破産理論 (Risk Theory) のこれまでとこれから

清水 泰隆

早稲田大学　理工学術院

2014 年度 第 1 回 JARIP 研究会
2014 年 8 月 21 日

Contents

破産理論 (Risk Theory, 危険理論) の概要

危険理論の目的

この理論の目的は，保険事業に生じる変動をコントロールするために必要な手法を保険会社に提供することにある．保険会社の経営者にとっては，再保険の手配，あるいは自己資本の拡充などの政策決定の際にこれらの手法が有用となる．

(日本アクチュアリー会「損保数理」より．一部改訂)

応用範囲: 再保険，保険料決定，ソルベンシー評価

- **Q. 本当に実務でうまく機能しているのか？** $\Rightarrow$ NO
- **Q. 破産理論は無力なのか？** $\Rightarrow$ NO?

Risk theory の位置づけ

SOA (Society of Actuaries, US)

- 教科書：*"Loss Models: from data to decisions"*, Wiley, by Klugman, Panjer and Willmot. (1st – 4th ed.)
- ∼1999 年：Risk Therory だけで 1 科目.
- ∼2004 年：Exam C の一部.
- 2005 年∼：削除 (リスク尺度を重視).
- 2012 年：教科書の 4th ed. からも削除

その他の国では？

- 英国 (Institute and Faculty of actuaries) では Ruin theory を推奨. (SA3, specialist application subject: e.g., *"Ruin theory starter kit"*).
- University of Liverpool：実データによる Ruin Theory に基くリスク管理実習.
- 中国では昔の SOA 試験を踏襲 (Ruin theory を重視). Ruin Theory の研究者も多く教育も盛ん.
- 日本は（？）教科書にはコアな部分がコンパクトに書かれている.

Risk theory の位置づけ

学術分野での変遷

- ～1990 年頃：古典的な議論が主.
- 1990 年半ば：Risk Thoery の可能性
  Embrechts and Klüppelberg (1993). "Some aspects of insurance mathematics"：「理論と実務のギャップを埋めることが必要」
- 1998 年：Ruin Theory の再燃 (Gerber and Shiu, 1998)
- 2000 年前後：ファイナンスとの融合などが叫ばれる.
- ～現在：急速な発展．ファイナンスへの応用も盛ん.

A. 現代的リスク理論には多くの応用可能性がある！

Ruin Theory の再考

- Embrechts et al. (2004), *Ruin theory revisited: stochastic models for operational risk*, ORIE Technical Reports.
  - オペリスクによるロス・データと保険のロス・データの類似に着目.
- Gerber and Loisel (2012), *Why ruin theory should be of interest for insurance practitioners and risk managers nowadays?*, *Proceedings of Actuarial and Financial Mathematics*, Bruxelles, Belgium.
  - 連続時間モデルによるベンチマーク化推奨.
  - 過去のクレームデータに基づく保険料調整 (Credibility-adjusted-premium).
  - Solvency II: Solvency Capital Requirement (SCR), 配当水準の評価.
- Wüthrich (2013). *From Ruin rheory to solvency in non-life insurance*, preprint.
  - Lundberg モデルを修正したソルベンシー評価.
- Dickson (2013), *Finite-time ruin probability revisited*, Insurance: The 17th Congress of Insurance: Mathematics and Economics, Copenhagen, Denmark.
  - Enterprise Risk Management
  - 有期でのソルベンシーリスク評価，資本注入 (capital injections).

Part I

これまでのRisk Theory（復習編）

確率過程による定式化

- **準備金の変動** (risk process):

$$X_t = x + C_t - S_t$$

x: 初期準備金， C: 保険料などの収入， S: 累積クレーム額などの支出.

