$$\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^3] = 3\boldsymbol{\gamma}\Sigma \cdot \mathbb{E}[(W - \mathbb{E}[W])^2] + \boldsymbol{\gamma}^3 \cdot \mathbb{E}[(W - \mathbb{E}[W])^3] \quad (11)$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^4] &= 3\Sigma^2 \cdot \mathbb{E}[W^2] + 6\boldsymbol{\gamma}^2\Sigma \cdot \mathbb{E}[(W - \mathbb{E}[W])^3] \\ &\quad + 6\boldsymbol{\gamma}^2\Sigma \cdot \mathbb{E}[W] \cdot \mathbb{E}[(W - \mathbb{E}[W])^2] + \boldsymbol{\gamma}^4 \cdot \mathbb{E}[(W - \mathbb{E}[W])^4] \quad (12)\end{aligned}$$

証明 $X = \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\gamma}W + \sqrt{W}AZ$ と書け, W と Z が独立であり, Z の平均が 0 であることから,

$$\mathbb{E}[X] = \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\gamma}\mathbb{E}[W]$$

であることは直ぐに分かる. これから,

$$X - \mathbb{E}[X] = \boldsymbol{\gamma} \cdot (W - \mathbb{E}[W]) + \sqrt{W}AZ$$

と書ける. また,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(W - \mathbb{E}[W])^2] &= \mathbb{E}[(W - \mathbb{E}[W]) \cdot W] - \mathbb{E}[W - \mathbb{E}[W]] \cdot \mathbb{E}[W] \\ &= \mathbb{E}[(W - \mathbb{E}[W]) \cdot W]\end{aligned}$$

$$\mathbb{E}[(W - \mathbb{E}[W])^3] = \mathbb{E}[(W - \mathbb{E}[W])^2 \cdot W] - \mathbb{E}[(W - \mathbb{E}[W])^2] \cdot \mathbb{E}[W]$$

より,

$$E[(W - E[W]) \cdot W] = E[(W - E[W])^2]$$

$$E[(W - E[W])^2 W] = E[(W - E[W])^3] + E[W] \cdot E[(W - E[W])^2]$$

に注意する. Z の奇数次の積率が 0 であるから, X の中心積率は次のように計算出来る.

$$\begin{aligned} E[(X - E[X])^2] &= E[\{\gamma(W - E[W]) + \sqrt{W}AZ\}^2] \\ &= \gamma^2 \cdot E[(W - E[W])^2] + \Sigma \cdot E[W] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[(X - E[X])^3] &= E[\{\gamma(W - E[W]) + \sqrt{W}AZ\}^3] \\ &= \gamma^3 \cdot E[(W - E[W])^3] + 3\gamma\Sigma \cdot E[(W - E[W])W] \\ &= \gamma^3 \cdot E[(W - E[W])^3] + 3\gamma\Sigma \cdot E[(W - E[W])^2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[(X - E[X])^4] &= E[\{\gamma(W - E[W]) + \sqrt{W}AZ\}^4] \\ &= \gamma^4 \cdot E[(W - E[W])^4] + 6\gamma^2\Sigma \cdot E[(W - E[W])^2 W] \cdot E[Z^2] \\ &\quad + \Sigma^2 \cdot E[W^2] \cdot E[Z^4] \\ &= \gamma^4 \cdot E[(W - E[W])^4] + 6\gamma^2\Sigma \cdot E[(W - E[W])^3] \\ &\quad + 6\gamma^2\Sigma \cdot E[W] \cdot E[(W - E[W])^2] + 3\Sigma^2 \cdot E[W^2] \end{aligned}$$

(証明終)

6.2 節の末尾で触れるように, 一般逆ガウス分布の歪度は正であることが示されている. よって, (11) 式より, GH 分布の歪度の符号は γ の符号で決まり, 両者の符号は同一である.

さらに, 一般逆ガウス分布の尖度は 3 超であろうと予想されている. この予想が正しければ, 次の命題 2.5 で述べるように GH 分布の尖度も 3 超であることが言える. GH 分布の特別の場合である NIG 分布あるいは本稿では触れない VG 分布 (variance-gamma distribution) や t 分布 (対称, 非対称) においては, 混合要素の尖度が個別に 3 超であることが確認出来るので, 命題 2.5 からそれら自身の尖度も 3 超である. なお, 命題 2.4 および 2.5 は, χ または ψ が 0 であっても何ら影響を受けずに成り立つことを注意しておく.

従って, 標本尖度が 3 以下の時系列に GH 分布を当てはめるのは不適當であろう. 実際, NIG 分布をそのような時系列に当てはめようとする, パラメータ推定のための EM アルゴリズムが収束しない.

命題 2.5 一般逆ガウス分布の尖度が 3 超であれば, GH 分布の尖度も 3 超である.

証明 (12) 式は,

$$\begin{aligned} E[(X - E[X])^4] &= \{ 3\Sigma^2 \cdot E[W]^2 + 6\gamma^2\Sigma \cdot E[W] \cdot E[(W - E[W])^2] + 3\gamma^4 \cdot E[(W - E[W])^2]^2 \} \\ &\quad + [3\Sigma^2 (E[W^2] - E[W]^2) + 6\gamma^2\Sigma \cdot E[(W - E[W])^3] \\ &\quad + \gamma^4 \{ E[(W - E[W])^4] - 3E[(W - E[W])^2]^2 \}] \end{aligned}$$

と変形出来る. 右辺第 1 項の $\{ \quad \}$ が $E[(X - E[X])^2]^2$ の 3 倍に等しいから, 右辺第 2 項の $[\quad]$ が正であることが言えれば主張が従う.

$$\begin{aligned} \frac{\text{右辺第 2 項}}{3\Sigma^2 \cdot E[(W - E[W])^2]} &= 1 + 2 \frac{\gamma^2 E[(W - E[W])^3]}{\Sigma E[(W - E[W])^2]} \\ &\quad + \frac{\gamma^4 \frac{1}{3} E[(W - E[W])^4] - E[(W - E[W])^2]^2}{\Sigma^2 E[(W - E[W])^2]} \end{aligned}$$

となるから,

$$m = \frac{\frac{1}{3}E[(W - E[W])^4] - E[(W - E[W])^2]^2}{E[(W - E[W])^2]}$$

$$n = \frac{E[(W - E[W])^3]}{E[(W - E[W])^2]}$$

とおいて,

$$f(x) = mx^2 + 2nx + 1 = m \left(x + \frac{n}{m} \right)^2 - \frac{n^2}{m} + 1$$

とすると,

$$\frac{\text{右辺第 2 項}}{3\Sigma^2 \cdot \{E[(W - E[W])^2]\}} = f\left(\frac{\gamma^2}{\Sigma}\right)$$

となる. 一般逆ガウス分布の歪度は正であるから $n > 0$. さらにその尖度が 3 超であれば $m > 0$ となるから, $f(x)$ は最小値を $x < 0$ の範囲で取り, さらに $f(0) = 1 > 0$ である. 然るに, $\frac{\gamma^2}{\Sigma} \geq 0$ であるから, $f\left(\frac{\gamma^2}{\Sigma}\right) > 0$ が従う.

(証明終)

GH 分布をリスク管理に応用する際に, 分散・歪度・尖度に関わるパラメータの特性を知っておくと便利である. $X \sim GH_1(\lambda, \chi, \psi, \mu, \Sigma, \gamma)$ とし, $a, b \in \mathbb{R} (a \neq 0)$ に対して, $Y = aX + b$ とおくと, 命題 2.3 により $Y \sim GH_1(\lambda, \chi, \psi, a\mu + b, a^2\Sigma, a\gamma)$ であった.

(10) 式より Y の分散は元々位置 (location) を表す b には無関係であるが, 尺度 (scale) を表す a に依存する項と, a および b から独立な項との積に分解出来ることが分かる. また, 歪度および尖度は a および b から独立, すなわち位置・尺度変換の下で不変であり, 形状にのみ依存すると言える. これらを [Prause(1999)](6, 38, 39 頁) を参考に 2 つの命題として示そう. 確率変数の分散を $V[\cdot]$ で表す.

命題 2.6 $GH_1(\lambda, \chi, \psi, \mu, \Sigma, \gamma)$ に従う確率変数 X の分散は,

$$V[X] = (\chi\Sigma) \left[\frac{1}{\sqrt{\chi\psi}} \frac{K_{\lambda+1}(\sqrt{\chi\psi})}{K_{\lambda}(\sqrt{\chi\psi})} + \frac{\gamma^2}{\psi\Sigma} \left\{ \frac{K_{\lambda+2}(\sqrt{\chi\psi})}{K_{\lambda}(\sqrt{\chi\psi})} - \left(\frac{K_{\lambda+1}(\sqrt{\chi\psi})}{K_{\lambda}(\sqrt{\chi\psi})} \right)^2 \right\} \right] \quad (13)$$

と書ける. 右辺第 1 項の $\chi\Sigma$ は尺度に依存するが, [] の中は尺度に無関係である. 何れも位置には無関係である.

証明 (10) 式および命題 6.8 により,

$$\begin{aligned} V[X] &= E[(X - E[X])^2] \\ &= \Sigma \cdot E[W] + \gamma^2 \cdot E[(W - E[W])^2] \\ &= \Sigma \cdot E[W] + \gamma^2 (E[W^2] - E[W]^2) \\ &= \Sigma \left(\frac{\chi}{\psi} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{K_{\lambda+1}(\sqrt{\chi\psi})}{K_{\lambda}(\sqrt{\chi\psi})} + \gamma^2 \frac{\chi}{\psi} \left\{ \frac{K_{\lambda+2}(\sqrt{\chi\psi})}{K_{\lambda}(\sqrt{\chi\psi})} - \left(\frac{K_{\lambda+1}(\sqrt{\chi\psi})}{K_{\lambda}(\sqrt{\chi\psi})} \right)^2 \right\} \\ &= \chi\Sigma \left[\frac{1}{\sqrt{\chi\psi}} \frac{K_{\lambda+1}(\sqrt{\chi\psi})}{K_{\lambda}(\sqrt{\chi\psi})} + \frac{\gamma^2}{\psi\Sigma} \left\{ \frac{K_{\lambda+2}(\sqrt{\chi\psi})}{K_{\lambda}(\sqrt{\chi\psi})} - \left(\frac{K_{\lambda+1}(\sqrt{\chi\psi})}{K_{\lambda}(\sqrt{\chi\psi})} \right)^2 \right\} \right] \end{aligned}$$

となる. X に 1 次変換 $aX + b$ を施しても $\sqrt{\chi\psi}$, $\frac{\gamma^2}{\psi\Sigma}$ は命題 2.3 より不変であるから, 右辺の [] の中は a および b に無関係である. 他方 $\chi\Sigma$ は, b には依存しないが a に依存する.

(証明終)

命題 2.7 $GH_1(\lambda, \chi, \psi, \mu, \Sigma, \gamma)$ に従う確率変数 X の歪度および尖度は, $\sqrt{\chi\psi}$, $\frac{\gamma^2}{\psi\Sigma}$ の関数である. 従って, 尺度および位置に無関係である.

証明 (11) 式および (12) 式より,

$$\begin{aligned} E[(X - E[X])^3] &= 3\gamma\Sigma \cdot E[(W - E[W])^2] + \gamma^3 \cdot E[(W - E[W])^3] \\ E[(X - E[X])^4] &= 3\Sigma^2 \cdot E[W^2] + 6\gamma^2\Sigma \cdot E[(W - E[W])^3] \\ &\quad + 6\gamma^2\Sigma \cdot E[W] \cdot E[(W - E[W])^2] + \gamma^4 \cdot E[(W - E[W])^4] \end{aligned}$$

であり, 右辺に現れる W の積率または中心積率の各項は命題 6.8 より,

$$\begin{aligned} E[W^\alpha] &= \left(\frac{\chi}{\psi}\right)^{\frac{\alpha}{2}} \frac{K_{\lambda+\alpha}(\sqrt{\chi\psi})}{K_\lambda(\sqrt{\chi\psi})} \\ E[(W - E[W])^2] &= E[W^2] - E[W]^2 \\ &= \left(\frac{\chi}{\psi}\right) \left\{ \frac{K_{\lambda+2}(\sqrt{\chi\psi})}{K_\lambda(\sqrt{\chi\psi})} - \left(\frac{K_{\lambda+1}(\sqrt{\chi\psi})}{K_\lambda(\sqrt{\chi\psi})}\right)^2 \right\} \\ E[(W - E[W])^3] &= E[W^3] - 3E[W^2]E[W] + 2E[W]^3 \\ &= \left(\frac{\chi}{\psi}\right)^{\frac{3}{2}} \left\{ \frac{K_{\lambda+3}(\sqrt{\chi\psi})}{K_\lambda(\sqrt{\chi\psi})} - 3\frac{K_{\lambda+2}(\sqrt{\chi\psi})K_{\lambda+1}(\sqrt{\chi\psi})}{K_\lambda(\sqrt{\chi\psi})^2} + 2\left(\frac{K_{\lambda+1}(\sqrt{\chi\psi})}{K_\lambda(\sqrt{\chi\psi})}\right)^3 \right\} \\ E[(W - E[W])^4] &= E[W^4] - 4E[W^3]E[W] + 6E[W^2]E[W]^2 - 3E[W]^4 \\ &= \left(\frac{\chi}{\psi}\right)^2 \left\{ \frac{K_{\lambda+4}(\sqrt{\chi\psi})}{K_\lambda(\sqrt{\chi\psi})} - 4\frac{K_{\lambda+3}(\sqrt{\chi\psi})K_{\lambda+1}(\sqrt{\chi\psi})}{K_\lambda(\sqrt{\chi\psi})^2} \right. \\ &\quad \left. + 6\frac{K_{\lambda+2}(\sqrt{\chi\psi})K_{\lambda+1}(\sqrt{\chi\psi})^2}{K_\lambda(\sqrt{\chi\psi})^3} - 3\left(\frac{K_{\lambda+1}(\sqrt{\chi\psi})}{K_\lambda(\sqrt{\chi\psi})}\right)^4 \right\} \end{aligned}$$

と書ける. これらの右辺の $\frac{\chi}{\psi}$ の累乗で括られた項は $\sqrt{\chi\psi}$ の関数である.

一方, (13) 式より, $V[X]$ は $\sqrt{\chi\psi}$, $\frac{\gamma^2}{\psi\Sigma}$ の関数項と $\chi\Sigma$ との積であった. 従って, $E[(X - E[X])^3]$ および $E[(X - E[X])^4]$ の右辺において, W の積率・中心積率に掛かる係数と上に出て来た $\frac{\chi}{\psi}$ の累乗との積を, それぞれ $(\chi\Sigma)^{\frac{3}{2}}$, $(\chi\Sigma)^2$ で除したものが $\sqrt{\chi\psi}$, $\frac{\gamma^2}{\psi\Sigma}$ の関数であることを示せばよい. 実際,

$$\begin{aligned} \frac{1}{(\chi\Sigma)^{\frac{3}{2}}} \gamma\Sigma \frac{\chi}{\psi} &= \frac{\gamma}{\sqrt{\psi\Sigma}} \frac{1}{\sqrt{\chi\psi}}, & \frac{1}{(\chi\Sigma)^{\frac{3}{2}}} \gamma^3 \left(\frac{\chi}{\psi}\right)^{\frac{3}{2}} &= \left(\frac{\gamma}{\sqrt{\psi\Sigma}}\right)^3 \\ \frac{1}{(\chi\Sigma)^2} \Sigma^2 \frac{\chi}{\psi} &= \frac{1}{\chi\psi}, & \frac{1}{(\chi\Sigma)^2} \gamma^2\Sigma \left(\frac{\chi}{\psi}\right)^{\frac{3}{2}} &= \frac{\gamma^2}{\psi\Sigma} \frac{1}{\sqrt{\chi\psi}}, & \frac{1}{(\chi\Sigma)^2} \gamma^4 \left(\frac{\chi}{\psi}\right)^2 &= \frac{\gamma^4}{(\psi\Sigma)^2} \end{aligned}$$

であるから, 命題の主張が従う.

(証明終)

命題 2.6 および 2.7 によれば, ある資産あるいはある資産ポートフォリオの収益率の将来の分布に GH 分布を適用する場合, 歪度および尖度で表される形状は長期の時系列データに基づいて決め, 分散は最近の時系列データに基づいて決める, ということが可能である.

収益率の分布の形状を決めるには出来るだけ多くの観測値を用いることが望ましいであろう. 過去に実現した極端な収益率を含めるのにも長期の観測期間が必要になることが多い. 一方, 標準偏差すなわち分散は最近の市場動向や市場構造などを反映して決めたい場合があるであろう. このような時に上の方法が適用出来る. また, ある資産の収益率の過去データが短い期間でしか入手出来ないが類似の他の

資産あるいは市場インデックスの収益率なら長期間で入手出来る場合、形状を後者の長期間データに基づいて定めることにより、分散の計算に用いる直接的なデータの不十分性を補うことも考えられる。

具体的には次のようにすればよい。まず、長期の時系列データに基づいて一組のパラメータ $(\lambda, \chi, \psi, \mu, \Sigma, \gamma)$ を求め、これによって (13) 式右辺の [] の中を計算して C とする。次に最近の時系列データに基づきもう一組のパラメータ $(\dot{\lambda}, \dot{\chi}, \dot{\psi}, \dot{\mu}, \dot{\Sigma}, \dot{\gamma})$ を求め、同様に C に対応する \dot{C} を計算する。それぞれのパラメータによる GH 分布に従う確率変数を X, \dot{X} とすると、

$$V[X] = \chi \Sigma C, \quad V[\dot{X}] = \dot{\chi} \dot{\Sigma} \dot{C}$$

である。そこで、

$$\begin{aligned} \bar{\lambda} &= \lambda, \quad \bar{\chi} = \chi, \quad \bar{\psi} = \frac{\chi \psi}{\bar{\chi}}, \quad \bar{\Sigma} = \frac{V[\dot{X}]}{\bar{\chi} C} \\ \bar{\gamma} &= \left(\frac{\bar{\psi} \bar{\Sigma}}{\psi \Sigma} \right)^{\frac{1}{2}} \gamma = \frac{\chi}{\dot{\chi}} \left(\frac{V[\dot{X}]}{V[X]} \right)^{\frac{1}{2}} \gamma, \quad \bar{\mu} = E[\dot{X}] - \bar{\gamma} \left(\frac{\bar{\chi}}{\bar{\psi}} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{K_{\lambda+1}(\sqrt{\chi \psi})}{K_{\lambda}(\sqrt{\chi \psi})} \end{aligned}$$

とおくと、 $\sqrt{\bar{\chi} \bar{\psi}}, \frac{\bar{\gamma} \bar{\Sigma}}{\bar{\psi}}$ がそれぞれ $\sqrt{\chi \psi}, \frac{\gamma \Sigma}{\psi}$ に等しく、従って、命題 2.7 から、両者の歪度および尖度は共通である。よって、 $GH_1(\bar{\lambda}, \bar{\chi}, \bar{\psi}, \bar{\mu}, \bar{\Sigma}, \bar{\gamma})$ の形状は $GH_1(\lambda, \chi, \psi, \mu, \Sigma, \gamma)$ と同じであると言える。一方、平均と分散は $GH_1(\dot{\lambda}, \dot{\chi}, \dot{\psi}, \dot{\mu}, \dot{\Sigma}, \dot{\gamma})$ と同じである。これは、平均については (9) 式および命題 6.8 を、分散については (13) 式を、それぞれ適用することにより確認出来る。

最近の時系列データが正規分布に近い場合、GH 分布としてのパラメータ $(\dot{\lambda}, \dot{\chi}, \dot{\psi}, \dot{\mu}, \dot{\Sigma}, \dot{\gamma})$ を推定するための後述するアルゴリズムが収束しないかも知れない。その場合は次のようにする。上の置き方に代えて、

$$\begin{aligned} \bar{\lambda} &= \lambda, \quad \bar{\chi} = \chi, \quad \bar{\psi} = \psi, \quad \bar{\Sigma} = \frac{V[\dot{X}]}{\chi C} \\ \bar{\gamma} &= \left(\frac{\bar{\Sigma}}{\Sigma} \right)^{\frac{1}{2}} \gamma = \left(\frac{V[\dot{X}]}{V[X]} \right)^{\frac{1}{2}} \gamma, \quad \bar{\mu} = E[\dot{X}] - \bar{\gamma} \left(\frac{\chi}{\psi} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{K_{\lambda+1}(\sqrt{\chi \psi})}{K_{\lambda}(\sqrt{\chi \psi})} \end{aligned}$$

