

正規コピュラの漸近的裾依存性

近藤宏樹（日新火災海上保険株式会社）
齋藤新悟（九州大学大学院数理学研究院）

1 はじめに

当研究成果は、著者らが日新火災海上保険株式会社と九州大学大学院数理学研究院との共同研究に携わる中で谷口説男氏（九州大学大学院数理学研究院）と共同で得たものである。

会社の抱える不確実性（リスク）を定量化し評価するためには、不確実な要素がもたらす会社の損益への影響を確率変数として捉えて分析するのが一般的である。この際通常は、いくつかの異なる種類のリスク（異なる種目の保険引受リスクなど）を確率変数 X_1, \dots, X_n によってモデル化した後それらを統合する、つまり確率変数 $X_1 + \dots + X_n$ について調べるといった段階を踏むことになる。

確率変数 X_1, \dots, X_n が独立だと仮定すれば、それぞれの確率変数の従う分布から和 $X_1 + \dots + X_n$ の分布が決定できる。しかし一般には各 X_i の間にある依存関係を適切に織り込まなければ和 $X_1 + \dots + X_n$ を分析することはできない。

2つの確率変数 X, Y の相関を示す指標としては相関係数 $\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$ がある。相関係数は確率変数間の線形な関係を示すものであり、例えば $X_1 + \dots + X_n$ の標準偏差は各 X_i の期待値、標準偏差および X_i 間の相関係数から算出できるためよく用いられる指標である。

しかし近年では、確率変数 X の変動を捉えるために標準偏差ではなく確率点（バリュアットリスク）や確率点以上における条件付き期待値（テイルバリュアットリスク）が用いられることが多くなってきた。このような視点から見ると、各 X_i の分布と相関係数だけでは和 $X_1 + \dots + X_n$ の分布について十分な情報であるとはいえない。また、相関係数はそれぞれの確率変数の周辺分布にも依存するため、確率変数間の依存関係を純粋に取り出した指標ではないという欠点もある。

これらを克服する依存関係の指標としてコピュラがある。コピュラによるリスク統合の手法は近年活発に研究されており、モデル化において適切なコピュラを選択する方針についてもいくつか考察がなされている。そのうちの1つに、多次元正規分布に由来する正規コピュラはリスク統合の際に重要視される裾依存性を捉えられないとする説明があるが、本論文はこの点について裾依存性の漸近挙動を考慮に入れた再検討を行うものである。

以下第2節でコピュラの定義と簡単な性質を述べた後、第3節で代表的なコピュラの例を紹介し、裾依存性との関係を第4節以下で論じる。なお、命題や定理の証明は省略したので、本論文の研究成果についての詳細は [2] を、コピュラの基礎については [3] を参照されたい。

2 確率変数の依存関係とコピュラ

n 次元確率変数の依存関係を示す指標であるコピュラは次のように定義される：