- **リスク指標: 破産確率**

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \mathbb{P}(\tau_0 < \infty | X_0 = x) \\ &= \mathbb{P}(\tau_0 < \infty)\end{aligned}$$

ただし,

$$\tau_0 := \inf\{t > 0 | X_t < 0\} \quad \text{(破産時刻)}$$

古典的な破産理論

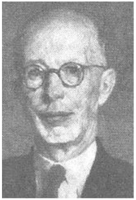
Lundberg (1903, 博士論文):

H.Cramér

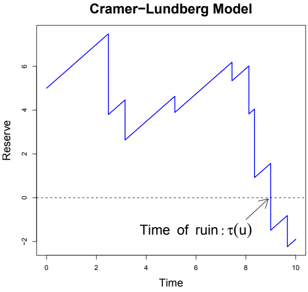
Cramér-Lundberg model

$$X_t = x + ct - \sum_{i=1}^{N_t} U_i,$$

(複合ポアソンモデル)



F.Lundberg



- $x > 0$: 初期サープラス.
- $c > 0$: 保険料率
- $N_t \sim Po(\lambda t)$: クレーム数；平均 λt.
- $U_i \in F$, i.i.d.: クレーム額；平均 μ.

[仮定] 十分大きな $\widetilde{R} > 0$ に対して

$$\int_0^\infty e^{\widetilde{R}x} F(dx) < \infty$$

破産確率

Theorem (Lundberg 不等式)

方程式

$$\log \mathbb{E}[e^{r(X_1 - x)}] = 0 \quad (\textit{Lundberg}\ \textbf{方程式})$$

に**負の解** $r = -R\ (R > 0)$ が存在するとき,

$$\psi(x) = \mathbb{P}(\tau_0 < \infty) < e^{-Rx}.$$

R を**調整係数**という.

- $M_U(r) = \mathbb{E}[e^{rU_1}]$ と書くと，$R > 0$ は以下の方程式の**正の解**.

$$c\tilde{r} - \lambda\left(M_U(\tilde{r}) - 1\right) = 0$$

- $Y_t = e^{-RX_t}$ **は** $\mathcal{F}_t$**-マルチンゲール** $(\mathcal{F}_t = \sigma(X_s; s \le t))$:

$$\mathbb{E}[Y_t | \mathcal{F}_s] = Y_s \quad (s \le t)$$

e.g., $s = 0$ とすると

$$\mathbb{E}\left[e^{-RX_t}\right] = e^{-Rx}$$

調整係数の存在

$\theta > 0$: **安全付加率**.

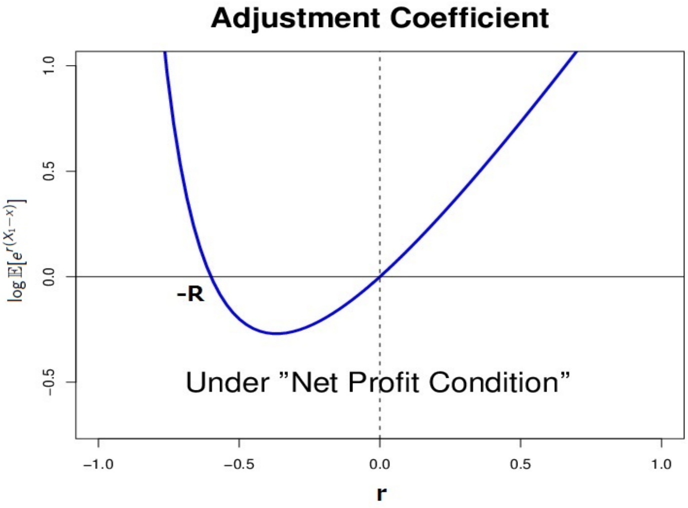
$$c = (1+\theta)\lambda\mu \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{E}[X_t] = x + \theta\lambda\mu t$$