としても同じ GH 分布を与えるので、 $V[\dot{X}], E[\dot{X}]$ をそれぞれ標本分散、標本平均で置き換えればよい。このパラメータの組も、先に述べたパラメータの組と同じ GH 分布を与えることは、何れにおいても、

$$\begin{aligned} \bar{\chi} \bar{\psi} &= \chi \psi, \quad \bar{\chi} \bar{\Sigma} = \frac{V[\dot{X}]}{C}, \quad \bar{\chi} \bar{\gamma} = \left(\frac{\chi V[\dot{X}]}{\Sigma C} \right)^{\frac{1}{2}} \gamma, \\ \bar{\mu} &= E[\dot{X}] - \left(\frac{\chi}{\psi} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{V[\dot{X}]}{V[X]} \right)^{\frac{1}{2}} \gamma \frac{K_{\lambda+1}(\sqrt{\chi \psi})}{K_{\lambda}(\sqrt{\chi \psi})} \end{aligned}$$

となることから分かる。

2.3 GH 分布と正規分布との関係

[増田 (2002)]181 頁にあるように、GH 分布はその極限として正規分布を含む。

命題 2.8 $d=1$ とし、 $\sigma > 0$ に対して、

$$\chi = \frac{\psi \sigma^4}{\Sigma^2}, \quad \gamma = 0$$

として、 $\psi \rightarrow \infty$ とすると、

$$\text{GH 分布の密度関数} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

となり，正規分布の密度関数に収束する．

証明 まず，証明の途中で必要な次の3つに注意する．

$$\begin{aligned} K_{\frac{1}{2}}(x) &= \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} \quad (x > 0) \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{K_{\lambda}(x)}{K_{\frac{1}{2}}(x)} &= 1 \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \\ \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\sqrt{1 + \frac{a}{x}} - 1 \right) &= \frac{a}{2} \quad (a \neq 0) \end{aligned}$$

最初の2つは命題 6.2, 6.4 を参照．3つ目は，ロピタルの定理を使って，次のように導ける．

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\sqrt{1 + \frac{a}{x}} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{a}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(-\frac{a}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \frac{a}{2}$$

さて，GH 分布の密度関数 (3) 式において $\gamma = 0$ とすると，

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(\sqrt{\chi\psi})^{-\lambda} \psi^{\lambda} \psi^{\frac{1}{2}-\lambda} K_{\lambda-\frac{1}{2}} \left(\sqrt{\{\chi + (x-\mu)^2 \Sigma^{-1}\} \psi} \right)}{(2\pi)^{\frac{1}{2}} \Sigma^{\frac{1}{2}} K_{\lambda}(\sqrt{\chi\psi}) \left(\sqrt{\{\chi + (x-\mu)^2 \Sigma^{-1}\} \psi} \right)^{\frac{1}{2}-\lambda}} \\ &= \frac{(\sqrt{\chi\psi})^{-\lambda} \psi^{\frac{1}{2}}}{(2\pi\Sigma)^{\frac{1}{2}} K_{\frac{1}{2}}(\sqrt{\chi\psi})} \cdot \frac{K_{\frac{1}{2}} \left(\sqrt{\{\chi + (x-\mu)^2 \Sigma^{-1}\} \psi} \right)}{\left(\sqrt{\{\chi + (x-\mu)^2 \Sigma^{-1}\} \psi} \right)^{\frac{1}{2}-\lambda}} \\ &\quad \cdot \frac{K_{\frac{1}{2}}(\sqrt{\chi\psi})}{K_{\lambda}(\sqrt{\chi\psi})} \cdot \frac{K_{\lambda-\frac{1}{2}} \left(\sqrt{\{\chi + (x-\mu)^2 \Sigma^{-1}\} \psi} \right)}{K_{\frac{1}{2}} \left(\sqrt{\{\chi + (x-\mu)^2 \Sigma^{-1}\} \psi} \right)} \end{aligned}$$

となる． $\chi = \frac{\psi\sigma^4}{\Sigma^2}$ とおいて $\psi \rightarrow \infty$ とすると，最後の2つの項は1に収束する．前の2項について計算を進めると，

$$\begin{aligned} \text{前2項} &= \frac{(\sqrt{\chi\psi})^{-\lambda} \psi^{\frac{1}{2}}}{(2\pi\Sigma)^{\frac{1}{2}}} \cdot \left(\sqrt{\frac{\pi}{2\sqrt{\chi\psi}}} e^{-\sqrt{\chi\psi}} \right)^{-1} \\ &\quad \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2\sqrt{\{\chi + (x-\mu)^2 \Sigma^{-1}\} \psi}}} \cdot \exp \left[-\sqrt{\{\chi + (x-\mu)^2 \Sigma^{-1}\} \psi} \right] \\ &\quad \cdot \frac{1}{\left(\sqrt{\{\chi + (x-\mu)^2 \Sigma^{-1}\} \psi} \right)^{\frac{1}{2}-\lambda}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\Sigma} \left(\frac{\chi}{\psi} \right)^{\frac{1}{4}}} \frac{1}{\left(\sqrt{1 + \frac{(x-\mu)^2}{\chi\Sigma}} \right)^{1-\lambda}} \exp \left\{ -\sqrt{\chi\psi} \left(\sqrt{1 + \frac{(x-\mu)^2}{\chi\Sigma}} - 1 \right) \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \frac{1}{\left(\sqrt{1 + \frac{(x-\mu)^2}{\chi\Sigma}} \right)^{1-\lambda}} \exp \left\{ -\frac{\psi\sigma^2}{\Sigma} \left(\sqrt{1 + \frac{(x-\mu)^2}{\frac{\psi\sigma^2}{\Sigma} \cdot \sigma^2}} - 1 \right) \right\} \\ &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (\psi \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

となる．

(証明終)

3 NIG 分布について

NIG 分布は、GH 分布で $\lambda = -\frac{1}{2}$ とした場合であるが、このときは第 3 種変形ベッセル関数が、

$$K_{-\frac{1}{2}}(x) = K_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x}$$

と初等関数で書けるので、密度関数の表現も少し簡単になる。すなわち、

$$f(\mathbf{x}) = c \frac{K_{\frac{d+1}{2}} \left(\sqrt{\{\chi + (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})' \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})\}} (\psi + \boldsymbol{\gamma}' \Sigma^{-1} \boldsymbol{\gamma}) \right) \cdot e^{(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})' \Sigma^{-1} \boldsymbol{\gamma}}}{\left(\sqrt{\{\chi + (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})' \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})\}} (\psi + \boldsymbol{\gamma}' \Sigma^{-1} \boldsymbol{\gamma}) \right)^{\frac{d+1}{2}}} \quad (14)$$

であり、定数 c が、

$$c = \frac{(\sqrt{\chi\psi})^{\frac{1}{2}} \psi^{-\frac{1}{2}} (\psi + \boldsymbol{\gamma}' \Sigma^{-1} \boldsymbol{\gamma})^{\frac{d+1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{d}{2}} |\Sigma|^{\frac{1}{2}} K_{-\frac{1}{2}}(\sqrt{\chi\psi})} = \frac{\chi^{\frac{1}{2}} (\psi + \boldsymbol{\gamma}' \Sigma^{-1} \boldsymbol{\gamma})^{\frac{d+1}{2}} e^{\sqrt{\chi\psi}}}{2^{\frac{d-1}{2}} \pi^{\frac{d+1}{2}} |\Sigma|^{\frac{1}{2}}} \quad (15)$$

となる。

しかし、最も著しい性質は再生性、すなわち、 $\psi, \Sigma, \boldsymbol{\gamma}$ が等しい NIG 分布に従う 2 つの独立な確率変数 X_1, X_2 に対して、 $X_1 + X_2$ は再び NIG 分布に従うという性質である。この性質により、例えば月次収益率の分布を決めれば、各月の収益率の分布が独立かつ同一という仮定の下、年次ベースの VaR や期待ショートフォールを簡単に計算出来る。GH 分布族に属する分布の中でこの再生性を持つのは、NIG 分布と NG 分布 (normal-gamma distribution, $\lambda > 0$ の下で $\chi \downarrow 0$ とした場合) だけである ([増田 (2002)] 188 頁)。GH 分布族の中から特に NIG 分布を取り上げたのは、この性質を有するからである。

特性関数を計算することによって、この事実を確認しよう。GH 分布の特性関数である (6) 式に現れる第 3 種変形ベッセル関数の項が、

$$\frac{K_{-\frac{1}{2}} \left(\sqrt{\chi(\psi + \mathbf{t}' \Sigma \mathbf{t} - 2i\mathbf{t}' \boldsymbol{\gamma})} \right)}{K_{-\frac{1}{2}}(\sqrt{\chi\psi})} = \left(\frac{\psi}{\psi + \mathbf{t}' \Sigma \mathbf{t} - 2i\mathbf{t}' \boldsymbol{\gamma}} \right)^{\frac{1}{4}} \exp\{-\sqrt{\chi}(\sqrt{\psi + \mathbf{t}' \Sigma \mathbf{t} - 2i\mathbf{t}' \boldsymbol{\gamma}} - \sqrt{\psi})\}$$

と簡単になる。従って、 X が NIG 分布 $GH_d(-\frac{1}{2}, \chi, \psi, \boldsymbol{\mu}, \Sigma, \boldsymbol{\gamma})$ に従う場合の特性関数は、

$$\varphi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = e^{i\mathbf{t}' \boldsymbol{\mu}} \exp\{-\sqrt{\chi}(\sqrt{\psi + \mathbf{t}' \Sigma \mathbf{t} - 2i\mathbf{t}' \boldsymbol{\gamma}} - \sqrt{\psi})\} \quad (16)$$

となる。同様に 1 次元 ($d = 1$) の場合の積率母関数も、

$$M_X(t) = e^{t\boldsymbol{\mu}} \exp\{-\sqrt{\chi}(\sqrt{\psi - t^2 \Sigma - 2t\boldsymbol{\gamma}} - \sqrt{\psi})\} \quad (17)$$

と簡単になる。

特性関数から、次の命題 3.1 が導かれる。

命題 3.1 2 つの互いに独立な確率変数 X_1, X_2 がそれぞれ NIG 分布に従うとし、

$$\begin{aligned} X_1 &\sim GH_d \left(-\frac{1}{2}, \chi_1, \psi, \boldsymbol{\mu}_1, \Sigma, \boldsymbol{\gamma} \right) \\ X_2 &\sim GH_d \left(-\frac{1}{2}, \chi_2, \psi, \boldsymbol{\mu}_2, \Sigma, \boldsymbol{\gamma} \right) \end{aligned}$$

とする。このとき、

$$X_1 + X_2 \sim GH_d \left(-\frac{1}{2}, (\sqrt{\chi_1} + \sqrt{\chi_2})^2, \psi, \boldsymbol{\mu}_1 + \boldsymbol{\mu}_2, \Sigma, \boldsymbol{\gamma} \right) \quad (18)$$

が成り立つ。すなわち、 $X_1 + X_2$ も NIG 分布に従う。

証明 独立な 2 つの確率変数の和の特性関数はそれぞれの特性関数の積であるから、

$$\varphi_{X_1+X_2}(\mathbf{t}) = \varphi_{X_1}(\mathbf{t}) \varphi_{X_2}(\mathbf{t})$$

$$= e^{it'(\mu_1+\mu_2)} \exp\{-(\sqrt{\chi_1} + \sqrt{\chi_2}) (\sqrt{\psi + t'\Sigma t - 2it'\gamma} - \sqrt{\psi})\}$$

となる。よって、命題の主張が従う。

(証明終)

GH 分布の中心積率を混合要素である一般逆ガウス分布の中心積率で表す式 ((9)~(12) 式) と、命題 6.10 で述べる後者の $\lambda = -\frac{1}{2}$ の場合の中心積率とを用いて、NIG 分布の中心積率を計算すると下記のようなになる。(22) 式の右辺を (20) 式の右辺の 2 乗で除すことにより、尖度が 3 超であることが分かる。

命題 3.2 1 次元 NIG 分布の平均、および 2 次から 4 次までの中心積率は次のとおりである。

$$E[X] = \mu + \gamma \left(\frac{\chi}{\psi} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (19)$$

$$E[(X - E[X])^2] = \left(\frac{\chi}{\psi} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\Sigma + \frac{\gamma^2}{\psi} \right) \quad (20)$$

$$E[(X - E[X])^3] = 3 \frac{\gamma}{\psi} \left(\frac{\chi}{\psi} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\Sigma + \frac{\gamma^2}{\psi} \right) \quad (21)$$

$$E[(X - E[X])^4] = 3 \frac{1}{\psi} \left(\frac{\chi}{\psi} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\Sigma + \frac{\gamma^2}{\psi} \right) \left(\Sigma + \frac{5\gamma^2}{\psi} \right) + 3 \frac{\chi}{\psi} \left(\Sigma + \frac{\gamma^2}{\psi} \right)^2 \quad (22)$$

証明 命題 6.10 で $\theta = \sqrt{\chi\psi}$ であること、および $E[W^2] = E[(W - E[W])^2] + E[W]^2$ に注意して、

$$E[X] = \mu + \gamma \cdot E[W] = \mu + \gamma \left(\frac{\chi}{\psi} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$E[(X - E[X])^2] = \Sigma \cdot E[W] + \gamma^2 \cdot E[(W - E[W])^2]$$

$$= \Sigma \left(\frac{\chi}{\psi} \right)^{\frac{1}{2}} + \gamma^2 \frac{\chi}{\psi} \frac{1}{\theta} = \left(\frac{\chi}{\psi} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\Sigma + \frac{\gamma^2}{\psi} \right)$$

$$E[(X - E[X])^3] = 3\gamma\Sigma \cdot E[(W - E[W])^2] + \gamma^3 \cdot E[(W - E[W])^3]$$

$$= 3\gamma\Sigma \left(\frac{\chi}{\psi} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\theta} + \gamma^3 \left(\frac{\chi}{\psi} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{3}{\theta^2} = 3 \frac{\gamma}{\psi} \left(\frac{\chi}{\psi} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\Sigma + \frac{\gamma^2}{\psi} \right)$$

$$E[(X - E[X])^4] = 3\Sigma^2 \cdot E[W^2] + 6\gamma^2\Sigma \cdot E[(W - E[W])^3]$$

$$+ 6\gamma^2\Sigma \cdot E[W] \cdot E[(W - E[W])^2] + \gamma^4 \cdot E[(W - E[W])^4]$$

$$= 3\Sigma^2 \frac{\chi}{\psi} \left(\frac{1}{\theta} + 1 \right) + 6\gamma^2\Sigma \left(\frac{\chi}{\psi} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{3}{\theta^2}$$

$$+ 6\gamma^2\Sigma \left(\frac{\chi}{\psi} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\theta} + \gamma^4 \cdot 3 \left(\frac{\chi}{\psi} \right)^2 \frac{1}{\theta^2} \left(\frac{5}{\theta} + 1 \right)$$

$$= 3 \frac{\chi}{\psi} \left(\frac{1}{\theta} + 1 \right) \left\{ \Sigma^2 + 2\gamma^2\Sigma \left(\frac{\chi}{\psi} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\theta} + \gamma^4 \frac{\chi}{\psi} \frac{1}{\theta^2} \right\}$$

$$+ 6\gamma^2\Sigma \left(\frac{\chi}{\psi} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{2}{\theta^2} + 3\gamma^4 \left(\frac{\chi}{\psi} \right)^2 \frac{4}{\theta^3}$$

$$= 3 \frac{\chi}{\psi} \left(\Sigma + \frac{\gamma^2}{\psi} \right)^2 + 3 \frac{1}{\psi} \left(\frac{\chi}{\psi} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\Sigma + \frac{\gamma^2}{\psi} \right) \left(\Sigma + \frac{5\gamma^2}{\psi} \right)$$

が従う。

(証明終)

4 EM アルゴリズム

4.1 EM アルゴリズムの背景

d 次元の列ベクトルから成る n 個の観測データ $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ があるとする。これらの観測値が独立でかつ同一の分布 (この分布に従う確率変数を \mathbf{X} で表す) からの標本であるという仮定の下で、観測値に GH 分布を当てはめることを考える。

GH 分布のパラメータをまとめて $\boldsymbol{\tau} = (\lambda, \chi, \psi, \boldsymbol{\mu}, \Sigma, \boldsymbol{\gamma})$ と書き、その密度関数をパラメータを明示して表したいときには $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\tau})$ と記す。 W の密度関数についても $h(w; \lambda, \chi, \psi)$ と記す。上の観測値を与えられたときの尤度関数を $L(\boldsymbol{\tau}; \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ とすると、

$$L(\boldsymbol{\tau}; \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) = \prod_{i=1}^n f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_i; \boldsymbol{\tau})$$

である。当てはめようとする分布のパラメータの推定にしばしば使われるのが、尤度関数を最大化するパラメータを求める最尤法であり、それは、対数尤度関数

$$\ln L(\boldsymbol{\tau}; \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) = \sum_{i=1}^n \ln f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_i; \boldsymbol{\tau}) \quad (\ln \text{ は自然対数を表す})$$

を最大化することに帰着する。しかし、GH 分布の場合パラメータの数が多いので、それは簡単ではない。

観測値 \mathbf{x}_i が GH 分布からの標本であるとする、標本の裏には GH 分布の混合要素 W が隠れている。 \mathbf{x}_i をもたらした W からの標本値を w_i とするとき、もし w_i を直接観測出来るとするなら、上の問題はずっと易くなる。その理由は次のとおりである。 \mathbf{X} と W の結合分布の密度関数を $f_{\mathbf{X}, W}(\mathbf{x}, w; \boldsymbol{\tau})$ として、 W が与えられたときの \mathbf{X} の条件付密度関数 $f_{\mathbf{X}|W}(\mathbf{x}|w)$ を、

$$f_{\mathbf{X}|W}(\mathbf{x}|w) = \frac{f_{\mathbf{X}, W}(\mathbf{x}, w; \boldsymbol{\tau})}{h(w; \lambda, \chi, \psi)}$$

で定義すると、(2) 式より、

$$f_{\mathbf{X}|W}(\mathbf{x}|w) = \frac{1}{(2\pi w)^{\frac{d}{2}} |\Sigma|^{\frac{1}{2}}} \exp \left\{ -\frac{(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu} - w\boldsymbol{\gamma})' \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu} - w\boldsymbol{\gamma})}{2w} \right\}$$

であり、右辺に含まれるパラメータは $\boldsymbol{\mu}, \Sigma, \boldsymbol{\gamma}$ だけである。そこで、以後 $f_{\mathbf{X}|W}(\mathbf{x}|w; \boldsymbol{\mu}, \Sigma, \boldsymbol{\gamma})$ と記す。従って、結合分布の尤度関数を $\tilde{L}(\boldsymbol{\tau}; \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n, w_1, \dots, w_n)$ と書くと、

$$\ln \tilde{L}(\boldsymbol{\tau}; \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n, w_1, \dots, w_n) = \sum_{i=1}^n \ln f_{\mathbf{X}|W}(\mathbf{x}_i|w_i; \boldsymbol{\mu}, \Sigma, \boldsymbol{\gamma}) + \sum_{i=1}^n \ln h(w_i; \lambda, \chi, \psi)$$

と表すことが出来る。すなわち、推定しなければならないパラメータが 2 群に分かれて、右辺の 2 つの項に分離されるから、それぞれの項を関係するパラメータについて別々に最大化すればよい。以後、特に断らない場合対数尤度関数は $\ln \tilde{L}$ を指すものとする。

実際には w_i を直接観測出来ないの、対数尤度関数中の w_i とその関数を、 \mathbf{X} が与えられたときの W およびその関数の条件付平均の \mathbf{x}_i における値で置き換え、それを新たに目的関数として最大化することにして、その最大化のために EM アルゴリズムと呼ばれる手法を用いる。

以下では EM アルゴリズムの実行手順とその裏付けに主眼を置いて述べるため、EM アルゴリズムの一般形、EM アルゴリズムによるパラメータの収束値が実際に元の対数尤度関数 $\ln L$ の最尤推定値を与えるのかという問題、パラメータの推定値の誤差評価と誤差評価に関わる観測情報行列の EM アルゴリズムの枠組みにおける評価手法などの重要な点について触れていない。これらについては [渡辺 (2008)] 第 3, 5 および 6 節を参照して頂きたい。その第 6 節によれば、かなり一般的な条件の下で EM アルゴリズムが収束すればその収束値は $\ln L$ の極大値 (最大値とは限らない) か鞍点を与える。4.6 節に述べる