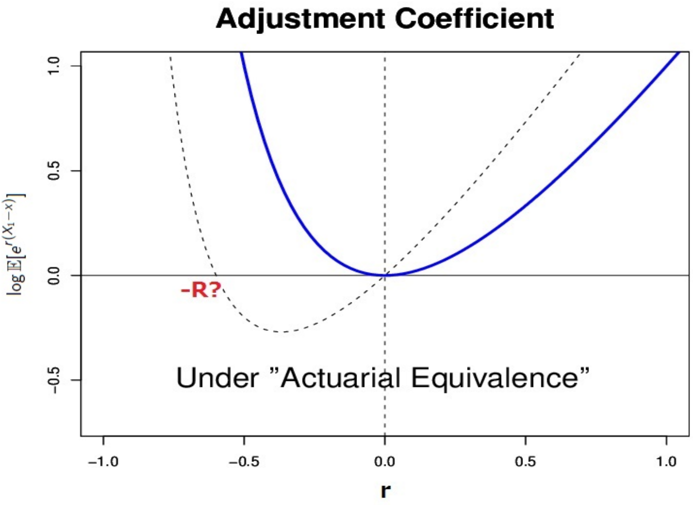
- $\theta > 0$ (Net Profit Condition, NPC): **平均的に増加傾向**

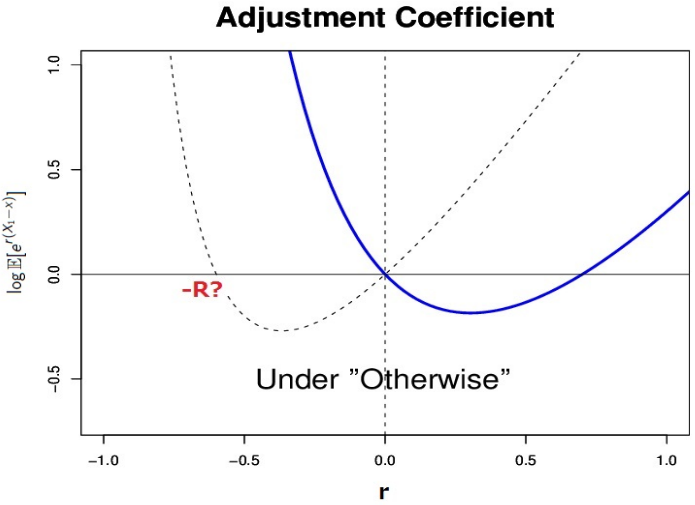
$$R > 0 \text{ が存在する} \quad \Leftrightarrow \quad \psi(x) < 1$$

- $\theta = 0$ (**収支相等の原則**) or $\theta < 0$: **平均的に減少傾向**

$$R > 0 \text{ は存在しない} \quad \Leftrightarrow \quad \psi(x) = 1$$


Adjustment Coefficient
1.0
0.5
0.0
−0.5
$\log \mathbb{E}[e^{r(X_1 - x)}]$
-R
Under "Net Profit Condition"
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0
r


Adjustment Coefficient
1.0
0.5
0.0
−0.5
log 𝔼[e^{r(X_1 − x)}]
-R?
Under "Actuarial Equivalence"
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0
r


Adjustment Coefficient
$\log \mathbb{E}[e^{r(X_1 - x)}]$
1.0
0.5
0.0
−0.5
-R?
Under "Otherwise"
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0
r

Lundberg 不等式の証明

A quick proof.

1. $Y_t = e^{-RX_t}$ はマルチンゲール．有界な停止時刻 $\tau_0 \wedge T$ に対して，

$$\mathbb{E}\left[e^{-RX_{(\tau_0 \wedge T)}}\right] = e^{-Rx} \quad \textbf{(任意抽出定理)}$$

2. NPC の下で $X_T \to \infty$ $a.s.$ $(T \to \infty)$ に注意して，$T \to \infty$ とすると

$$\begin{aligned} e^{-Rx} &= \mathbb{E}\left[e^{-RX_{\tau_0}}\mathbf{1}_{\{\tau_0 \le T\}}\right] + \mathbb{E}\left[e^{-RX_T}\mathbf{1}_{\{\tau_0 > T\}}\right] \\ &\overset{T\to\infty}{\to} \mathbb{E}\left[e^{-RX_{\tau_0}}\mathbf{1}_{\{\tau_0 \le \infty\}}\right] \quad \textbf{(単調収束定理)} \\ &= \mathbb{P}(\tau_0 < \infty)\mathbb{E}\left[e^{-RX_{\tau_0}} \middle| \tau_0 < \infty\right]. \end{aligned}$$

3. したがって，$\psi(x) = \dfrac{e^{-Rx}}{\mathbb{E}\left[e^{-RX_{\tau_0}} \middle| \tau_0 < \infty\right]} < e^{-Ru}$.

□

破産理論の応用例

- 破産確率をリスク指標として，初期備金 x・安全付加率 θ を決定：

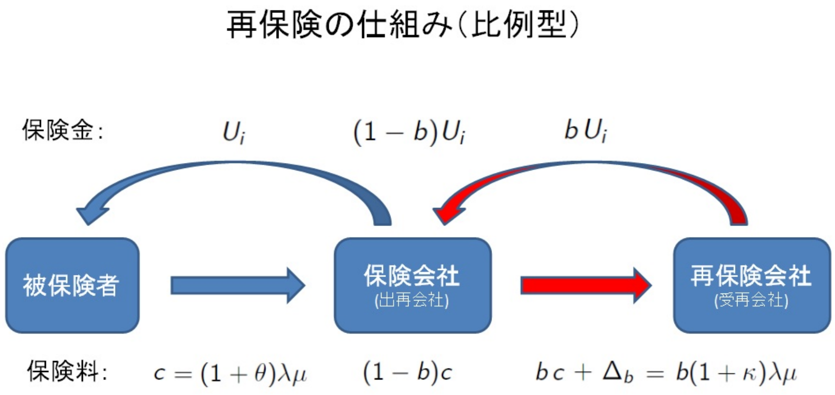
$$\psi(x) \approx e^{-R_\theta x} \le \epsilon \quad \Rightarrow \quad x \ge \frac{\log \epsilon^{-1}}{R_\theta}$$

(もう少し精密に評価できる ⇒ 後述)

- 代表的な応用例は**再保険**

- 「損保数理」(日本アクチュアリー会), 7–8 章を参照

ex. 比例型再保険


再保険の仕組み(比例型)
保険金:
U_i
$(1-b)U_i$
$b\,U_i$
被保険者
保険会社
(出再会社)
再保険会社
(受再会社)
保険料:
$c=(1+\theta)\lambda\mu$
$(1-b)c$
$b\,c+\Delta_b=b(1+\kappa)\lambda\mu$

破産理論の応用例 (ex. 比例型再保険)

- 出再割合 $b \in (0,1)$ のときの保険会社のサープラス:

$$X_t^b = x + [(1-b)c - \Delta_b]t - \sum_{i=1}^{N_t}(1-b)U_i$$

Δ_b は**再保険プレミアム**:

$$\Delta_b := \underbrace{b(1+\kappa)\lambda\mu}_{\text{再保険料}} - \underbrace{b(1+\theta)\lambda\mu}_{\text{出再分保険料}} = b(\kappa-\theta)\lambda\mu$$

ただし，κ は再保険会社が設定する安全付加率 $(\kappa \geq \theta)$.

- このときの調整係数を R_b とすると

$$[(1-b)c - \Delta_b]R_b - \lambda\left(M_U\left((1-b)R_b\right) - 1\right) = 0$$

$R_b > 0$ の条件は $b \in (0, \theta/\kappa)$.

※ $b \geq \theta/\kappa$ **だと，**$R_b > 0$ **が存在しなくなる** $\Rightarrow$ **確率 1 で破産．**

- $\psi(x) < e^{-R_b x}$ より，R_b が大きいほど破産確率が小さいと考えれば...

$$\text{(optimal) } b_* = \max_{b\in(0,\theta/\kappa)} R_b$$

Part II

もう一歩踏み込んで...（Renewal Theory）

Renewal Theory

Theorem (不完全再生方程式 (defective renewal equation))