アルゴリズムは標本尖度が3超であれば安定的に収束し、 $\gamma^{[1]}$, $\chi^{[0]}$, $\psi^{[0]}$ の初期値を変えるとパラメータの収束値による $\ln L$ の値も変わるもののその程度は軽微である。よって、NIG分布のパラメータ推定におけるEMアルゴリズムは、元の対数尤度関数の最尤推定値を近似すると見做しても実用上は差し支えないのではないかと考えている。

EMアルゴリズムは、次の2つの段階、

Eステップ : 直前の段階で得られたパラメータの評価値を用いて、 \mathbf{X} が与えられたときの W およびその関数の条件付平均を計算する段階 (Expectation step)

Mステップ : パラメータの評価を更新する段階 (Maximization step) を繰り返す方法である。目的関数に現れる w_i の関数を $g(w_i)$ とすると、第 k 回目のMステップを始める直前のパラメータのセット $\boldsymbol{\tau}^{[k-1]}$ を用いて命題4.1を適用し、 $E[g(W) | \mathbf{X}; \boldsymbol{\tau}^{[k-1]}](\mathbf{x}_i)$ (次の命題の(2)により、 $E[g(W) | \mathbf{X}]$ は \mathbf{X} の関数であるので、これは意味を持つ) をEステップで計算する。

命題4.1 \mathbf{X} が与えられたときの W の条件付密度関数 $f_{W|\mathbf{X}}(w|\mathbf{x}; \boldsymbol{\tau})$ を、

$$f_{W|\mathbf{X}}(w|\mathbf{x}; \boldsymbol{\tau}) = f_{\mathbf{X}, W}(\mathbf{x}, w; \boldsymbol{\tau}) / f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\tau})$$

で定義するとき、次が成り立つ。

- (1) $f_{W|\mathbf{X}}(w|\mathbf{x}; \boldsymbol{\tau})$ は、 $N^-(\lambda - \frac{d}{2}, \chi + (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}), \psi + \boldsymbol{\gamma}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\gamma})$ の密度関数に等しい。
- (2) $|g(W)|$ が可積分であるような \mathbb{R} 上の可測関数 g に対して、 $G(\mathbf{x}) = \int_0^\infty g(w) f_{W|\mathbf{X}}(w|\mathbf{x}) dw$ とおくと、 $E[g(W) | \mathbf{X}] = G(\mathbf{X})$ が成り立つ。

証明 (2) および (3) 式より、

$$\begin{aligned} f_{W|\mathbf{X}}(w|\mathbf{x}; \boldsymbol{\tau}) &= \frac{(\psi + \boldsymbol{\gamma}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\gamma})^{\lambda - \frac{d}{2}} \left(\sqrt{\{\chi + (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})\} (\psi + \boldsymbol{\gamma}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\gamma})\}} \right)^{\frac{d}{2} - \lambda}}{2 K_{\lambda - \frac{d}{2}} \left(\sqrt{\{\chi + (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})\} (\psi + \boldsymbol{\gamma}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\gamma})\}} \right)} \\ &\quad \cdot w^{\lambda - \frac{d}{2} - 1} \cdot \exp \left[-\frac{1}{2} \{ (\chi + (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})) w^{-1} + (\psi + \boldsymbol{\gamma}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\gamma}) w \} \right] \end{aligned}$$

となる。これは一般逆ガウス分布

$$N^-(\lambda - \frac{d}{2}, \chi + (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}), \psi + \boldsymbol{\gamma}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\gamma})$$

の密度関数に他ならない。(2) は条件付密度関数のよく知られた性質 ([西尾 (1978)] 第7章 §1 の例2, または [Williams(1991)]9.6節) より従う。

(証明終)

対数尤度関数を計算していこう。(2)式より、

$$f_{\mathbf{X}, W}(\mathbf{x}, w; \boldsymbol{\tau}) = \frac{1}{(2\pi w)^{\frac{d}{2}} |\boldsymbol{\Sigma}|^{\frac{1}{2}}} \exp \left\{ -\frac{(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu} - w\boldsymbol{\gamma})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu} - w\boldsymbol{\gamma})}{2w} \right\} h(w)$$

であるから、

$$\begin{aligned} &\ln \tilde{L}(\boldsymbol{\tau}; \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n, w_1, \dots, w_n) \\ &= \sum_{i=1}^n \ln \frac{1}{(2\pi w_i)^{\frac{d}{2}} |\boldsymbol{\Sigma}|^{\frac{1}{2}}} \exp \left\{ -\frac{(\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu} - w_i \boldsymbol{\gamma})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu} - w_i \boldsymbol{\gamma})}{2w_i} \right\} \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \ln h(w_i; \lambda, \chi, \psi) \\ &= \left[-n \ln \left\{ (2\pi)^{\frac{d}{2}} |\boldsymbol{\Sigma}|^{\frac{1}{2}} \right\} - \frac{d}{2} \sum_{i=1}^n \ln w_i - \sum_{i=1}^n \frac{(\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu} - w_i \boldsymbol{\gamma})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu} - w_i \boldsymbol{\gamma})}{2w_i} \right] \end{aligned}$$

$$+ \sum_{i=1}^n \ln h(w_i; \lambda, \chi, \psi) \quad (23)$$

が得られる。右辺第1項 [] 中の第3項を展開する必要があるが、 Σ^{-1} が対称であること、および、 d 行 d 列の行列 M と d 次元列ベクトル \mathbf{y}, \mathbf{z} に対して、 $\mathbf{y}'M\mathbf{z} = \text{tr}(M\mathbf{z}\mathbf{y}')$ (24)

(ただし、 $\text{tr}(\cdot)$ は行列の対角成分の和を表す。)

であることに注意すると、

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \frac{(\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu} - w_i \boldsymbol{\gamma})' \Sigma^{-1} (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu} - w_i \boldsymbol{\gamma})}{2w_i} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{w_i} (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu})' \Sigma^{-1} (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu}) - \sum_{i=1}^n (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu})' \Sigma^{-1} \boldsymbol{\gamma} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n w_i \cdot \boldsymbol{\gamma}' \Sigma^{-1} \boldsymbol{\gamma} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{w_i} \text{tr} \{ \Sigma^{-1} (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu}) (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu})' \} - n(\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu})' \Sigma^{-1} \boldsymbol{\gamma} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n w_i \text{tr} (\Sigma^{-1} \boldsymbol{\gamma} \boldsymbol{\gamma}') \end{aligned}$$

となる。また、 W 自身は $N^{-}(\lambda, \chi, \psi)$ に従うから、

$$h(w_i; \lambda, \chi, \psi) = \frac{\chi^{-\lambda} (\sqrt{\chi \psi})^\lambda}{2K_\lambda(\sqrt{\chi \psi})} w_i^{\lambda-1} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\chi w_i^{-1} + \psi w_i) \right\}$$

である。よって、

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \ln h(w_i; \lambda, \chi, \psi) \\ &= \sum_{i=1}^n \left\{ (\lambda - 1) \ln w_i - \frac{\chi}{2} w_i^{-1} - \frac{\psi}{2} w_i - \frac{\lambda}{2} (\ln \chi - \ln \psi) - \ln \left(2K_\lambda(\sqrt{\chi \psi}) \right) \right\} \\ &= \sum_{i=1}^n \left\{ (\lambda - 1) \ln w_i - \frac{\chi}{2} w_i^{-1} - \frac{\psi}{2} w_i \right\} - \frac{n\lambda}{2} (\ln \chi - \ln \psi) - n \ln \left(2K_\lambda(\sqrt{\chi \psi}) \right) \end{aligned}$$

となる。

従って、(23) 式の右辺に現れる w_i の関数は、 w_i 自身、 w_i^{-1} 、 $\ln w_i$ の3通りである。そこで、

$$\eta_i = E[W | \mathbf{X}](\mathbf{x}_i), \quad \delta_i = E[W^{-1} | \mathbf{X}](\mathbf{x}_i), \quad \xi_i = E[\ln W | \mathbf{X}](\mathbf{x}_i) \quad (25)$$

とおく。これらの右辺が意味を持つことは命題 4.1 の (2) より従う ($\chi > 0$, $\psi > 0$ の場合、命題 6.8 により W, W^{-1} は共に可積分であり、 $|\ln W|$ が可積分であることも命題 6.8 の証明の中程の記述より分かる)。そこで、 $\ln \bar{L}$ の右辺において $w_i, w_i^{-1}, \ln w_i$ をそれぞれ η_i, δ_i, ξ_i で置き換えたものを \mathcal{O} とおく。これが最大化の目的関数である。便宜上さらに、

$$\bar{\eta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \eta_i, \quad \bar{\delta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_i, \quad \bar{\xi} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i, \quad \bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i \quad (26)$$

とおくと、

$$\begin{aligned} \mathcal{O} = & \left[-n \ln \left\{ (2\pi)^{\frac{d}{2}} |\Sigma|^{\frac{1}{2}} \right\} - \frac{d}{2} \sum_{i=1}^n \xi_i \right. \\ & - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \delta_i \text{tr} \{ \Sigma^{-1} (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu}) (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu})' \} + n(\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu})' \Sigma^{-1} \boldsymbol{\gamma} \\ & \left. - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \eta_i \text{tr} (\Sigma^{-1} \boldsymbol{\gamma} \boldsymbol{\gamma}') \right] \\ & + n \left\{ (\lambda - 1) \bar{\xi} - \frac{\chi}{2} \bar{\delta} - \frac{\psi}{2} \bar{\eta} - \frac{\lambda}{2} (\ln \chi - \ln \psi) - \ln \left(2K_\lambda(\sqrt{\chi \psi}) \right) \right\} \quad (27) \end{aligned}$$

となる。

η_i, δ_i, ξ_i の計算方法については、4.4 節で述べる。

4.2 μ, Σ, γ に関する目的関数の最大化

目的関数 (27) 式の右辺の [] の中 (以下、単に右辺第 1 項と称す) を、 μ, Σ, γ について最大化するためには、これらに関する偏微分が 0 でなければならない。

まず (27) 式の右辺第 1 項を μ の各成分 $\mu_j (j = 1, \dots, d)$ で偏微分し 0 とおいて得られる方程式をベクトル表記すると、

$$\sum_{i=1}^n \delta_i \Sigma^{-1} (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu}) - n \Sigma^{-1} \boldsymbol{\gamma} = 0$$

となる。左から Σ を乗ずることにより、

$$\sum_{i=1}^n \delta_i \mathbf{x}_i - n \bar{\delta} \boldsymbol{\mu} - n \boldsymbol{\gamma} = 0 \quad (28)$$

を得る。

次に (27) 式の右辺第 1 項を γ_i で偏微分し 0 とおいて得られる方程式をベクトル表記すると、

$$n(\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu})' \Sigma^{-1} - \left(\sum_{i=1}^n \eta_i \right) \Sigma^{-1} \boldsymbol{\gamma} = 0$$

となる。左から Σ を乗じて n で割ると、

$$\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu} - \bar{\eta} \boldsymbol{\gamma} = 0 \quad (29)$$

を得る。

(28) および (29) は μ, γ に関する連立方程式となる。(29) から得られる

$$\boldsymbol{\mu} = \bar{\mathbf{x}} - \bar{\eta} \boldsymbol{\gamma} \quad (30)$$

を (28) に代入することにより、まず γ 、次いで μ の順で解くことが出来て、解は、

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{1}{n\bar{\delta}} \left\{ \sum_{i=1}^n \delta_i \mathbf{x}_i - \frac{\sum_{i=1}^n \delta_i (\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_i)}{\bar{\delta}\bar{\eta} - 1} \right\} \quad (31)$$

$$\boldsymbol{\gamma} = \frac{1}{n} \frac{\sum_{i=1}^n \delta_i (\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_i)}{\bar{\delta}\bar{\eta} - 1} \quad (32)$$

となる。

次に、 Σ の各成分についての (27) 式右辺第 1 項の偏微分へ進む。 Σ が非退化であるという条件の下、 Σ の各成分についての偏微分が全て 0 であることと、 Σ^{-1} の各成分についての偏微分が全て 0 であることは同値であるから、以下、 Σ^{-1} の (k, l) 成分を a_{kl} として、 a_{kl} についての偏微分を考える。

まず、

$$\frac{\partial}{\partial a_{kl}} |\Sigma| = -|\Sigma|^2 \times (\Sigma^{-1} \text{ の } k \text{ 行 } l \text{ 列を除いた小行列式})$$

に注意する。これを見るには、 $|\Sigma| |\Sigma^{-1}| = 1$ の両辺を a_{kl} で偏微分した

$$\frac{\partial}{\partial a_{kl}} |\Sigma| \cdot |\Sigma^{-1}| + |\Sigma| \cdot \frac{\partial}{\partial a_{kl}} |\Sigma^{-1}| = 0$$

において、 $\frac{\partial}{\partial a_{kl}} |\Sigma^{-1}|$ が Σ^{-1} の k 行 l 列を除いて得られる小行列式に等しいことに注意すればよい。

さて、(27) 式の右辺第 1 項に、(29) 式より得られる $\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu} = \bar{\eta} \boldsymbol{\gamma}$ を代入しさらに (24) を適用した上

で, a_{kl} で偏微分して 0 とおくと,

$$-\frac{n}{2} \frac{1}{|\Sigma|} \frac{d}{da_{kl}} |\Sigma| - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \delta_i \frac{d}{da_{kl}} \text{tr} \{ \Sigma^{-1} (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu})' \} \\ + \frac{n\bar{\eta}}{2} \frac{d}{da_{kl}} \text{tr} (\Sigma^{-1} \boldsymbol{\gamma} \boldsymbol{\gamma}') = 0$$

となる. よって, $\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu}$, $\boldsymbol{\gamma}$ の第 l 成分をそれぞれ $(\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu})_l$, γ_l で表すと,

$$n|\Sigma| \cdot (\Sigma^{-1} \text{の } k \text{ 行 } l \text{ 列を除いた小行列式}) = \sum_{i=1}^n \delta_i (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu})_l (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu})_k - n\bar{\eta} \gamma_l \gamma_k$$

となる. ところが, Σ^{-1} の k 行 l 列を除いた小行列式は, Σ^{-1} の逆行列 Σ の (k, l) 成分の $|\Sigma^{-1}|$ 倍に他ならない. ゆえに, Σ の (k, l) 成分を b_{kl} とすると, $|\Sigma^{-1}| = \frac{1}{|\Sigma|}$ に注意して,

$$b_{kl} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_i (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu})_k (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu})_l - \bar{\eta} \gamma_k \gamma_l$$

を得る. これが各 (k, l) について成り立つから, 結局,

$$\Sigma = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_i (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu})' - \bar{\eta} \boldsymbol{\gamma} \boldsymbol{\gamma}' \quad (33)$$

となる.

4.3 λ, χ, ψ に関する目的関数の最大化

(27) 式の右辺第 2 項 $\{ \}$ を λ, χ, ψ で順次偏微分してそれぞれ 0 とおくと,

$$\bar{\xi} + \frac{1}{2} \ln \frac{\psi}{\chi} - \frac{1}{K_\lambda(\sqrt{\chi\psi})} \frac{d}{d\lambda} K_\lambda(\sqrt{\chi\psi}) = 0 \quad (34)$$

$$-\bar{\delta} - \frac{\lambda}{\chi} - \frac{K'_\lambda(\sqrt{\chi\psi})}{K_\lambda(\sqrt{\chi\psi})} \sqrt{\frac{\psi}{\chi}} = 0 \quad (35)$$

$$-\bar{\eta} + \frac{\lambda}{\psi} - \frac{K'_\lambda(\sqrt{\chi\psi})}{K_\lambda(\sqrt{\chi\psi})} \sqrt{\frac{\chi}{\psi}} = 0 \quad (36)$$

が従う.

これらを λ, χ, ψ についての 3 元連立方程式として解くのは, 一般には困難なようである ([Hu(2005)] 29 頁) が, NIG 分布や他の GH 分布の特別な場合 (t 分布, VG 分布, 双曲型分布など) においては, λ, χ, ψ の 3 つのパラメータのどれかが定数であるので, 残りのパラメータを, (34)~(36) のうちそれらによる偏微分に関する 2 つから求めればよい.

NIG 分布は λ を固定する場合に該当するので, λ を一定とする場合のこの後のパラメータの計算手順を [Hu(2005)](30 頁) を参考にしておこう. 同一の GH 分布を実現するパラメータの組合せは無限に存在するが, $\chi\psi$ は不変であることに着目して, まず上の連立方程式を変形してみる. $\theta = \sqrt{\chi\psi}$ とおくと, (35) および (36) はそれぞれ,

$$-\bar{\delta} - \left(\lambda + \frac{K'_\lambda(\theta)}{K_\lambda(\theta)} \theta \right) \cdot \frac{1}{\chi} = 0 \quad (37)$$

$$-\bar{\eta} + \left(\lambda - \frac{K'_\lambda(\theta)}{K_\lambda(\theta)} \theta \right) \cdot \frac{\chi}{\theta^2} = 0 \quad (38)$$

となる. この両式から χ を消去すると,

$$-\bar{\eta}\bar{\delta} = \left\{ \lambda^2 - \left(\frac{K'_\lambda(\theta)}{K_\lambda(\theta)} \right)^2 \theta^2 \right\} \frac{1}{\theta^2}$$

が従う。よって、

$$\lambda^2 + \left\{ \bar{\eta}\bar{\delta} - \left(\frac{K'_\lambda(\theta)}{K_\lambda(\theta)} \right)^2 \right\} \theta^2 = 0$$

となることが分かる。命題 6.5 より、

$$K'_\lambda(x) = \frac{\lambda}{x} K_\lambda(x) - K_{\lambda+1}(x)$$

であるから、上の等式は、

$$\lambda^2 + \left(\bar{\eta}\bar{\delta} - \frac{\lambda^2}{\theta^2} + \frac{2\lambda}{\theta} \cdot \frac{K_{\lambda+1}(\theta)}{K_\lambda(\theta)} - \frac{K_{\lambda+1}(\theta)^2}{K_\lambda(\theta)^2} \right) \theta^2 = 0$$

となり、整理すると、

$$\bar{\eta}\bar{\delta}\theta K_\lambda(\theta)^2 + 2\lambda K_{\lambda+1}(\theta)K_\lambda(\theta) - \theta K_{\lambda+1}(\theta)^2 = 0 \quad (39)$$

が得られる。

この方程式を満たす θ が求められたとしよう。(38) 式に再び命題 6.5 の等式を適用すると、

$$-\bar{\eta} + \left(\lambda - \frac{\lambda}{\theta} \frac{K_\lambda(\theta) - K_{\lambda+1}(\theta)}{K_\lambda(\theta)} \right) \cdot \frac{\chi}{\theta^2} = 0$$

となり、整理すると、

$$\chi = \frac{\bar{\eta}\theta K_\lambda(\theta)}{K_{\lambda+1}(\theta)} \quad (40)$$

と書けるので、 χ を求めることが出来る。 ψ は、

$$\psi = \frac{\theta^2}{\chi} \quad (41)$$

で求めればよい。

4.4 η_i, δ_i, ξ_i の計算

パラメータ推定の過程で必要になる η_i, δ_i, ξ_i は次のように計算すればよい。

$$\rho_i = (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu}) \quad (42)$$

とおくと、命題 4.1 の (1) は、

$f_{W|\mathbf{X}}(w|\mathbf{x}_i; \boldsymbol{\tau})$ は、 $N^-(\lambda - \frac{d}{2}, \chi + \rho_i, \psi + \boldsymbol{\gamma}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\gamma})$ の密度関数

と言い換えられる。冒頭に述べたように $\boldsymbol{\Sigma}$ が非退化の場合だけを考慮しているから、 $\boldsymbol{\Sigma}$ は正定値である。ゆえに、 $\boldsymbol{\Sigma}^{-1}$ も正定値である。よって、 $\rho_i, \boldsymbol{\gamma}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\gamma}$ は共に非負である。2.1 節の始めに述べたように $\chi > 0, \psi > 0$ の場合に限定しているから、よって、 $\chi + \rho_i > 0, \psi + \boldsymbol{\gamma}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\gamma} > 0$ である。ゆえに、命題 4.1 の (2) および命題 6.8 より、

$$\begin{aligned} \eta_i &= E[W|\mathbf{X}](\mathbf{x}_i) \\ &= \left(\frac{\chi + \rho_i}{\psi + \boldsymbol{\gamma}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\gamma}} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{K_{\lambda - \frac{d}{2} + 1}(\sqrt{(\chi + \rho_i)(\psi + \boldsymbol{\gamma}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\gamma})})}{K_{\lambda - \frac{d}{2}}(\sqrt{(\chi + \rho_i)(\psi + \boldsymbol{\gamma}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\gamma})})} \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} \delta_i &= E[W^{-1}|\mathbf{X}](\mathbf{x}_i) \\ &= \left(\frac{\chi + \rho_i}{\psi + \boldsymbol{\gamma}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\gamma}} \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{K_{\lambda - \frac{d}{2} - 1}(\sqrt{(\chi + \rho_i)(\psi + \boldsymbol{\gamma}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\gamma})})}{K_{\lambda - \frac{d}{2}}(\sqrt{(\chi + \rho_i)(\psi + \boldsymbol{\gamma}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\gamma})})} \end{aligned} \quad (44)$$

$$\xi_i = E[\ln W|\mathbf{X}](\mathbf{x}_i)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \ln \frac{\chi + \rho_i}{\psi + \gamma' \Sigma^{-1} \gamma} \\
&\quad + \frac{1}{K_{\lambda - \frac{d}{2}}(\sqrt{(\chi + \rho_i)(\psi + \gamma' \Sigma^{-1} \gamma)})} \cdot \frac{d}{d\alpha} K_{\lambda - \frac{d}{2} + \alpha}(\sqrt{(\chi + \rho_i)(\psi + \gamma' \Sigma^{-1} \gamma)}) \Big|_{\alpha=0} \quad (45)
\end{aligned}$$

を得る.

4.5 NIG 分布への EM アルゴリズムの適用

NIG 分布に対応する $\lambda = -\frac{1}{2}$ の場合は, λ が定数に固定されているから, 4.3 節で見た λ を一定とする場合のパラメータの計算手順をそのまま使うことができる. $K_{\lambda+1}(\theta) = K_{\lambda}(\theta)$ であるから, (39) 式より $\theta = \sqrt{\chi\psi}$ は,

$$\theta = \frac{2\lambda}{1 - \bar{\eta}\bar{\delta}} = \frac{1}{\bar{\eta}\bar{\delta} - 1} \quad (46)$$

と明示的に解ける. さらに, χ, ψ も, それぞれ,

$$\chi = \bar{\eta}\theta = \frac{\bar{\eta}}{\bar{\eta}\bar{\delta} - 1}, \quad \psi = \frac{\theta^2}{\chi} = \frac{1}{(\bar{\eta}\bar{\delta} - 1)\bar{\eta}} \quad (47)$$

と簡単に書ける.

(31)~(33), (46), (47) の各式をみれば, NIG 分布の場合は ξ_i の計算が不要であることが分かる.

4.6 EM アルゴリズムを適用する場合の実行手順

定めるべきパラメータは, $\mu, \Sigma, \gamma, \chi, \psi$ の 5 つ (実質は 4 つ) である. EM アルゴリズムの実行は, 次のように逐次近似を繰り返すことにより行う. 1 回毎の計算は, 大きく分けて, μ, Σ, γ を更新する段階と, 更新されたそれらの値と前段階での χ, ψ の値に基づき χ, ψ を更新する段階とから成る.

k で近似計算の逐次回数を表し, 各段階でのパラメータの値は右肩に $[k]$ を付けて表すことにする.

(1) まず $k = 1$ の場合, μ, Σ, γ の初期値を次のようにおく.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\mu}^{[1]} &= \text{標本平均ベクトル}, \quad \Sigma^{[1]} = \text{標本共分散行列}, \\
\boldsymbol{\gamma}^{[1]} &= -\mathbf{0.001} \text{ (全ての元が } -0.001 \text{ である } d \text{ 次元列ベクトル)}
\end{aligned}$$

さらに, 前段階の χ, ψ に相当する値として,

$$\chi^{[0]} = 5, \quad \psi^{[0]} = 5$$

とおく. ($\boldsymbol{\gamma}^{[1]}, \chi^{[0]}, \psi^{[0]}$ の設定値は, 極端ではない程々の値という意味合いのもの.)

- (2) $\boldsymbol{\mu}^{[1]}, \Sigma^{[1]}$ から (42) 式に従って ρ_i を計算し, その結果を $\rho_i^{[1,2]}$ とする. これは $\chi^{[1]}, \psi^{[1]}$ を求めるための中間値である.
- (3) $\Sigma^{[1]}, \boldsymbol{\gamma}^{[1]}, \chi^{[0]}, \psi^{[0]}, \rho_i^{[1,2]}$ を用いて, (43) 式および (44) 式に従い η_i, δ_i を計算する. その結果を $\eta_i^{[1,2]}, \delta_i^{[1,2]}$ とする.
- (4) $\eta_i^{[1,2]}, \delta_i^{[1,2]}$ を用い, (46) 式によって θ を求める. これらの値から (47) 式に従い $\chi^{[1]}, \psi^{[1]}$ を求める.
- (5) 以上で, $k = 1$ におけるパラメータが揃ったので, (42) 式, (43) 式および (44) 式に従い $\rho_i^{[k]}, \eta_i^{[k]}, \delta_i^{[k]}$ を計算する.
- (6) 前段階のパラメータとステップ (5) の結果を用い, k を 1 つ進めて, (31)~(33) 式に従い $\boldsymbol{\mu}^{[k+1]}, \Sigma^{[k+1]}, \boldsymbol{\gamma}^{[k+1]}$ を計算する.
- (7) $\boldsymbol{\mu}^{[k+1]}, \Sigma^{[k+1]}$ から (42) 式に従って ρ_i を計算し, その値を $\rho_i^{[k+1,2]}$ とする.

- (8) $\Sigma^{[k+1]}, \gamma^{[k+1]}, \chi^{[k]}, \psi^{[k]}, \rho_i^{[k+1,2]}$ を用いて, (43) 式および (44) 式に従い η_i, δ_i を計算する. その結果を $\eta_i^{[k+1,2]}, \delta_i^{[k+1,2]}$ とする.
- (9) $\eta_i^{[k+1,2]}, \delta_i^{[k+1,2]}$ を用い, (46) 式によって θ を求める. これらの値から (47) 式に従い $\chi^{[k+1]}, \psi^{[k+1]}$ を求める.
- (10) $|\chi^{[k+1]} - \chi^{[k]}|, |\psi^{[k+1]} - \psi^{[k]}|$ が共に予め決めた値 (1/500 など) より小さくなるまで, ステップ (5) に戻り近似計算を繰り返す.

5 NIG 分布のリスク管理への応用

5.1 VaR および期待ショートフォールの計算

NIG 分布を用いて VaR や期待ショートフォール (以下, ES と略記する) を計算するに当たって, まず密度関数あるいは累積分布関数を用いて VaR および ES を表しておく.

NIG 分布をリスク管理に応用する場合, 正規分布とは異なり, ES は解析的に表せないが, 分布関数を求めるために必要な密度関数の数値積分の変形により求めることが出来る.

この節では $\lambda = -\frac{1}{2}$ と制限する必要がないため, GH 分布の枠組みで述べる. また, 月次収益率の分布を基に保有期間 1 年のリスク尺度を計算するなど, 時間軸に対して収益率の分布の和を取ることを想定して, 対数収益率に GH 分布を当てはめる.

R をある資産の収益率を表す確率変数で, $\ln(1+R)$ が 1 次元の GH 分布 $GH_1(\lambda, \chi, \psi, \mu, \Sigma, \gamma)$ に従うものとする. R の分布関数および密度関数をそれぞれ $F(x), f(x)$, $\ln(1+R)$ の分布関数および密度関数をそれぞれ $G(x), g(x)$ とする.

また, 信頼水準 α の R の VaR および ES をそれぞれ $\text{VaR}_\alpha(R), \text{ES}_\alpha(R)$ と表し, 上の GH 分布の $100(1-\alpha)$ パーセント点を $q_{1-\alpha}$ で表す.

$F(x)$ は連続関数になるから, R の VaR は,

$$\text{VaR}_\alpha(R) = -F^{-1}(1-\alpha)$$

と表せるが, $F(x) = G(\ln(1+x))$ であるから,

$$1-\alpha = F(-\text{VaR}_\alpha(R)) = G(\ln(1-\text{VaR}_\alpha(R)))$$

となる. よって, $\ln(1-\text{VaR}_\alpha(R)) = q_{1-\alpha}$ であり,

$$\text{VaR}_\alpha(R) = 1 - \exp(q_{1-\alpha})$$

が従う. $q_{1-\alpha}$ は GH 分布の分布関数の逆関数を用いて求めることが出来る.

次に R の ES を計算しよう. $F(x) = G(\ln(1+x))$ の両辺を微分して,

$$f(x) = F'(x) = \frac{1}{1+x} G'(\ln(1+x)) = \frac{1}{1+x} g(\ln(1+x))$$

を得るから,

$$\begin{aligned} \text{ES}_\alpha(R) &= -\frac{1}{1-\alpha} \int_{-1}^{-\text{VaR}_\alpha(R)} x f(x) dx \quad (R \geq -1) \\ &= -\frac{1}{1-\alpha} \int_{-1}^{-\text{VaR}_\alpha(R)} \frac{x}{1+x} g(\ln(1+x)) dx \\ &= -\frac{1}{1-\alpha} \int_{-\infty}^{q_{1-\alpha}} (e^y - 1) g(y) dy \quad (y = \ln(1+x)) \\ &= 1 - \frac{1}{1-\alpha} \int_{-\infty}^{q_{1-\alpha}} e^y g(y) dy \end{aligned}$$

となる。右辺第 1 項は GH 分布の密度関数の積分と同様の数値積分により計算出来る。具体的な方法は後述する。

特に、 $\alpha = 0$ とすれば $\text{VaR}_\alpha(R) = -\infty$ であるから、

$$E[R] = \int_{-1}^{\infty} xf(x) dx = -\text{ES}_0 = \int_{-\infty}^{\infty} e^y g(y) dy - 1$$

となる。これは、VaR あるいは ES といったリスク尺度に (期待) 収益率を含めたくない場合に、 $\text{VaR}_\alpha(R)$ 、 $\text{ES}_\alpha(R)$ と $E[R]$ との距離を取る場合に用いることが出来る。

なお、 $\ln(1+R)$ が正規分布 $N(\mu, \sigma)$ に従う場合は上の積分が具体的に計算出来る。上で $g(x)$ 、 $q_{1-\alpha}$ をそれぞれ $N(\mu, \sigma)$ の密度関数、 $100(1-\alpha)$ パーセント点と読み替える。また、標準正規分布の分布関数を $\Phi(x)$ 、 $100(1-\alpha)$ パーセント点を $k_{1-\alpha}$ で表す。 $q_{1-\alpha} = \mu + k_{1-\alpha}\sigma$ であるから、途中の計算を略して結果だけ記すと、

$$\begin{aligned} \text{ES}_\alpha(R) &= 1 - \frac{\exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)}{1-\alpha} \cdot \Phi(k_{1-\alpha} - \sigma) \\ E[R] &= \int_{-1}^{\infty} xf(x) dx = -\text{ES}_0 = \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) - 1 \end{aligned}$$

5.2 数値計算の実際

前節までで、NIG 分布を VaR や ES などのリスク尺度の評価に応用するのに必要な理論的な準備は整った。次は数値計算の実行である。ここでは、月次対数収益率の時系列に NIG 分布を当てはめ、保有期間 1 年の VaR および ES を計算する例を取り上げる。

プログラミングをエクセルに付属している VBA(Visual Basic for Applications) で行うことを前提とし、必要な数学関数は [Press et al.(1999)] に紹介されているソース・コードを VBA に書き換えることによって用意する。その一覧表は表 1 のとおりである。なお、2007 年に同書の第 3 版が出版され、使用言語の変更と共にここで引用したルーチンの関係する箇所でも記述が変わっている。ソース・コードを収めた別売の CD-ROM には、第 2 版に掲載されていたルーチンが C と共に FORTRAN のコードでも収められており、C になじみの薄い場合は便利である。

同書に収録されているソース・コードの使用、あるいは他言語への書き換えはライセンスがなければ許されないので、上で触れた CD-ROM(1 万円程度) を購入するなどしてライセンスを取得する必要がある。

ある資産あるいはポートフォリオのリスク尺度の評価は、次の手順で進む。

- (1) 対象とする月次対数収益率の時系列に対して、標本平均、分散、歪度、尖度を計算する。
- (2) 標本尖度が 3 未満の場合は経験的に EM アルゴリズムが収束しないので、正規分布を当てはめる。

この場合は本来正規分布も適当ではない。パラメトリックな分布では尖度が 3 未満 (platikurtic と呼ばれる) ものを筆者は知らないで簡易にこうしておくが、標本数が十分に多い場合はカーネル推定量 (kernel estimator) による推定密度関数を使うなど、ノンパラメトリックな方法を検討すべきかも知れない。

観測期間が 3~5 年と短い場合は標本尖度が 3 を下回することは珍しくないが、観測期間を比較的長く取っても見られることがある。

- (3) 標本尖度が 3 超なら、NIG 分布を当てはめるべく 4.6 節に示した EM アルゴリズムの手順を実行してパラメータを推定する。実行は、手順を VBA のサブルーチンとしてプログラミングすることにより行う。

実行時間の節約のために、エクセルのツール-オプション-計算方法を「手動」に変更する。

- (4) 上のサブルーチンの中で、第3種変形ベッセル関数の計算が必要になる。その計算に、[Press et al.(1999)] に紹介されている `bessik` という関数を用いる。この関数には、さらに `beschb` と `chebev` という補助関数が必要である。これらを VBA の関数に書き直して使用する。
- `bessik` について重要な修正点が1つある。`bessik` に渡す引数 (x) が2以上のとき、`bessik` の中で e^{-x} を乗ずる箇所があるが、その乗算を削除することである。
 - 理由は、エクセルが扱える数値の範囲制限により、引数 x が709を超えるとそこでアンダーフローを起こしてしまい、計算が進まなくなるからである。[Press et al.(1999)] で、アンダーフローの可能性とこの修正の必要性に触れられている。表2, 3からも伺えるように、年次収益率の分布を月次収益率から換算すると χ が急激に大きくなる。また、正規分布に近い標本を扱うときも、命題2.8から分かるように χ, ψ が大きくなる。よって、上のような状況は頻繁に起こり得る。
 - e^{-x} の乗算は `bessik` の外で行うが、本稿に関連する計算中 `bessik` を用いる局面の全てで、`bessik` が分子・分母双方に現れるか、あるいは e^{-x} を相当程度相殺するような他の指数関数の乗算が対で現れるので、上の修正を加えることによりアンダーフローの問題はこれまでのところ経験していない。
- (5) パラメータが決まれば、当てはめた NIG 分布に基づき中心積率の計算やリスク尺度の計算が出来る。そのために、NIG 分布の密度関数、累積分布関数、累積分布関数の逆関数、指数関数と密度関数の積の積分 (ES の計算に使用)、および中心積率を計算するルーチンをそれぞれ VBA の関数として用意しなければならない。
- (6) 密度関数のルーチンは、`bessik` を使う以外は容易である。
- (7) 累積分布関数は密度関数の積分であるので、一定の精度で効率よく数値積分を行うプログラムが必要になる。そこで、[Press et al.(1999)] に紹介されている `qromb` という関数を用いる。この関数には、`trapzd` および `polint` という補助関数が必要である。
- 累積分布関数は密度関数の $-\infty$ からの積分であるが、数値計算を行うには積分範囲の下限を適当に決める必要がある。積分範囲が広いと実行に時間が掛かる。
 - 計算精度も指定しなくては行けないが、細かくするとやはり実行時間が長くなる。一方、荒くすると異常値が返され得る。
 - 現物資産の収益率は -100% を下回ることはないので、それをモデル化した確率分布においては -1 以下の部分は重要ではないであろう。安全を見て -3 程度にしておけばよいのではないだろうか。
 - 計算精度は `qromb` の中では EPS という変数が当てられており、[Press et al.(1999)] 第2版では 10^{-6} が設定されていた。筆者は保守的に 10^{-7} としていたが、ごく最近異常値が返される場面に遭遇した。 10^{-8} にしたら解消したので以後この値を使用している。なお、同書第3版では 10^{-10} へ設定が変更されているが、この値を使うと積分の実行時間が非常に長くなる。
 - 以上の積分範囲の下限值および計算精度設定下でも、数値積分の PC への負荷は大きい。数百個のセルが数値積分を呼び出すと、1回の計算に数十分掛かる感じである。数値積分が関わるルーチンを呼び出すセルを組み込んだファイルを扱う時は、ツールオプション-計算方法を「手動」に変更しかつ「保存前に再計算」のチェックをはずすことが必須である。そうしないと不必要なところで再計算され、PCの前で待たされることになる。
- (8) 累積分布関数の逆関数の計算は、方程式の解の探索を行うことと同等である。累積分布関数の微分が密度関数であるので簡単な Newton-Raphson 法を適用したくなるが、密度関数は変曲点を持つので上手く機能しない。そのため、[Press et al.(1999)] に載っている bisection 法

- と NR 法とを組み合わせた rtsafe というルーチンを用いる。
- (9) 指数関数と密度関数の積の積分は、累積分布関数を計算するルーチンにおいて被積分関数を取り替えればよい。
- (10) 中心積率の計算は、命題 6.9(または 6.10) と命題 2.4 をプログラムに落とせばよい。あるいは、NIG 分布に限定して直接的に命題 3.2 を計算に乗せればより簡単である。

5.3 計算例

5.3.1 資産別の計算

日本および米国の代表的な資産の収益率に NIG 分布を当てはめ、VaR および ES を計算してみた。

表 2 の上段に国内株式・国債・為替 (円/米ドル) の収益率の観測に使用した基礎データならびに標本統計、および当てはめた NIG 分布のパラメータならびにその分布の統計量を示した。平均・分散が標本値と非常に近いのが注目される。平均が近いことは、(9) 式に (30) 式を代入することにより $E[X] = \bar{x} + \gamma(E[W] - \bar{\eta})$ となるので自然である。分散にはここまで明確な関係式は導けず、標本分散との間に 1 割位差の現れる例もある。

観測期間の起点は、債券・為替についてはデータが入手可能な最も古い時点とし、株式については債券に合わせている。また、対数収益率に NIG 分布を当てはめている。

下段には、各月の対数収益率が独立かつ同一分布に従うという仮定の下に年次換算した NIG 分布のパラメータ・統計量を示した。

表 3 には、米国株式・社債に関して対応する内容をまとめている。米株に投資する際、為替リスクに対してヘッジ・非ヘッジの両方の立場があり得ると思うが、ここでは短期為替予約によるローリング・ヘッジを想定し、S&P500 の為替換算は行っていない。

標本歪度は何れの資産においても負値である。尖度も大きく 3 を超えており、NIG 分布のパラメータを EM アルゴリズムで求めることが出来た。NIG 分布の適合度を正規分布と比較しながら視覚的に捉えるために、図 1, 2 に QQ プロット (quantile-quantile plot) を示した。

QQ プロットは次のようにして描いたグラフである。 n 個の標本にある確率分布を当てはめたとし、標本を小さい方から順に並べて j 番目の標本を y_j とする。当てはめた分布の $(100 * j/n)$ パーセント点を x_j とするとき、 (x_j, y_j) をプロットする。確率分布の適合度が完全であれば、プロットした点は傾き 1 の原点を通る直線上に並ぶ。

図 1, 2 の左側は、最尤法で当てはめた正規分布 (i.e. 標本平均・分散に等しい平均と分散を持つ) に対する QQ プロット、右側が NIG 分布に対する QQ プロットである。正規分布、NIG 分布どちらの場合も、第 3 象限でプロットした点が直線の下側に落ち込んでいる。それは、正規分布や NIG 分布が示唆するより極端に大きな負の収益率が歴史的に起きていることを示している。NIG 分布ではその落ち込み方がかなり軽減されると共に、直線との乖離が全般に小さくなっていることが分かる。