$\theta > 0$ *(NPC)* の下で,

$$\psi(x) = \frac{1}{1+\theta}(\psi * F_I)(x) + \frac{1}{1+\theta}\overline{F_I}(x), \quad x \geq 0$$

ただし,

- $F_I(x) = \dfrac{1}{\mu}\displaystyle\int_0^x \overline{F}(y)\,dy$ *(Integrated tail distribution)*
- $\overline{F_I}(x) := 1 - F_I(x)$ *(Tail function)*
- $(F * G)(x) = \displaystyle\int_0^x F(x-y)G(dy)$ *(Convolution)*

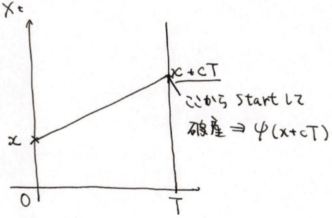
cf. **Rolski et al. (1999), Asmussen and Albrecher (2010)** などを参照.

再生型方程式の導出 (renewal argument) I

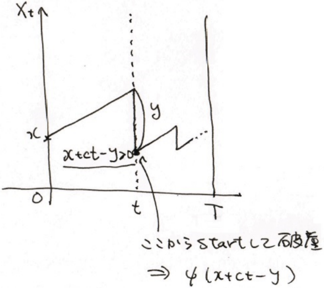
任意の $T > 0$ をとって，以下の場合分けを行う:

1. 区間 $(0, T)$ でクレーム無し (破産しない): 確率 $e^{-\lambda T}$.
2. $t < T$ に対して最初のクレームが $[t, t + dt)$ で起こり: 確率 $\lambda e^{-\lambda t}\, dt$
   クレーム額は $y < x + ct$: (破産しない)
3. $t < T$ に対して最初のクレームが $[t, t + dt)$ で起こり: 確率 $\lambda e^{-\lambda t}\, dt$
   クレーム額が $y > x + ct$: (破産する)

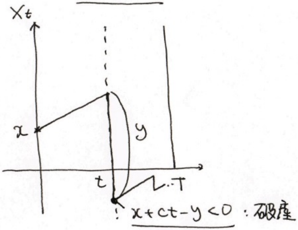
Case 1



Case 2



Case 3



ポアソンの性質

$$\mathbb{P}(N_T=0)=e^{-\lambda T}$$

$$\mathbb{P}(N_{t+dt}-N_t=1,\ N_t=0)=\lambda e^{-\lambda t}dt$$

再生型方程式の導出 (renewal argument) II

- 任意の $T > 0$ に対して,

$$\psi(x) = e^{-\lambda T}\psi(x+cT) \text{ (1. no claim)}$$
$$+ \int_0^T \lambda e^{-\lambda t}\,dt \int_0^{x+ct} \psi(x+ct-y)\,F(dy)$$
$$\text{(2. first claim } t < T,\ y < u+ct\text{)}$$
$$+ \int_0^T \lambda e^{-\lambda t}\,dt \int_{x+ct}^{\infty} F(dy)$$
$$\text{(3. first claim } t < T,\ \text{but } y > u+ct\text{)}$$

- 両辺を T で微分して $T = 0$ とおく:

Lemma (Integro-differential equation)

ψ が *1* 階微分可能 **(これは仮定しなくても証明できるが...)** なら,

$$c\psi'(x) + \lambda\left[\int_0^x \psi(x-y)\,F(dy) - \psi(x)\right] + \lambda\overline{F}(x) = 0.$$

再生型方程式の導出 (renewal argument) III

- 両辺を x について $[0,x]$ で積分することにより，

$$\psi(x)-\psi(0)=\frac{\lambda}{c}\int_0^x \psi(x-y)\overline{F}(y)\,dy-\frac{\lambda}{c}\int_0^x \overline{F}(y)\,dy$$

を得る.