このグラフで見て取れる状況が、表 4 に示した保有期間 1ヶ月のリスク尺度の結果に表れている。この表の VaR, ES は共に、対数収益率ではなく収益率自身に対するものであり、5.1 節に従って計算している。国内資産・米国資産共に、信頼水準 95% の VaR は NIG 分布と正規分布との間に余り差がないが、99% 水準になると、日本国債では約 4 割、それ以外の資産で 1 割~2 割、NIG 分布による方が大きくなっている。

月次対数収益率に当てはめた NIG 分布と正規分布をそれぞれ年次対数収益率対応に換算した場合には、様相がかなり異なってくる。表 2 および 3 の下段の表にあるように、分布の歪度は、日本国債・為替・米国株式で残る一方、他の資産ではかなり 0 に近い。尖度は、日本国債を除けば 3 に近づいている。その結果 VaR における NIG 分布と正規分布との差は縮まり、信頼水準 99% の場合、日本国債で

1 割強、米国株式で 7%である他は 2~4%程度の差である。中心極限定理の示唆することが読み取れる。

5.3.2 ポートフォリオにおける計算

仮定のポートフォリオを、国内株式 20%、日本国債 50%、米国株式(為替ヘッジ) 5%、米国社債(ヘッジ付) 20%、同(ヘッジ無) 5%によって構成し、ポートフォリオの VaR の計算を行ってみた。

まずポートフォリオの月次収益率を計算し、それを対数収益率に変換した後、観測期間を 1990.2~2008.7, 2003.8~2008.7(最近 5 年間), および 2005.8~2008.7(最近 3 年間) の 3 通り取って、標本統計を求めた。表 5 の上段にあるように、最近 5 年間を観測した場合は、尖度が 3 を下回る。従って、この場合には NIG 分布を当てはめることが出来ない。また、最近 5 年間および 3 年間の観測においては歪度が正であることが特徴的である。

資産別の場合と同様に VaR を計算してみたのが表 5 の下段である。見辛くなるのを避けるために ES の数値は略した。最近 3 年間の場合は、標本歪度が正であるため、表には載せていないがそれに当てはめた NIG 分布の歪度も正になった。その影響で、何れの信頼水準に対しても、NIG 分布の方が正規分布より小さい VaR を与えている。

最後に、2.2 節の末尾で述べた方法に従って NIG 分布のパラメータを定める場合の計算を行ってみた。すなわち、歪度・尖度は長い観測期間に当てはめた NIG 分布の歪度・尖度に、平均・分散は最近の観測期間に当てはめた NIG 分布の平均・分散もしくは NIG 分布を当てはめられない場合は標本平均・分散に、それぞれ等しくなるようにパラメータを定めた。その結果を表 5 における上段の表の右 2 列に示した。2.2 節に述べた 2 通りの方法のうち後の方に従っている。そのパラメータを用いて VaR を計算したのが、下段の表右 2 列である。

歪度を負にすると共に尖度を高くしている効果が、保有期間 1ヶ月の信頼水準 99%および 99.5%のところ顕著に現れている。信頼水準 95%で余り差が出ないのは上と同様である。保有期間を 1 年にするとやはり差が縮まる。信頼水準 99%または 99.5%の場合、正規分布に対しては 5%程度の差であり、最近 3 年の観測データに当てはめた NIG 分布に対しては 10% 程度の差になっている。

5.4 今後の課題

NIG 分布(あるいは GH 分布)は多次元にも応用出来るが、多次元への応用は筆者も未だ計算例を多く持っていない。株式、債券、為替といったそれぞれの収益率分布の特性がかなり異なる資産の組合せから成るポートフォリオに適用する場合、混合要素が対象資産について共通であるという GH 分布の特性が、リスク尺度の評価の上で制約になるかも知れない。また、資産の最適配分に応用するには多次元で計算出来なければいけないので、具体例での経験を重ねることが必要である。この場合、資産別対数収益率の資産配分比による加重平均はポートフォリオ収益率の対数に等しくならないので、命題 2.3 を生かすためには収益率そのものに NIG 分布を当てはめなければいけない。一方、月次収益率の分布から年次収益率の分布への換算を、通常のように同一分布に従う独立な確率変数の和で行うことは、実務上大きな支障にはならないと思われるが、あくまで近似計算になる。

6 補遺

6.1 第 3 種変形ベッセル関数

GH 分布の記述に欠かせない第 3 種変形ベッセル関数(modified Bessel function of the third kind)について、必要な事項をここでまとめておく。

ベッセル関数についてより広く知るのに有用な文献として、[Watson(1966)] と [Lebedev(1972)] がある。前者はベッセル関数を詳述した大書であり、初版の出版は実に 1922 年に遡る。後者は特殊関数を扱った小型の本であるが、複素変数のガンマ関数から説き起こしてベッセル関数についての丁寧な説明が展開されている。下記の導入部でも同書を参考にしている。

第 3 種変形ベッセル関数 $K_\lambda(z)$ は、 λ (複素数) を径数とする 2 階線形複素微分方程式、

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{dy}{dz} - \left(1 + \frac{\lambda^2}{z^2}\right) y = 0$$

の解の 1 つであり、以下のように定義される。

上の微分方程式の解全体は 2 次元のベクトル空間を張る。解の 1 つが巾級数展開で $y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ と表せるとしよう。 λ を正の実数として未定係数法を適用すると、 λ が整数のときは、

$$y(z) = c \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2k}} \frac{1}{k!(\lambda+k)!} z^{\lambda+2k} \quad (c \text{ は任意の定数})$$

となり、 λ が整数以外の場合は全ての係数 a_k が零になることが分かる。すなわち、後者の場合は巾級数展開可能な解は恒等的に零の場合に限る。しかし、ガンマ関数 $\Gamma(z)$ において、非負整数 k に対しては $\Gamma(k+1) = k!$ であったから、 λ を複素数全般に拡張した場合に、

$$I_\lambda(z) = c \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{\lambda+2k}} \frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma(\lambda+k+1)} z^{\lambda+2k}$$

を考えてみる(定数 c との間で調整することにより 2 の累乗項の指数を z の指数に合わせている)。ただし、 λ が負の整数のときは、 $\lambda+k+1 < 0$ となる k に対しては $\Gamma(\lambda+k+1) = \infty$ となるので、右辺の和は $k = -\lambda - 1$ から始まると考える。また、 z の累乗の一価性を保つために、 $D = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ (\mathbb{C} は複素数全体の集合) とおいて、 $z \in D$ とする。

正数 R および N を任意に取る。 $|z| \leq R$ なる $z (z \in D)$ と $|\lambda| \leq N$ なる λ に対して、

$$\frac{|\text{第}(k+1)\text{項の係数}|}{|\text{第}k\text{項の係数}|} = \frac{|z|^2}{4(k+1)|\lambda+k+1|} \leq \frac{R^2}{4(k+1)(k+1-N)} \quad (k \geq N \text{ とする})$$

となる。右辺は、 z および λ から独立で、 $k \rightarrow \infty$ のとき 0 に近づく。よって、 $I_\lambda(z)$ の右辺の無限級数は、 $\{z : |z| \leq R\} \cap D$ および $\{\lambda : |\lambda| \leq N\}$ において一様に収束する。無限級数の各項は z について解析関数であるから、 $I_\lambda(z)$ 自身も z について解析関数となり、しかも項別微分が出来る。それを実行すると、 $I_\lambda(z)$ が上の微分方程式を満たし、解の 1 つであることが確認出来る。

そこで、

$$K_\lambda(z) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\lambda}(z) - I_\lambda(z)}{\sin \lambda \pi} \quad (z \in D)$$

とおく。ただし、 $\lambda = n$ (n は整数) のときは、

$$K_n(z) = \lim_{\lambda \rightarrow n} K_\lambda(z)$$

とする。上述の一様収束性より $I_\lambda(z)$ は λ について整関数となり、ロピタルの定理により右辺の極限は存在する。 $I_{-\lambda}(z)$ が満たす微分方程式は上記微分方程式と一致するから、 $K_\lambda(z)$ もやはり上の微分方程式の解になる。 $I_\lambda(z)$ と $K_\lambda(z)$ とは一次独立であることが示せる ([Lebedev(1972)] 第 5.7 節)。

複素数 z の実部を $\operatorname{Re} z$ と表すと、 $\operatorname{Re} z > 0$ のとき、 $K_\lambda(z)$ は、

$$K_\lambda(z) = \int_0^\infty e^{-z \cosh u} \cosh \lambda u \, du \quad (\operatorname{Re} z > 0, \lambda \text{ は任意の複素数})$$

なる積分で表すことが出来る ([Lebedev(1972)] (5.10.23))。本稿では、 z が正の実数、 λ が実数の場合だけで十分であるので、 $x > 0$ で λ を実数とすると、

$$K_\lambda(x) = \int_0^\infty e^{-x \cosh u} \cosh \lambda u \, du$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\infty} \exp \left\{ -x \frac{1}{2}(e^u + e^{-u}) \right\} \frac{1}{2}(e^{\lambda u} + e^{-\lambda u}) du \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{\lambda u} \exp \left\{ -x \frac{1}{2}(e^u + e^{-u}) \right\} du + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-\lambda u} \exp \left\{ -x \frac{1}{2}(e^u + e^{-u}) \right\} du \\
&= \frac{1}{2} \int_1^{\infty} v^{\lambda-1} \exp \left\{ -x \frac{1}{2} \left(v + \frac{1}{v} \right) \right\} dv + \frac{1}{2} \int_0^1 v^{\lambda-1} \exp \left\{ -x \frac{1}{2} \left(v + \frac{1}{v} \right) \right\} dv \\
&\quad (\text{第1項では } v = e^u, \text{ 第2項では } v = e^{-u} \text{ と変数変換した}) \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} u^{\lambda-1} \exp \left\{ -\frac{1}{2} x \left(u + \frac{1}{u} \right) \right\} du \quad (x > 0, \lambda \text{ は実数})
\end{aligned}$$

が得られる。

以下、 $x > 0$ で λ が実数の場合に限定し、この積分表示を用いて第3種変形ベッセル関数の性質を示す。命題 6.2~6.5 は証明なしで色々な文献に書かれている ([増田 (2002)] の付録 A, [Prause(1999)] の Appendix B) が, [Lebedev(1972)] ではこれらがより一般的な形で証明されている ((5.7.9), (5.8.5), (5.11.9) など)。

まず、上の積分表示から、 $K_{\lambda}(x)$ が x について単調減少であることが明らかであり、また $v = u^{-1}$ と変数変換することにより、

$$K_{\lambda}(x) = K_{-\lambda}(x)$$

の成り立つことが直ちに分かる。同じ変数変換により、次が従う。

命題 6.1 $K_{\lambda}(x)$ は、 x を固定するとき、 λ について $(0, \infty)$ 上狭義単調増加である。上で見た対称性より、 $(-\infty, 0)$ 上では狭義単調減少である。

証明 $K_{\lambda}(x)$ の積分表示において、積分範囲を $(0, 1]$, $(1, \infty)$ に分け、前者で $v = u^{-1}$ と変数変換すると、

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \int_0^1 u^{\lambda-1} \exp \left\{ -\frac{1}{2} x \left(u + \frac{1}{u} \right) \right\} du \\
&= \frac{1}{2} \int_1^{\infty} v^{-\lambda-1} \exp \left\{ -\frac{1}{2} x \left(\frac{1}{v} + v \right) \right\} dv
\end{aligned}$$

を得る。従って、

$$K_{\lambda}(x) = \int_1^{\infty} \left(u^{\lambda} + \frac{1}{u^{\lambda}} \right) u^{-1} \exp \left\{ -\frac{1}{2} x \left(u + \frac{1}{u} \right) \right\} du$$

となる。 $u \in [1, \infty)$ を固定して、 $h(\lambda) = u^{\lambda} + u^{-\lambda}$ とおくと、 $h(\lambda)$ の微分は $(0, \infty)$ 上で正であり、 $h(\lambda)$ は $(0, \infty)$ 上狭義単調増加である。従って、 x を固定するとき、上の積分も λ について $(0, \infty)$ 上狭義単調増加である。

(証明終)

以下の幾つかの性質もすべて初等的な変数変換から導くことが出来る。

命題 6.2

$$K_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x}$$

証明 $K_{\frac{1}{2}}(x)$ の積分表示において、 $v = u^{\frac{1}{2}}$ とおくと、

$$K_{\frac{1}{2}}(x) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} v^{-1} \exp \left\{ -\frac{1}{2} x \left(v^2 + \frac{1}{v^2} \right) \right\} (2v) dv = \int_0^{\infty} \exp \left\{ -\frac{1}{2} x \left(v^2 + \frac{1}{v^2} \right) \right\} dv$$

を得る。ここで、右辺において $w = v^{-1}$ とおくと、

$$K_{\frac{1}{2}}(x) = - \int_{\infty}^0 \exp \left\{ -\frac{1}{2} x \left(\frac{1}{w^2} + w^2 \right) \right\} w^{-2} dw = \int_0^{\infty} \exp \left\{ -\frac{1}{2} x \left(v^2 + \frac{1}{v^2} \right) \right\} v^{-2} dv$$

とも表現される。従って、

$$K_{\frac{1}{2}}(x) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \exp \left\{ -\frac{1}{2} x \left(v^2 + \frac{1}{v^2} \right) \right\} \left(1 + \frac{1}{v^2} \right) dv$$

が成り立つ。

次に、 $w = v - v^{-1}$ とおく。すると、

$$v^2 + \frac{1}{v^2} = w^2 + 2, \quad dw = \left(1 + \frac{1}{v^2} \right) dv$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} K_{\frac{1}{2}}(x) &= \frac{1}{2} \int_0^1 \exp \left\{ -\frac{1}{2} x \left(v^2 + \frac{1}{v^2} \right) \right\} \left(1 + \frac{1}{v^2} \right) dv \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_1^{\infty} \exp \left\{ -\frac{1}{2} x \left(v^2 + \frac{1}{v^2} \right) \right\} \left(1 + \frac{1}{v^2} \right) dv \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 \exp \left\{ -\frac{1}{2} x(w^2 + 2) \right\} dw + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \exp \left\{ -\frac{1}{2} x(w^2 + 2) \right\} dw \\ &= e^{-x} \int_0^{\infty} \exp \left(-\frac{1}{2} xw^2 \right) dw \\ &= \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \int_0^{\infty} \exp \left(-\frac{1}{2} z^2 \right) dz \quad (z = \sqrt{x}w \text{ とおいた}) \\ &= \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \frac{\sqrt{2\pi}}{2} = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} \end{aligned}$$

(証明終)

命題 6.3 および 6.4 において $K_{\lambda}(x)$ が漸近的にはより簡単な関数で表せることをみるが、2つの関数 f と g について、

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \text{ であるとき, } f(x) \sim g(x) \quad (x \rightarrow a)$$

と記すことにする。

命題 6.3 x が上から 0 に近づくととき、 $K_{\lambda}(x)$ は次の漸近表現を持つ。

$$\lambda > 0 \text{ の場合} \quad K_{\lambda}(x) \sim \Gamma(\lambda) 2^{\lambda-1} x^{-\lambda} \quad (x \rightarrow +0)$$

$$\lambda < 0 \text{ の場合} \quad K_{\lambda}(x) \sim \Gamma(-\lambda) 2^{-\lambda-1} x^{\lambda} \quad (x \rightarrow +0)$$

ここに、 $\Gamma(\cdot)$ はガンマ関数を表す。

証明 K_{λ} の積分表示において、 $v = \frac{1}{2}xu$ とおくと、

$$u = \frac{2v}{x}, \quad du = \frac{2}{x} dv$$

であるから、

$$\begin{aligned} K_{\lambda}(x) &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left(\frac{x}{2v} \right)^{\lambda-1} \exp \left(-v - \frac{1}{2} x \frac{x}{2v} \right) \frac{2}{x} dv \\ &= 2^{\lambda-1} x^{-\lambda} \int_0^{\infty} v^{\lambda-1} e^{-v} \exp \left(-\frac{x^2}{4v} \right) dv \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$v^{\lambda-1}e^{-v} \exp\left(-\frac{x^2}{4v}\right) \leq v^{\lambda-1}e^{-v}$$

であり、 $\lambda > 0$ なら右辺は $(0, \infty)$ 上積分可能である。よって、極限操作と積分が交換出来て、

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{K_\lambda(x)}{2^{\lambda-1}x^{-\lambda}} = \int_0^\infty \lim_{x \rightarrow 0^+} v^{\lambda-1}e^{-v} \exp\left(-\frac{x^2}{4v}\right) dv = \int_0^\infty v^{\lambda-1}e^{-v} dv = \Gamma(\lambda)$$

が得られる。

$\lambda < 0$ のときは、 $v = \frac{x}{2u}$ とおくと、

$$u = \frac{x}{2v}, \quad du = -\frac{x}{2v^2} dv$$

であるから、

$$\begin{aligned} K_\lambda(x) &= \frac{1}{2} \int_\infty^0 \left(\frac{2v}{x}\right)^{\lambda-1} \exp\left(-\frac{x^2}{4v} - \frac{x}{2} \frac{2v}{x}\right) \left(-\frac{x}{2v^2}\right) dv \\ &= 2^{-\lambda-1} x^\lambda \int_0^\infty v^{-\lambda-1} e^{-v} \exp\left(-\frac{x^2}{4v}\right) dv \end{aligned}$$

となる。 $\lambda < 0$ としているから、

$$v^{-\lambda-1}e^{-v} \exp\left(-\frac{x^2}{4v}\right) \leq v^{-\lambda-1}e^{-v}$$

における右辺は $(0, \infty)$ 上積分可能である。よって、上と同様に極限操作と積分が交換出来て、

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{K_\lambda(x)}{2^{-\lambda-1}x^\lambda} = \Gamma(-\lambda)$$

が従う。

(証明終)

次に、 $x \rightarrow \infty$ の場合の挙動を見たのが次の命題である。これによれば、 x が大きくなると、大まかに言えば $K_\lambda(x)$ は e^{-x} に近い動きをするようになることが分かる。

命題 6.4 $x \rightarrow \infty$ のとき、 $K_\lambda(x)$ は次の漸近表現を持つ。

$$K_\lambda(x) \sim K_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} \quad (x \rightarrow \infty)$$

証明 K_λ の積分表示より、

$$K_\lambda(x) \sqrt{x} e^x = \frac{1}{2} \int_0^\infty u^{\lambda-1} \sqrt{x} \exp\left\{-\frac{1}{2}x \left(u - 2 + \frac{1}{u}\right)\right\} du$$

となる。ここで、

$$v = \sqrt{x} \left(\sqrt{u} - \frac{1}{\sqrt{u}}\right)$$

とおくと、

$$dv = \sqrt{x} \left(\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}u^{-\frac{3}{2}}\right) du = \frac{\sqrt{x}}{2} u^{-\frac{3}{2}}(u+1) du$$

となるから、

$$\frac{\sqrt{x}}{2} du = \frac{u^{\frac{3}{2}}}{u+1} dv$$

を得る。また、

$$v^2 = x(u - 2 + u^{-1})$$

であるから、 u についての2次方程式 $xu^2 - (2x + v^2)u + x = 0$ が得られる。これを解くと、

$$u = 1 + \frac{v^2 \pm |v|\sqrt{v^2 + 4x}}{2x}$$

となる。変数変換した後 u は v の関数であるから、分子で $+$ を取る場合を $u_+(v)$ 、 $-$ を取る場合を $u_-(v)$ とそれぞれ書くことにすると、 $x > 0$ であるから、

$$u_+(v) = 1 + \frac{v^2 + |v|\sqrt{v^2 + 4x}}{2x} \geq 1 \quad (\because \text{右辺第2項の分子が正})$$

$$u_-(v) = 1 + \frac{v^2 - |v|\sqrt{v^2 + 4x}}{2x} \leq 1 \quad (\because \text{右辺第2項の分子が負})$$

となること、および $0 \leq u_-(v)$ に注意する。従って、

$$\begin{aligned} K_\lambda(x)\sqrt{x}e^x &= \frac{1}{2} \int_0^1 u^{\lambda-1} \sqrt{x} \exp\left\{-\frac{1}{2}x\left(u-2+\frac{1}{u}\right)\right\} du \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_1^\infty u^{\lambda-1} \sqrt{x} \exp\left\{-\frac{1}{2}x\left(u-2+\frac{1}{u}\right)\right\} du \\ &= \int_{-\infty}^0 \frac{u_-(v)^{\lambda+\frac{1}{2}}}{u_-(v)+1} e^{-\frac{1}{2}v^2} dv + \int_0^\infty \frac{u_+(v)^{\lambda+\frac{1}{2}}}{u_+(v)+1} e^{-\frac{1}{2}v^2} dv \end{aligned}$$

となる。 $\lambda + \frac{1}{2}$ を超える任意の整数を1つ固定して $\bar{\lambda}$ としよう。すると、 $x \geq \frac{1}{2}$ のとき、

$$\begin{aligned} \frac{u_-(v)^{\lambda+\frac{1}{2}}}{u_-(v)+1} &\leq u_-(v)^{\lambda+\frac{1}{2}} \leq (1+v^2)^{\lambda+\frac{1}{2}} \leq (1+v^2)^{\bar{\lambda}} \\ \frac{u_+(v)^{\lambda+\frac{1}{2}}}{u_-(v)+1} &\leq u_+(v)^{\lambda+\frac{1}{2}} = \left(1 + \frac{v^2}{2x} + |v|\sqrt{\frac{v^2}{4x^2} + \frac{1}{x}}\right)^{\lambda+\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(1 + v^2 + |v|\sqrt{v^2 + 2}\right)^{\lambda+\frac{1}{2}} \\ &\leq (1 + v^2 + (v^2 + 2))^{\lambda+\frac{1}{2}} \leq (3 + 2v^2)^{\bar{\lambda}} \end{aligned}$$

という評価が得られる。しかも、

$$(1 + v^2)^{\bar{\lambda}} e^{-\frac{1}{2}v^2}, \quad (3 + 2v^2)^{\bar{\lambda}} e^{-\frac{1}{2}v^2}$$

は共に $[0, \infty)$ 上可積分である。よって、上の $K_\lambda(x)\sqrt{x}e^x$ の積分表示の下で $x \rightarrow \infty$ とするとき、極限操作と積分の順序が交換出来る。

$$\lim_{x \rightarrow \infty} u_+(v) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} u_-(v) = 1$$

であるから、

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} K_\lambda(x)\sqrt{x}e^x &= \int_{-\infty}^0 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{u_-(v)^{\lambda+\frac{1}{2}}}{u_-(v)+1} e^{-\frac{1}{2}v^2} dv + \int_0^\infty \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{u_+(v)^{\lambda+\frac{1}{2}}}{u_+(v)+1} e^{-\frac{1}{2}v^2} dv \\ &= \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}v^2} dv = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

が従う。 $K_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}e^{-x}$ であつたから、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{K_\lambda(x)}{K_{\frac{1}{2}}(x)} = 1$$

が言えた。

(証明終)

命題 6.5 次の等式が成り立つ.

$$\begin{aligned} K_{\lambda+1}(x) &= \frac{2\lambda}{x} K_{\lambda}(x) + K_{\lambda-1}(x) \\ K'_{\lambda}(x) &= -\frac{1}{2} (K_{\lambda+1}(x) + K_{\lambda-1}(x)) \\ K'_{\lambda}(x) &= \frac{\lambda}{x} K_{\lambda}(x) - K_{\lambda+1}(x) = -\frac{\lambda}{x} K_{\lambda}(x) - K_{\lambda-1}(x) \end{aligned}$$

証明 $K_{\lambda}(x)$ の積分表示に部分積分の公式を適用すると,

$$\begin{aligned} K_{\lambda}(x) &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} u^{\lambda-1} \exp \left\{ -\frac{x}{2} \left(u + \frac{1}{u} \right) \right\} du \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\lambda} u^{\lambda} \exp \left\{ -\frac{x}{2} \left(u + \frac{1}{u} \right) \right\} \right]_0^{\infty} \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{1}{\lambda} u^{\lambda} \frac{x}{2} \left(1 - \frac{1}{u^2} \right) \exp \left\{ -\frac{x}{2} \left(u + \frac{1}{u} \right) \right\} du \\ &= \frac{x}{4\lambda} \int_0^{\infty} u^{\lambda} \exp \left\{ -\frac{x}{2} \left(u + \frac{1}{u} \right) \right\} du \\ &\quad - \frac{x}{4\lambda} \int_0^{\infty} u^{\lambda-2} \exp \left\{ -\frac{x}{2} \left(u + \frac{1}{u} \right) \right\} du \\ &= \frac{x}{2\lambda} K_{\lambda+1}(x) - \frac{x}{2\lambda} K_{\lambda-1}(x) \end{aligned}$$

を得る. これより, 命題にいう一つ目の関係式が従う.

次に, $K_{\lambda}(x)$ の積分表示において, 係数 $\frac{1}{2}$ を含めた被積分関数を $g_{\lambda}(x, u)$ とおくと,

$$g_{\lambda}(x, u) = \frac{1}{2} u^{\lambda-1} \exp \left\{ -\frac{x}{2} \left(u + \frac{1}{u} \right) \right\}$$

であるから,

$$\frac{\partial g_{\lambda}}{\partial x}(x, u) = -\frac{1}{4} u^{\lambda-1} \left(u + \frac{1}{u} \right) \exp \left\{ -\frac{1}{2} x \left(u + \frac{1}{u} \right) \right\}$$

となる. よって, $x > 0$ を固定したとき, $x > a$ なる $a > 0$ を取ると,

$$\begin{aligned} \left| 4 \frac{\partial g_{\lambda}}{\partial x}(x, u) \right| &= \left| u^{\lambda} \exp \left\{ -\frac{1}{2} x \left(u + \frac{1}{u} \right) \right\} \right| + \left| u^{\lambda-2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} x \left(u + \frac{1}{u} \right) \right\} \right| \\ &\leq \left| u^{\lambda} \exp \left\{ -\frac{1}{2} a \left(u + \frac{1}{u} \right) \right\} \right| + \left| u^{\lambda-2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} a \left(u + \frac{1}{u} \right) \right\} \right| \end{aligned}$$

が成り立つ. 右辺は u について $(0, \infty)$ 上積分可能であるから, x に関する微分と積分が交換可能である. よって,

$$\begin{aligned} K'_{\lambda}(x) &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\partial g_{\lambda}}{\partial x}(x, u) du \\ &= -\frac{1}{4} \int_0^{\infty} u^{\lambda} \exp \left\{ -\frac{x}{2} \left(u + \frac{1}{u} \right) \right\} du \\ &\quad - \frac{1}{4} \int_0^{\infty} u^{\lambda-2} \exp \left\{ -\frac{x}{2} \left(u + \frac{1}{u} \right) \right\} du \\ &= -\frac{1}{2} (K_{\lambda+1}(x) + K_{\lambda-1}(x)) \end{aligned}$$

となる. すなわち 2 つ目の等式が得られた. 最後の等式は, 1 つ目と 2 つ目の等式から容易に得られる.

(証明終)

6.2 一般逆ガウス分布 (Generalized Inverse Gaussian Distribution)

GH 分布の混合要素である一般逆ガウス分布の性質をここでまとめておく。導入の方法および命題 6.8 は [McNeil et al.(2005)]Appendix A.2.5 から取り、命題 6.7 は [Prause(1999)]Lemma1.18 を参考にしている。

正の実数値確率変数 W の密度関数が次のように書けるとき、 W は一般逆ガウス分布 $N^-(\lambda, \chi, \psi)$ に従うという。

$$f(x) = \frac{\chi^{-\lambda}(\sqrt{\chi\psi})^\lambda}{2K_\lambda(\sqrt{\chi\psi})} x^{\lambda-1} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\chi x^{-1} + \psi x)\right\}, \quad x > 0$$

ここに、3つのパラメータは次の条件を満たすとする。

$$\begin{cases} \chi > 0, \psi \geq 0 & (\lambda < 0) \\ \chi > 0, \psi > 0 & (\lambda = 0) \\ \chi \geq 0, \psi > 0 & (\lambda > 0) \end{cases}$$

ただし、 $\chi = 0$ または $\psi = 0$ の場合は、それぞれ $\chi \downarrow 0$ または $\psi \downarrow 0$ なる極限で考えるという意味である。

$f(x)$ を $(0, \infty)$ 上で積分したときに 1 になることは、

$$\exp\left\{-\frac{1}{2}(\chi x^{-1} + \psi x)\right\} = \exp\left\{-\frac{1}{2}\sqrt{\chi\psi}\left(\sqrt{\frac{\chi}{\psi}}x^{-1} + \sqrt{\frac{\psi}{\chi}}x\right)\right\}$$

に注意すれば、第 3 種変形ベッセル関数の積分表示から明らかである。

一般逆ガウス分布は、特別な場合として、ガンマ分布および逆ガンマ分布を含む。ガンマ分布および逆ガンマ分布は、それぞれ密度関数が、

$$\begin{aligned} f_{\alpha, \mu}(x) &= \frac{1}{\Gamma(\mu)} \alpha^\mu x^{\mu-1} e^{-\alpha x}, \quad \alpha > 0, \mu > 0, x > 0 \\ g_{\alpha, \mu}(x) &= \frac{1}{\Gamma(\mu)} \alpha^\mu x^{-(\mu+1)} \exp\left(-\frac{\alpha}{x}\right), \quad \alpha > 0, \mu > 0, x > 0 \end{aligned}$$

で表される分布であり、確率変数 W がガンマ分布に従うとき、 W^{-1} が逆ガンマ分布に従うという関係にある。

ガンマ分布は $\chi = 0, \lambda > 0$ の場合、逆ガンマ分布は $\psi = 0, \lambda < 0$ の場合である。これは、前節で述べた第 3 種変形ベッセル関数の漸近展開を用いて確かめることが出来る。まず前者については次のとおりである。 $\lambda > 0$ の場合の漸近展開を適用して、

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{\chi \rightarrow 0^+} \frac{\chi^{-\lambda}(\sqrt{\chi\psi})^\lambda}{2\Gamma(\lambda)2^{\lambda-1}(\sqrt{\chi\psi})^{-\lambda}} x^{\lambda-1} \exp\left(-\frac{1}{2}(\chi x^{-1} + \psi x)\right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \left(\frac{\psi}{2}\right)^\lambda x^{\lambda-1} \exp\left(-\frac{1}{2}\psi x\right) = f_{\frac{\psi}{2}, \lambda}(x) \end{aligned}$$

を得る。

次に後者については、 $\lambda < 0$ の場合の漸近展開を適用して、

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{\psi \rightarrow 0^+} \frac{\chi^{-\lambda}(\chi\psi)^{\frac{\lambda}{2}}}{2\Gamma(-\lambda)2^{-(\lambda+1)}(\chi\psi)^{\frac{\lambda}{2}}} x^{\lambda-1} \exp\left(-\frac{1}{2}(\chi x^{-1} + \psi x)\right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(-\lambda)} \left(\frac{\chi}{2}\right)^{-\lambda} x^{\lambda-1} \exp\left(-\frac{\chi}{2x}\right) = g_{\frac{\chi}{2}, -\lambda}(x) \end{aligned}$$

が得られる。

GH 分布の特性関数を計算する際に、一般逆ガウス分布の密度関数 $f(x)$ に対して、

$$\int_0^{\infty} e^{zx} f(x) dx, \quad z \in \mathbb{C} \text{ (}\mathbb{C}\text{は複素数全体の集合)}$$

が必要になるので、ここでその計算をしておく。まず積率母関数

$$M(t) = \int_0^{\infty} e^{tx} f(x) dx$$

を計算する。

命題 6.6 $\chi > 0, \psi > 0$ の場合、 $N^-(\lambda, \chi, \psi)$ に従う確率変数の積率母関数 $M(t)$ は、 $t < \frac{\psi}{2}$ において有限であり、次のように表せる。

$$M(t) = \left(\frac{\psi}{\psi - 2t} \right)^{\frac{\lambda}{2}} \frac{K_{\lambda} \left(\sqrt{\chi(\psi - 2t)} \right)}{K_{\lambda} \left(\sqrt{\chi\psi} \right)}$$

証明 定義に従って、計算すると、

$$\begin{aligned} M(t) &= \int_0^{\infty} \frac{e^{tx} \chi^{-\lambda} (\sqrt{\chi\psi})^{\lambda}}{2K_{\lambda}(\sqrt{\chi\psi})} x^{\lambda-1} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\chi x^{-1} + \psi x) \right\} dx \\ &= \int_0^{\infty} \frac{\chi^{-\lambda} (\sqrt{\chi\psi})^{\lambda}}{2K_{\lambda}(\sqrt{\chi\psi})} x^{\lambda-1} \exp \left[-\frac{1}{2} \{ \chi x^{-1} + (\psi - 2t)x \} \right] dx \end{aligned}$$

となる。ここで、 $t < \frac{\psi}{2}$ なら $\psi - 2t > 0$ であるから、第 3 種変形ベッセル関数へ持ち込めて、

$$\begin{aligned} M(t) &= \int_0^{\infty} \frac{\chi^{-\lambda} (\sqrt{\chi\psi})^{\lambda}}{2K_{\lambda}(\sqrt{\chi\psi})} x^{\lambda-1} \\ &\quad \cdot \exp \left[-\frac{1}{2} \sqrt{\chi(\psi - 2t)} \left\{ \sqrt{\frac{\chi}{\psi - 2t}} x^{-1} + \sqrt{\frac{\psi - 2t}{\chi}} x \right\} \right] dx \\ &= \frac{\chi^{-\lambda} (\sqrt{\chi\psi})^{\lambda}}{2K_{\lambda}(\sqrt{\chi\psi})} \left(\sqrt{\frac{\chi}{\psi - 2t}} \right)^{\lambda} \\ &\quad \cdot \int_0^{\infty} y^{\lambda-1} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sqrt{\chi(\psi - 2t)} (y + y^{-1}) \right\} dy \quad \left(y = \sqrt{\frac{\psi - 2t}{\chi}} x \right) \\ &= \frac{\chi^{-\lambda} (\sqrt{\chi\psi})^{\lambda}}{2K_{\lambda}(\sqrt{\chi\psi})} \left(\sqrt{\frac{\chi}{\psi - 2t}} \right)^{\lambda} \cdot 2K_{\lambda} \left(\sqrt{\chi(\psi - 2t)} \right) \\ &= \left(\frac{\psi}{\psi - 2t} \right)^{\frac{\lambda}{2}} \frac{K_{\lambda} \left(\sqrt{\chi(\psi - 2t)} \right)}{K_{\lambda} \left(\sqrt{\chi\psi} \right)} \end{aligned}$$

が得られる。

(証明終)

W を命題 6.6 の仮定を満たす $N^-(\lambda, \chi, \psi)$ に従う確率変数とすると、その積率母関数 $M(t)$ は命題 6.6 より $|t| < \frac{\psi}{2}$ において有限であり、従ってこの 0 の近傍で実解析的である。よって、 $|z| < \frac{\psi}{2}$ なる複素数に対して、 $M(t)$ のテイラー展開において t を z で置き換えた無限級数として $M(z)$ が定義出来る。一方、

$$\int_0^{\infty} e^{zx} f(x) dx$$

も $|z| < \frac{\psi}{2}$ において有限であり複素解析的である。この両者は z が $|z| < \frac{\psi}{2}$ なる実数のときは一致するから、複素解析関数に関する一致の定理により、

$$\int_0^{\infty} e^{zx} f(x) dx = M(z) \quad (\text{ただし, } |z| < \frac{\psi}{2})$$

が成り立つ。特に、 W の特性関数を $\varphi(t)$ とすると、

$$\varphi(t) = M(it) \quad \left(\text{ただし、}|t| < \frac{\psi}{2}\right)$$

が成り立つ。

命題 6.7 $\chi > 0, \psi > 0$ の場合、 $|z| < \frac{\psi}{2}$ なる複素数 z に対して、

$$\int_0^\infty e^{zx} f(x) dx = M(z) = \left(\frac{\psi}{\psi - 2z}\right)^{\frac{\lambda}{2}} \frac{K_\lambda\left(\sqrt{\chi(\psi - 2z)}\right)}{K_\lambda(\sqrt{\chi\psi})}$$

証明 左辺が $|z| < \frac{\psi}{2}$ において解析関数であることは上で見た。

一方、第 3 種変形ベッセル関数 $K_\lambda(z)$ は、2 階線形複素微分方程式、

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{dy}{dz} - \left(1 + \frac{\lambda^2}{z^2}\right) y = 0$$

の解である。ここに、係数の極は $z = 0$ のみである。よって、 $K_\lambda(z)$ は $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ において正則である ([神保 (2003)] 第 6 章第 3 節)。さらに、 $z \mapsto \sqrt{\chi(\psi - 2z)}$ は、 $\mathbb{C} \setminus [\frac{\psi}{2}, \infty)$ において正則である。従って、 $K_\lambda\left(\sqrt{\chi(\psi - 2z)}\right)$ は z に関する正則関数である。次に、

$$z \mapsto \left(\frac{\psi}{\psi - 2z}\right)^{\frac{\lambda}{2}}$$

も $\mathbb{C} \setminus \{\frac{\psi}{2}\}$ において正則である。従って、命題 6.7 の右辺は $[\frac{\psi}{2}, \infty)$ を除いて正則である。

命題 6.6 により、 z が $|z| < \frac{\psi}{2}$ なる実数のときには命題 6.7 の 2 つ目の等号の両辺は一致する。よって、一致の定理により、 $|z| < \frac{\psi}{2}$ なる複素数に対しても両辺は一致する。

(証明終)

$N^-(\lambda, \chi, \psi)$ の積率母関数 $M(t)$ を、幾つかの特別な場合についてどのようになるかを見てみよう。

まず、ガンマ分布になる $\chi = 0$ の場合は、 $\lambda > 0$ でなければならないから、第 3 種変形ベッセル関数の漸近展開を用いて $\chi \rightarrow +0$ とすると、

$$\lim_{\chi \rightarrow 0^+} M(t) = \lim_{\chi \rightarrow 0^+} \left(\frac{\psi}{\psi - 2t}\right)^{\frac{\lambda}{2}} \frac{\Gamma(\lambda) 2^{\lambda-1} (\sqrt{\chi(\psi - 2t)})^{-\lambda}}{\Gamma(\lambda) 2^{\lambda-1} (\sqrt{\chi\psi})^{-\lambda}} = \left(\frac{\psi}{\psi - 2t}\right)^\lambda$$

となる。右辺は、 $t < \frac{\psi}{2}$ において存在するから、全ての次数の積率を持つことが分かる。

次に、逆ガンマ分布になる $\psi = 0$ の場合は、 $\lambda < 0$ でなければならないから、同様に第 3 種変形ベッセル関数の漸近展開を用いて $\psi \rightarrow +0$ とすると、

$$\begin{aligned} \lim_{\psi \rightarrow 0^+} M(t) &= \lim_{\psi \rightarrow 0^+} \left(\frac{\psi}{\psi - 2t}\right)^{\frac{\lambda}{2}} \frac{K_\lambda(\sqrt{\chi(\psi - 2t)})}{\Gamma(-\lambda) 2^{-\lambda-1} (\sqrt{\chi\psi})^\lambda} \\ &= \frac{K_\lambda(\sqrt{-2\chi t})}{(-2t)^{\frac{\lambda}{2}} \Gamma(-\lambda) 2^{-\lambda-1} \chi^{\frac{\lambda}{2}}} = \left(-\frac{2}{\chi t}\right)^{\frac{\lambda}{2}} \frac{2K_\lambda(\sqrt{-2\chi t})}{\Gamma(-\lambda)} \end{aligned}$$

となる。右辺は、 $t < 0$ でしか存在しないため、全ての次数の積率が存在する訳ではない。

さらに、NIG 分布の混合要素である $\lambda = -\frac{1}{2}$ の場合は、

$$K_{-\frac{1}{2}}(x) = K_{\frac{1}{2}}(x) = \left(\frac{\pi}{2x}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-x}$$

であるから、

$$M(t) = \left(\frac{\psi}{\psi - 2t}\right)^{-\frac{1}{4}} \frac{K_{-\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\chi(\psi - 2t)}\right)}{K_{-\frac{1}{2}}(\sqrt{\chi\psi})}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{\psi}{\psi - 2t} \right)^{-\frac{1}{4}} \left(\frac{\sqrt{\chi\psi}}{\sqrt{\chi(\psi - 2t)}} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\sqrt{\chi(\psi - 2t)} + \sqrt{\chi\psi} \right\} \\
&= \exp \left\{ \sqrt{\chi} \left(\sqrt{\psi} - \sqrt{\psi - 2t} \right) \right\}
\end{aligned}$$

となる。

最後に、EM アルゴリズムを応用する際に必要になる一般逆ガウス分布の積率を計算しておく。命題の形で書くと次のようになる。

命題 6.8 W を $N^-(\lambda, \chi, \psi)$ に従う確率変数とすると、 $\chi > 0$ かつ $\psi > 0$ の場合、任意の実数 (整数でなくともよい) α に対して、次が成り立つ。

$$\begin{aligned}
E[W^\alpha] &= \left(\frac{\chi}{\psi} \right)^{\frac{\alpha}{2}} \frac{K_{\lambda+\alpha}(\sqrt{\chi\psi})}{K_\lambda(\sqrt{\chi\psi})} \\
E[\ln W] &= \left. \frac{dE[X^\alpha]}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = \frac{1}{2} \ln \frac{\chi}{\psi} + \frac{1}{K_\lambda(\sqrt{\chi\psi})} \left. \frac{d}{d\alpha} K_{\lambda+\alpha}(\sqrt{\chi\psi}) \right|_{\alpha=0}
\end{aligned}$$

証明 W の密度関数 $f(x)$ に対して、

$$h(\alpha, x) = x^\alpha f(x) = \frac{\chi^{-\lambda}(\sqrt{\chi\psi})^\lambda}{2K_\lambda(\sqrt{\chi\psi})} x^{\alpha+\lambda-1} \exp \left\{ -\frac{1}{2}(\chi x^{-1} + \psi x) \right\}$$

とおくと、 $\chi > 0$ かつ $\psi > 0$ のとき、

$$\begin{aligned}
E[W^\alpha] &= \int_0^\infty h(\alpha, x) dx \\
&= \left(\frac{\chi}{\psi} \right)^{\frac{\alpha}{2}} \frac{K_{\lambda+\alpha}(\sqrt{\chi\psi})}{K_\lambda(\sqrt{\chi\psi})} \int_0^\infty \frac{\chi^{-\lambda-\alpha}(\sqrt{\chi\psi})^{\lambda+\alpha}}{2K_{\lambda+\alpha}(\sqrt{\chi\psi})} x^{\lambda+\alpha-1} \exp \left\{ -\frac{1}{2}(\chi x^{-1} + \psi x) \right\} dx \\
&= \left(\frac{\chi}{\psi} \right)^{\frac{\alpha}{2}} \frac{K_{\lambda+\alpha}(\sqrt{\chi\psi})}{K_\lambda(\sqrt{\chi\psi})}
\end{aligned}$$

となる。2つ目の等式の右辺の積分項は $N^-(\lambda + \alpha, \chi, \psi)$ の密度関数の積分であるから 1 である。

α_0 を任意に固定して、 $\beta_1 < \alpha_0 < \beta_2$ なる実数 β_1, β_2 を取ると、任意の $\alpha \in (\beta_1, \beta_2)$ に対して、

$$\begin{aligned}
x^{\alpha+\lambda-1} &< x^{\beta_1+\lambda-1}, & x \in (0, 1) \\
x^{\alpha+\lambda-1} &< x^{\beta_2+\lambda-1}, & x \in (1, \infty)
\end{aligned}$$

となる。よって、

$$x^{\alpha+\lambda-1} < x^{\beta_1+\lambda-1} + x^{\beta_2+\lambda-1} \quad (x \in (0, \infty), \alpha \in (\beta_1, \beta_2))$$

が成り立つ。

$$\frac{\partial h}{\partial \alpha}(\alpha, x) = (\ln x) x^\alpha f(x) = (\ln x) h(\alpha, x)$$

であるから、

$$0 < \left| \frac{\partial h}{\partial \alpha}(\alpha, x) \right| = |\ln x| h(\alpha, x) \leq |\ln x| (h(\beta_1, x) + h(\beta_2, x)) \quad (x \in (0, \infty), \alpha \in (\beta_1, \beta_2))$$

となる。ところが、 $\chi > 0$ なら、任意の実数 β に対して、

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x) x^\beta \exp \left\{ -\frac{1}{2}(\chi x^{-1} + \psi x) \right\} = 0$$

であるから、上の不等式の右辺は $(0, 1]$ 上可積分である。また $[1, \infty)$ 上でも $0 \leq \ln x < x$ であることよりやはり可積分である。すなわち、上の不等式の右辺は $(0, \infty)$ 可積分である。よって、 α_0 の近傍

で α に関する微分と x に関する積分の順序が交換出来る． α_0 は任意だったから，従って，

$$\frac{dE[W^\alpha]}{d\alpha} = \frac{d}{d\alpha} \int_0^\infty h(\alpha, x) dx = \int_0^\infty \frac{\partial h}{\partial \alpha} h(\alpha, x) dx = \int_0^\infty (\ln x) h(\alpha, x) dx$$

となる．よって， $h(0, x) = f(x)$ に注意して，

$$E[\ln W] = \int_0^\infty (\ln x) h(0, x) dx = \left. \frac{dE[W^\alpha]}{d\alpha} \right|_{\alpha=0}$$

が従う．右辺を計算すると，

$$\begin{aligned} \left. \frac{dE[W^\alpha]}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} &= \frac{1}{2} \left\{ \ln \frac{\chi}{\psi} \cdot \left(\frac{\chi}{\psi} \right)^{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{K_{\lambda+\alpha}(\sqrt{\chi\psi})}{K_\lambda(\sqrt{\chi\psi})} \right\} \Bigg|_{\alpha=0} \\ &\quad + \left\{ \left(\frac{\chi}{\psi} \right)^{\frac{\alpha}{2}} \frac{1}{K_\lambda(\sqrt{\chi\psi})} \frac{d}{d\alpha} K_{\lambda+\alpha}(\sqrt{\chi\psi}) \right\} \Bigg|_{\alpha=0} \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{\chi}{\psi} + \frac{1}{K_\lambda(\sqrt{\chi\psi})} \frac{d}{d\alpha} K_{\lambda+\alpha}(\sqrt{\chi\psi}) \Bigg|_{\alpha=0} \end{aligned}$$

となる．

(証明終)

この結果を用いて， $N^-(\lambda, \chi, \psi)$ の中心積率を計算すると，次のようになる．

命題 6.9 $N^-(\lambda, \chi, \psi)$ の 1 次から 4 次までの中心積率は次のとおりである．

$$\begin{aligned} E[W] &= \zeta R \\ E[(W - E[W])^2] &= \zeta^2 \left\{ -R^2 + \frac{2(\lambda+1)}{\theta} R + 1 \right\} \\ E[(W - E[W])^3] &= \zeta^3 \left[2R^3 - \frac{6(\lambda+1)}{\theta} R^2 + \left\{ \frac{4(\lambda+2)(\lambda+1)}{\theta^2} - 2 \right\} R + \frac{2(\lambda+2)}{\theta} \right] \\ E[(W - E[W])^4] &= \zeta^4 \left[-3R^4 + \frac{12(\lambda+1)}{\theta} R^3 - \left\{ \frac{16(\lambda+2)(\lambda+1)}{\theta^2} - 2 \right\} R^2 \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \frac{8(\lambda+3)(\lambda+2)(\lambda+1)}{\theta^3} - \frac{4(\lambda+2)}{\theta} \right\} R + \frac{4(\lambda+3)(\lambda+2)}{\theta^2} + 1 \right] \end{aligned}$$

ただし，表現を簡単にするため，次の記号を用いた．

$$\zeta = \left(\frac{\chi}{\psi} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \theta = \sqrt{\chi\psi}, \quad R = \frac{K_{\lambda+1}(\theta)}{K_\lambda(\theta)}$$

証明 まず，命題 6.5 における最初の漸化式，

$$K_{\lambda+1}(x) = \frac{2\lambda}{x} K_\lambda(x) + K_{\lambda-1}(x)$$

より，

$$\begin{aligned} K_{\lambda+2}(x) &= \frac{2(\lambda+1)}{x} K_{\lambda+1}(x) + K_\lambda(x) \\ K_{\lambda+3}(x) &= \frac{2(\lambda+2)}{x} K_{\lambda+2}(x) + K_{\lambda+1}(x) \\ &= \frac{2(\lambda+2)}{x} \left\{ \frac{2(\lambda+1)}{x} K_{\lambda+1}(x) + K_\lambda(x) \right\} + K_{\lambda+1}(x) \\ &= \left\{ \frac{4(\lambda+2)(\lambda+1)}{x^2} + 1 \right\} K_{\lambda+1}(x) + \frac{2(\lambda+2)}{x} K_\lambda(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{\lambda+4}(x) &= \frac{2(\lambda+3)}{x} K_{\lambda+3}(x) + K_{\lambda+2}(x) \\
&= \frac{2(\lambda+3)}{x} \left[\left\{ \frac{4(\lambda+2)(\lambda+1)}{x^2} + 1 \right\} K_{\lambda+1}(x) + \frac{2(\lambda+2)}{x} K_{\lambda}(x) \right] \\
&\quad + \frac{2(\lambda+1)}{x} K_{\lambda+1}(x) + K_{\lambda}(x) \\
&= \left\{ \frac{8(\lambda+3)(\lambda+2)(\lambda+1)}{x^3} + \frac{4(\lambda+2)}{x} \right\} K_{\lambda+1}(x) \\
&\quad + \left\{ \frac{4(\lambda+3)(\lambda+2)}{x^2} + 1 \right\} K_{\lambda}(x)
\end{aligned}$$

が得られる。よって、命題 6.8 より、

$$\begin{aligned}
E[W] &= \zeta \frac{K_{\lambda+1}(\theta)}{K_{\lambda}(\theta)} = \zeta R \\
E[W^2] &= \zeta^2 \frac{K_{\lambda+2}(\theta)}{K_{\lambda}(\theta)} = \zeta^2 \frac{2(\lambda+1)}{\theta} R + \zeta^2 \\
E[W^3] &= \zeta^3 \frac{K_{\lambda+3}(\theta)}{K_{\lambda}(\theta)} = \zeta^3 \left\{ \frac{4(\lambda+2)(\lambda+1)}{\theta^2} + 1 \right\} R + \zeta^3 \frac{2(\lambda+2)}{\theta} \\
E[W^4] &= \zeta^4 \frac{K_{\lambda+4}(\theta)}{K_{\lambda}(\theta)} \\
&= \zeta^4 \frac{4(\lambda+2)}{\theta} \left\{ \frac{2(\lambda+3)(\lambda+1)}{\theta^2} + 1 \right\} R + \zeta^4 \left\{ \frac{4(\lambda+3)(\lambda+2)}{\theta^2} + 1 \right\}
\end{aligned}$$

が従う。これらを用いて計算を進めると、以下のとおり命題の主張が導かれる。

$$\begin{aligned}
&E[(W - E[W])^2] \\
&= E[W^2] - E[W]^2 \\
&= \zeta^2 \left\{ -R^2 + \frac{2(\lambda+1)}{\theta} R + 1 \right\} \\
&E[(W - E[W])^3] \\
&= E[W^3] - 3E[W^2]E[W] + 2E[W]^3 \\
&= \zeta^3 \left[\left\{ \frac{4(\lambda+2)(\lambda+1)}{\theta^2} + 1 \right\} R + \frac{2(\lambda+2)}{\theta} - 3 \left\{ \frac{2(\lambda+1)}{\theta} R + 1 \right\} R + 2R^3 \right] \\
&= \zeta^3 \left[2R^3 - \frac{6(\lambda+1)}{\theta} R^2 + \left\{ \frac{4(\lambda+2)(\lambda+1)}{\theta^2} - 2 \right\} R + \frac{2(\lambda+2)}{\theta} \right] \\
&E[(W - E[W])^4] \\
&= E[W^4] - 4E[W^3]E[W] + 6E[W^2]E[W]^2 - 3E[W]^4 \\
&= \zeta^4 \left[\frac{4(\lambda+2)}{\theta} \left\{ \frac{2(\lambda+3)(\lambda+1)}{\theta^2} + 1 \right\} R + \frac{4(\lambda+3)(\lambda+2)}{\theta^2} + 1 \right. \\
&\quad \left. - \left\{ \frac{16(\lambda+2)(\lambda+1)}{\theta^2} + 4 \right\} R^2 - \frac{8(\lambda+2)}{\theta} R + \frac{12(\lambda+1)}{\theta} R^3 + 6R^2 - 3R^4 \right] \\
&= \zeta^4 \left[-3R^4 + \frac{12(\lambda+1)}{\theta} R^3 - \left\{ \frac{16(\lambda+2)(\lambda+1)}{\theta^2} - 2 \right\} R^2 \right. \\
&\quad \left. + \left\{ \frac{8(\lambda+3)(\lambda+2)(\lambda+1)}{\theta^3} - \frac{4(\lambda+2)}{\theta} \right\} R + \frac{4(\lambda+3)(\lambda+2)}{\theta^2} + 1 \right]
\end{aligned}$$

(証明終)

$E[(W - E[W])^3]$ の右辺の形からは決して明らかではないが、広範な数値計算の結果から、一般逆

ガウス分布の歪度は正、尖度は3超(言い換えれば、超過尖度が正)であろうと長らく予想されていた([Iyengar and Liao(1997)]). 歪度については, [Nguyen et al.(2003)]により正であることが証明された. そこでは, $\chi > 0$ かつ $\psi > 0$ の場合について証明されているが, $\chi = 0$ の場合であるガンマ分布, $\psi = 0$ の場合である逆ガンマ分布においては, 歪度が正であることは容易に確認出来る. また, 尖度が3超であることも分かる.

NIG 分布の混合要素は, $\lambda = -\frac{1}{2}$ の場合であるから, 命題 6.9 における R が,

$$R = \frac{K_{\frac{1}{2}}(\theta)}{K_{-\frac{1}{2}}(\theta)} = 1$$

となることに注意すると, 直ちにその中心積率が下記の命題のように導ける. 歪度が正, 尖度が3超であることが明らかである.

命題 6.10 $\lambda = -\frac{1}{2}$ の場合の一般逆ガウス分布の1次から4次までの中心積率は次のとおりである. ただし, $\theta = \sqrt{\chi\psi}$ である.

$$\begin{aligned} E[W] &= \left(\frac{\chi}{\psi}\right)^{\frac{1}{2}} \\ E[(W - E[W])^2] &= \frac{\chi}{\psi} \frac{1}{\theta} \\ E[(W - E[W])^3] &= \left(\frac{\chi}{\psi}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{3}{\theta^2} \\ E[(W - E[W])^4] &= 3 \left(\frac{\chi}{\psi}\right)^2 \frac{1}{\theta^2} \left(\frac{5}{\theta} + 1\right) \end{aligned}$$

参考文献

- [神保 (2003)] 神保道夫 [2003], 『複素関数入門』, 岩波書店
- [西尾 (1978)] 西尾真喜子 [1978], 『確率論』, 実教出版
- [増田 (2002)] 増田 弘毅 [2002], 「GIG 分布と GH 分布に関する解析」, 『統計数理』, 第 50 巻第 2 号 165-199 頁, 統計数理研究所
- [渡辺 (2008)] 渡辺美智子 [2008], 「EM アルゴリズム」(北川源四郎・竹村彰通編『21 世紀の統計科学 III : 数理・計算の統計科学』(東京大学出版会) 239-269 頁 所収)
- [Hu(2005)] W.Hu [2005], "Calibration of Multivariate Generalized Hyperbolic Distributions Using the EM Algorithm, with Applications in Risk Management, Portfolio Optimization and Portfolio Credit Risk", PhD Thesis, Florida State University
- [Iyengar and Liao(1997)] Iyengar, S. and Q.Liao [1997], "Modeling neural activity using the generalized inverse Gaussian distribution", *Biological Cybernetics*, Vol.77, pp.289-295
- [Lebedev(1972)] Lebedev, N.N. [1972], *Special Functions and Their Applications*, Dover Publications

- [McNeil et al.(2005)] McNeil, A.J., R.Frey, and P.Embrechts [2005], *Quantitative Risk Management*, Princeton University Press
(邦訳：塚原英敦他訳 『定量的リスク管理』，共立出版，2008年)
- [Nguyen et al.(2003)] Nguyen, T.T., J.T.Chen, A.K.Gupta, and K.T.Dinh [2003], "A proof of the conjecture on positive skewness of generalized inverse Gaussian distribution", *Biometrika*, Vol.90, pp.245-250
- [Prause(1999)] K. Prause [1999], "The Generalized Hyperbolic Model: Estimation, Financial Derivatives, and Risk Measures", PhD Thesis, Mathematics Faculty, University of Freiburg
- [Press et al.(1999)] Press, W.H., S.A.Teukolsky, W.T.Vetterling, and B.P.Flannery [1999], *Numerical Recipes in C*, Cambridge University Press, 2nd Edition(reprinted with corrections)
- [Watson(1966)] Watson, G.N. [1966], *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, Cambridge University Press, 2nd Edition
- [Williams(1991)] Williams, D. [1991], *Probability with Martingales*, Cambridge University Press

表 1 NIG分布を応用するのに必要なツールと構築手段

| NIG分布の応用に使用するツール | 左記ツールに必要な数学的機能 | [Press(1999)]掲載のルーチン | 備 考 |
|-------------------------|----------------|------------------------|--|
| GH分布の密度関数 | 変形第3種ベッセル関数 | bessik, beschb, chebev | bessikは、第3種変形ベッセル関数およびその一次微分を計算するルーチン。 beschb, chebevは、bessikで用いられる補助ルーチン。 |
| GH分布の累積分布関数 | 関数の数値積分 | qromb, trapzd, polint | qrombは指定した関数の閉区間上の積分を計算するためのルーチン。 trapzd, polintはqrombで用いられる補助ルーチン。 |
| GH分布の累積分布関数の逆関数 | 関数の逆関数 | rtsafe | VaRの計算に使用 |
| GH分布の中心積率 | GIG分布の中心積率 | | 平均, 分散, 歪度, 尖度の計算に使用 |
| GIG分布の中心積率 | 変形第3種ベッセル関数 | | GH分布の中心積率の計算の補助ルーチンとなる |
| e^x * (GH分布の密度関数) の積分 | 関数の数値積分 | qromb, trapzd, polint | 期待シヨートフォールの計算に使用 |

備考

(1) 上に触れた数学的機能は、エクセルのないものに限定。

エクセルに変形第3種ベッセル関数の値を返すBESSELKという関数が用意されている。指数(本文中の λ)として整数値しか許容しないが、VBAに書き換えたbessikのチェックに使うことが出来る。

(2) 一般のGH分布を対象にEMアルゴリズムを適用する場合は、 ξ, i を計算するに当たって変形第3種ベッセル関数の指数に関する微分が必要となる。

その計算には、関数の数値微分のために[Press et al.(1999)]に掲載されているルーチンdfidrtを用いばよい。

(3) VBA関数の引数には「被積分関数」を含めることが出来ない。一方C言語で書かれたqrombおよびtrapzdのコードは、被積分関数を引数にしているように見える。従って、それらをVBAに書き換える際には、GH分布の密度関数、 e^x * (GH分布の密度関数)の積分の別に、被積分関数をqromb, trapzdの中で組み込んで、それぞれに用意する必要がある。

(4) [Press et al.(1999)]に掲載されているコードの使用あるいは他言語への書き換えにはライセンスが必要である。

表 2 国内株式、国債および為替の収益率に当てはめたNIG分布

(1) 基礎データおよび当てはめたNIG分布

| | | 株式 | 国債 | 為替 |
|-----------------|----------|---------------|--------------------------------|---------------|
| 観測期間 | | 1985.1～2008.7 | 1985.1～2008.7 | 1990.2～2008.7 |
| 観測インデックス(月末値) | | TOPIX | 残存7-10年の 元本収益率 (シティグループ) | 円/米ドルの TTM |
| 標本統計 | 平均 | 0.13% | 0.16% | -0.13% |
| | 標準偏差 | 5.56% | 1.79% | 3.06% |
| | 歪度 | -0.215 | -0.586 | -0.479 |
| | 尖度 | 4.071 | 5.881 | 5.677 |
| NIG分布の パラメータ | μ | 0.0111 | 0.0050 | 0.0082 |
| | Σ | 0.0029 | 0.0002 | 0.0008 |
| | γ | -0.0093 | -0.0022 | -0.0084 |
| | χ | 3.0698 | 1.0024 | 2.2129 |
| | ϕ | 2.7194 | 0.4293 | 1.7417 |
| NIG分布の 統計量 | 平均 | 0.13% | 0.16% | -0.13% |
| | 標準偏差 | 5.56% | 1.81% | 3.04% |
| | 歪度 | -0.184 | -0.855 | -0.475 |
| | 尖度 | 4.084 | 8.547 | 4.829 |

- 備考 1. 国債の収益率は、デュレーション7.5を仮定し、インデックス・デュレーションを用いて元データを換算
 2. 標本統計およびNIG分布のパラメータは対数収益率に対するもの
 3. インデックス・データの出所: Bloomberg

(2) 年次換算後のNIG分布

| | | 株式 | 国債 | 為替 |
|-------|----------|----------|----------|----------|
| パラメータ | μ | 0.1334 | 0.0597 | 0.0978 |
| | Σ | 0.0029 | 0.0002 | 0.0008 |
| | γ | -0.0093 | -0.0022 | -0.0084 |
| | χ | 442.0454 | 144.3480 | 318.6550 |
| | ϕ | 2.7194 | 0.4293 | 1.7417 |
| 統計量 | 平均 | 1.51% | 1.91% | -1.56% |
| | 標準偏差 | 19.27% | 6.26% | 10.53% |
| | 歪度 | -0.053 | -0.247 | -0.137 |
| | 尖度 | 3.090 | 3.462 | 3.152 |

備考 各月の対数収益率の分布が独立かつ同一であると仮定して換算

表3 米国株式、社債の収益率に当てはめたNIG分布

(1) 基礎データおよび当てはめたNIG分布

| | | 米国株式 | 米国社債(ヘッジ付) | 米国社債(ヘッジ無) |
|-----------------|----------|---------------|---------------------------------------|--------------------|
| 観測期間 | | 1985.1~2008.7 | 1985.1~2008.7 | 1990.2~2008.7 |
| 観測インデックス(月末値) | | S&P500 | A格残存7-10年の ドルベース元本収益率 (シティグループ) | 左記および 円/米ドルのTTM |
| 標本統計 | 平均 | 0.72% | 0.10% | -0.06% |
| | 標準偏差 | 4.30% | 1.70% | 3.28% |
| | 歪度 | -1.099 | -0.171 | -0.490 |
| | 尖度 | 7.345 | 3.912 | 6.245 |
| NIG分布の パラメータ | μ | 0.0307 | 0.0061 | 0.0039 |
| | Σ | 0.0014 | 0.0003 | 0.0009 |
| | γ | -0.0216 | -0.0050 | -0.0038 |
| | χ | 2.4050 | 4.1407 | 1.7801 |
| | ϕ | 2.0190 | 3.9973 | 1.2398 |
| NIG分布の 統計量 | 平均 | 0.72% | 0.10% | -0.06% |
| | 標準偏差 | 4.23% | 1.70% | 3.25% |
| | 歪度 | -0.757 | -0.221 | -0.281 |
| | 尖度 | 5.126 | 3.802 | 5.124 |

- 備考 1. ヘッジ付は、短期為替予約によるローリング・ヘッジを想定
 2. 社債の収益率は、デュレーション6.5を仮定し、インデックス・デュレーションを用いて元データを換算
 3. 標本統計およびNIG分布のパラメータは対数収益率に対するもの
 4. インデックス・データの出所: Bloomberg

(2) 年次換算後のNIG分布

| | | 米国株式 | 米国社債(ヘッジ付) | 米国社債(ヘッジ無) |
|-------|----------|----------|------------|------------|
| パラメータ | μ | 0.3683 | 0.0728 | 0.0470 |
| | Σ | 0.0014 | 0.0003 | 0.0009 |
| | γ | -0.0216 | -0.0050 | -0.0038 |
| | χ | 346.3268 | 596.2655 | 256.3277 |
| | ϕ | 2.0190 | 3.9973 | 1.2398 |
| 統計量 | 平均 | 8.59% | 1.19% | -0.72% |
| | 標準偏差 | 14.66% | 5.88% | 11.27% |
| | 歪度 | -0.219 | -0.064 | -0.081 |
| | 尖度 | 3.177 | 3.067 | 3.177 |

備考 各月の対数収益率の分布が独立かつ同一であると仮定して換算したもの

表 4 国内および米国の資産収益率のVaR・ES

1. 国内資産

| リスク尺度 | 適用分布 | 信頼水準 | 保有期間1ヶ月 | | | 保有期間1年 | | |
|-------|-------|-------|---------|------|-------|--------|-------|-------|
| | | | 株式 | 国債 | 為替 | 株式 | 国債 | 為替 |
| VaR | NIG分布 | 99.5% | 15.4% | 6.6% | 9.7% | 39.2% | 15.1% | 26.3% |
| | | 99% | 13.5% | 5.4% | 8.4% | 35.9% | 13.2% | 23.9% |
| | | 95% | 8.7% | 2.8% | 5.2% | 26.2% | 8.4% | 17.5% |
| | 正規分布 | 99.5% | 13.2% | 4.4% | 7.7% | 38.2% | 13.1% | 25.1% |
| | | 99% | 12.0% | 3.9% | 7.0% | 35.2% | 11.8% | 23.0% |
| | | 95% | 8.6% | 2.7% | 5.0% | 26.1% | 8.0% | 17.3% |
| ES | NIG分布 | 99.5% | 18.0% | 8.4% | 11.7% | 43.1% | 17.6% | 29.2% |
| | | 99% | 16.2% | 7.2% | 10.3% | 40.2% | 15.8% | 27.1% |
| | | 95% | 11.7% | 4.4% | 7.2% | 32.1% | 11.4% | 21.5% |
| | 正規分布 | 99.5% | 14.7% | 4.9% | 8.6% | 42.8% | 15.0% | 27.9% |
| | | 99% | 13.7% | 4.5% | 7.9% | 40.3% | 13.7% | 26.1% |
| | | 95% | 10.7% | 3.5% | 6.2% | 32.9% | 10.5% | 21.3% |

2. 米国資産

| リスク尺度 | 適用分布 | 信頼水準 | 保有期間1ヶ月 | | | 保有期間1年 | | |
|-------|-------|-------|---------|----------------|----------------|--------|----------------|----------------|
| | | | 米国株式 | 米国社債 (ヘッジ付) | 米国社債 (ヘッジ無) | 米国株式 | 米国社債 (ヘッジ付) | 米国社債 (ヘッジ無) |
| VaR | NIG分布 | 99.5% | 13.1% | 4.8% | 10.1% | 27.9% | 13.4% | 26.8% |
| | | 99% | 11.2% | 4.2% | 8.7% | 24.5% | 12.1% | 24.4% |
| | | 95% | 6.5% | 2.7% | 5.3% | 15.1% | 8.2% | 17.7% |
| | 正規分布 | 99.5% | 9.8% | 4.2% | 8.2% | 25.8% | 13.0% | 25.9% |
| | | 99% | 8.9% | 3.8% | 7.4% | 22.9% | 11.7% | 23.8% |
| | | 95% | 6.2% | 2.7% | 5.3% | 14.7% | 8.1% | 17.6% |
| ES | NIG分布 | 99.5% | 15.9% | 5.7% | 12.2% | 32.0% | 15.2% | 29.9% |
| | | 99% | 14.0% | 5.1% | 10.8% | 29.0% | 13.9% | 27.7% |
| | | 95% | 9.4% | 3.7% | 7.4% | 20.9% | 10.6% | 21.8% |
| | 正規分布 | 99.5% | 11.1% | 4.7% | 9.1% | 29.9% | 14.8% | 28.9% |
| | | 99% | 10.2% | 4.3% | 8.4% | 27.5% | 13.6% | 27.1% |
| | | 95% | 7.8% | 3.3% | 6.6% | 20.6% | 10.5% | 21.9% |

表 5 ポートフォリオの収益率に当てはめたNIG分布, およびVaR

(1) 標本統計および当てはめたNIG分布

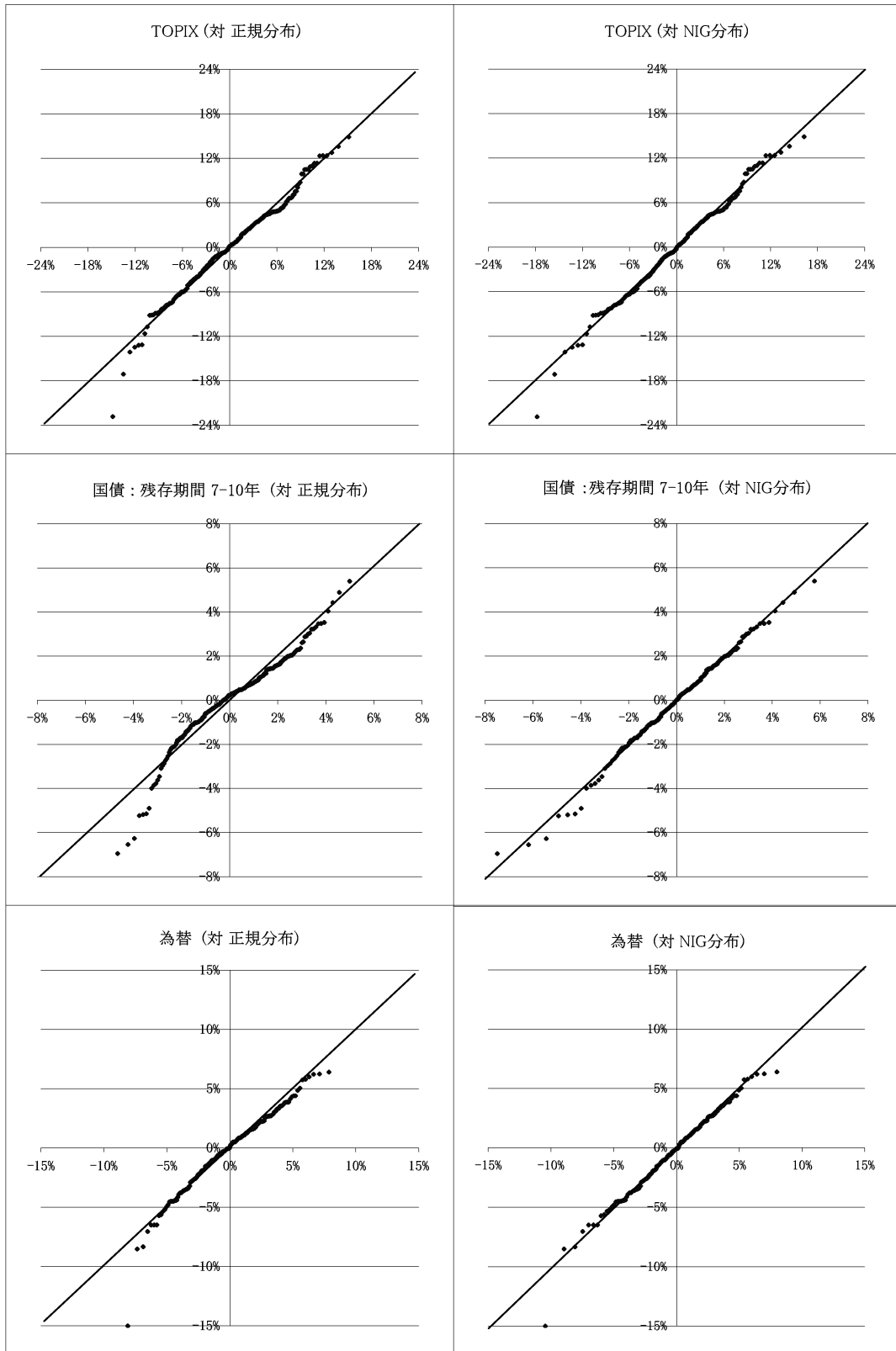
| | | 観測期間別結果 | | | 合成NIG分布 | |
|------------------------|----------|-------------------|-------------------|-------------------|----------|---------|
| | | (1) | (2) | (3) | (1)+(2) | (1)+(3) |
| 観測期間 | | 1990.2 ~2008.7 | 2003.8 ~2008.7 | 2005.8 ~2008.7 | / | |
| 標本統計 | 平均 | 0.11% | 0.11% | -0.00% | | |
| | 標準偏差 | 1.52% | 0.92% | 0.99% | | |
| | 歪度 | -0.371 | 0.223 | 0.428 | | |
| | 尖度 | 5.560 | 2.946 | 3.243 | | |
| NIG分布のパラメータ (年次換算後) | μ | 0.0037 | / | -0.0534 | 0.0027 | 0.0017 |
| | Σ | 0.0002 | | 0.0000 | 0.0001 | 0.0001 |
| | γ | -0.0023 | | 0.0595 | -0.0014 | -0.0015 |
| | χ | 2.0448 | | 31.2712 | 2.0448 | 2.0448 |
| | ϕ | 1.5423 | | 38.8763 | 1.5423 | 1.5423 |
| | χ | 294.4563 | 4503.0594 | 294.4563 | 294.4563 | |

(2) VaR

| 保有期間 | 適用分布 | 信頼水準 | 観測期間別結果 | | | 合成NIG分布 | |
|------|-------|-------|---------|------|------|---------|---------|
| | | | (1) | (2) | (3) | (1)+(2) | (1)+(3) |
| 1ヶ月 | NIG分布 | 99.5% | 4.6% | / | 2.1% | 2.8% | 3.2% |
| | | 99% | 3.9% | | 2.0% | 2.4% | 2.7% |
| | | 95% | 2.4% | | 1.5% | 1.4% | 1.7% |
| | 正規分布 | 99.5% | 3.7% | 2.2% | 2.5% | / | |
| | | 99% | 3.4% | 2.0% | 2.3% | | |
| | | 95% | 2.4% | 1.4% | 1.6% | | |
| 1年 | NIG分布 | 99.5% | 12.0% | / | 8.1% | 7.0% | 8.9% |
| | | 99% | 10.7% | | 7.4% | 6.2% | 8.0% |
| | | 95% | 7.1% | | 5.4% | 3.9% | 5.6% |
| | 正規分布 | 99.5% | 11.5% | 6.6% | 8.5% | / | |
| | | 99% | 10.4% | 5.9% | 7.7% | | |
| | | 95% | 7.1% | 3.8% | 5.5% | | |

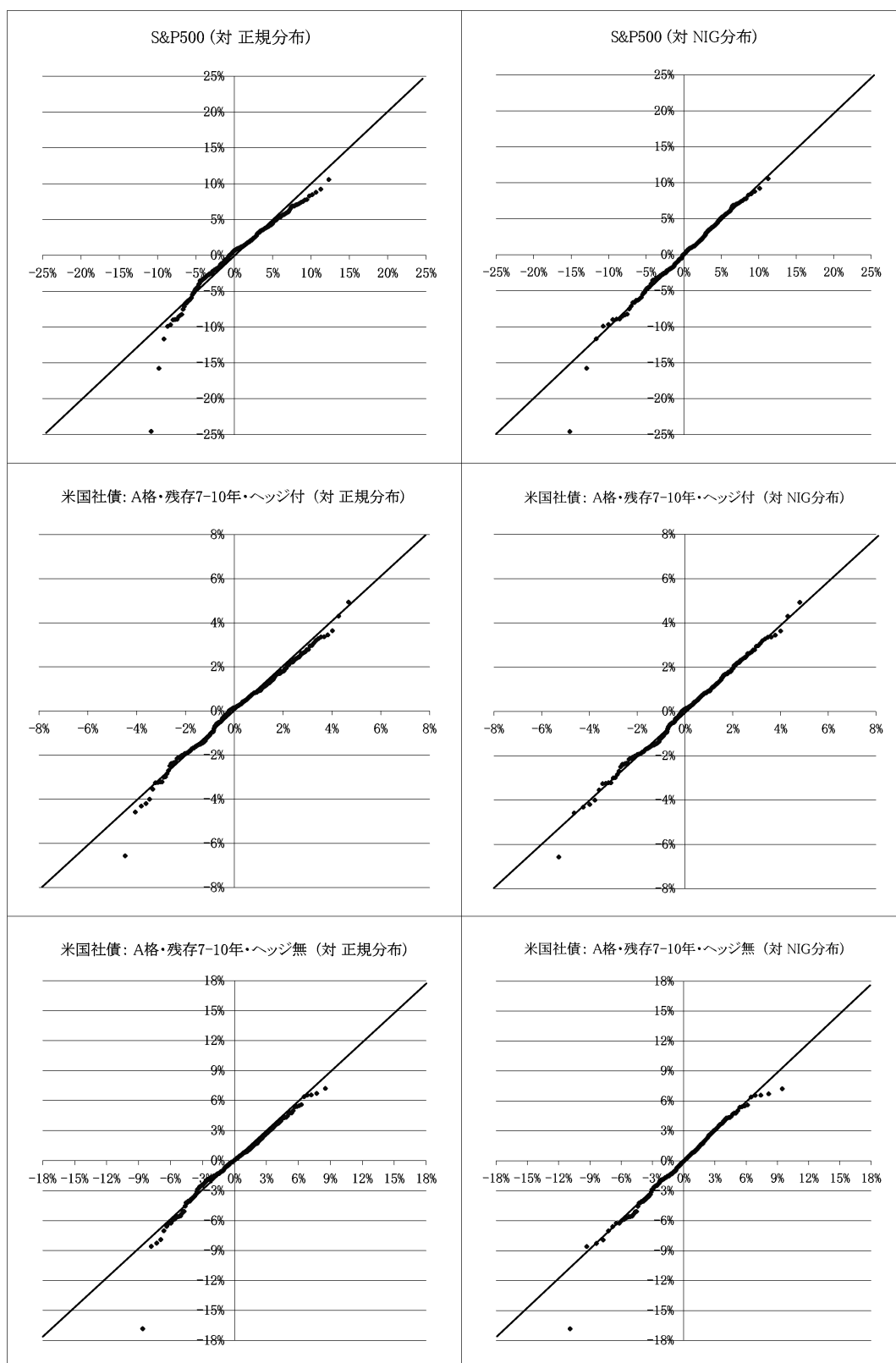
備考

1. ポートフォリオの構成
国内株式:20%, 日本国債:50%, 米国株式:5%, 米国社債(ヘッジ付):20%, 同(ヘッジ無):5%
2. 合成NIG分布パラメータ設定方法
(1)+(2): 歪度・尖度は観測期間(1)に当てはめたNIG分布に, 平均・分散は観測期間(2)の標本平均・分散に等しくなるように設定
(1)+(3): 歪度・尖度は観測期間(1)に当てはめたNIG分布に, 平均・分散は観測期間(2)に当てはめたNIG分布の平均・分散に等しくなるように設定



備考 1. 観測期間 TOPIX: 1985.1 ~ 2008.7 国債: 1985.1 ~ 2008.7 為替(円/ドル TTM): 1990.2 ~ 2008.7
 2. データ出所 Bloomberg

図1 国内資産の月次対数収益率のQQプロット: 対正規分布, 対NIG分布



備考 1. 観測期間 S&P500: 1985.1~2008.7 米国社債(ヘッジ付): 1985.1~2008.7 米国社債(ヘッジ無): 1990.2~2008.7
 2. データ出所 Bloomberg

図2 米国資産の月次対数収益率のQQプロット: 対正規分布, 対NIG分布

NIG Distribution : Towards Non-Normal Distribution at Hand

Takashi Mizuno

Gibraltar Life Insurance Co. Ltd.
The Prudential Tower, 2-13-10, Nagata-cho, Chiyoda-ku, Tokyo 100-0014, Japan.

Abstract

It is generally recognized that returns on assets like common stocks, bonds, or foreign exchange rates are not normally distributed. However, parametric non-normal distributions have mathematically and practically hard aspects in their complicated probability density functions or uneasy process of determining parameters, in contrast to normal distribution that is determined just by mean and variance or covariance matrix.

In the environment where some software packages providing routines relating to non-normal distributions are at hand, the above difficulties may be quite lessened. Still, if a non-normal distribution can be handled on Excel spread sheets and is widely used, it is expected to serve improvement in risk measurement, or, in turn, appropriate assessment of normal distribution.

Highlighted in this note is Normal Inverse Gaussian(NIG) distribution, which belongs to a family of probability distributions called Generalized Hyperbolic Distributions. With more parameters than normal distribution, virtually four parameters in one dimensional case, NIG distribution is better fitted to historical data, while keeping convolution property which enables simple time aggregation. This note attempts to expound NIG distribution in as self-contained a manner as possible, referring to its important features in the application to investment risk management, an algorithm to determine the parameters in fitting the distribution to time series of historical returns, and routines necessary for computation of risk measures based on the fitted distribution on Excel.