- ここで $x\to\infty$ とすると，$\psi(\infty)=0$ (by NPC); $\int_0^\infty \overline{F}(y)\,dy=\mu$ に注意して **(ルベーグの) 優収束定理**を使えば

$$\psi(0)=\frac{\lambda}{c}\int_0^\infty \overline{F}(y)\,dy=\frac{1}{1+\theta}$$

- あとは $F_I(x)=\frac{1}{\mu}\int_0^x \overline{F}(y)\,dy$ の記号を用いて整理すると

$$\psi(x)=\frac{1}{1+\theta}\int_0^x \psi(x-y)\,F_I(dy)+\frac{1}{1+\theta}\overline{F_I}(x)$$

(証明終)

再生型方程式から得られる諸結果

Note: $G(x) = (1+\theta)^{-1}F_I(x), H(x) = (1+\theta)^{-1}\overline{F_I}(x)$ とおくと,

$$\psi = \psi * G + H$$

- *Laplace transform:* for $\mathcal{L}F(s) := \int_0^\infty e^{-sx}\,F(dx)$,

$$\mathcal{L}\psi = \mathcal{L}\psi \cdot \mathcal{L}G + \mathcal{L}H \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{L}\psi = \frac{\mathcal{L}H(s)}{1-\mathcal{L}G(s)}$$

- *Ploaczek-Khinchin formula:* $|\mathcal{L}G| < 1$ より,

$$\mathcal{L}\psi = \mathcal{L}H \cdot \sum_{\kappa=0}^{\infty} (\mathcal{L}G)^k \quad \Leftrightarrow \quad \psi = H * \sum_{k=0}^{\infty} G^{*k}$$

- *Cramér approximation:* $R > 0$: 調整係数

$$\psi(x) \sim \frac{c-\lambda\mu}{\lambda M_U'(R) - c} e^{-Rx}, \quad x \to \infty.$$

(“Key renewal theorem”による)

Remarks

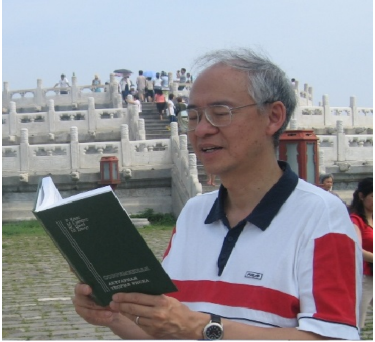
- 破産理論の理論的発展は 90 年代後半までは，このあたりでほぼ停滞.
- 破産確率の呪縛
  - Sparre-Andersen model
  - 非定常ポアソンモデル
  - Heavy-tailed distribution
- ブラウン運動の利用 (数理ファイナンスの隆盛)
  - 拡散近似 (**Grandel, 1976**)
  - 拡散摂動 (**Dufresne and Gerber, 1991**)
- **破産確率しかないのか？**

Part III

Risk Theory，その後の発展

Ruin Theory 再燃：Gerber-Shiu Analysis

Hans U. Gerber (U. of Lausanne)



Elias S.W. Shiu (U. of Iowa)

- **Idea**： 破産した保険会社に対するペナルティが課されるべき.
- Penalty function (罰則関数) は以下に依存すべき:

$$X_{\tau_0 -}\text{: surplus prior to ruin;} \quad |X_{\tau_0}|\text{: deficit at ruin.}$$

- Gerber and Shiu (1998). On the time value of ruin. *N. Am. Actuar. J.*. $(\tau_0, X_{\tau_0 -}, |X_{\tau_0}|)$ の同時分布を解析しよう.

Definition (Expected discounted penalty function, EDPF)

ϕ を以下で定める:

$$\phi(x) = \mathbb{E}\left[e^{-\delta\tau_0} w(X_{\tau_0 -}, |X_{\tau_0}|)\mathbf{1}_{\{\tau_0<\infty\}} | X_0 = x\right],$$

ここで, $\delta > 0$, $\tau_0 := \inf\{t > 0 | X_t < 0\}$, $w : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$: 可測関数.

- ϕ：破産時の罰則 (破産リスク) の現在価値 .
- *Gerber-Shiu function*.

Gerber-Shiu 関数の隆盛

- 1998 年以降すごい数の論文が出ています.
  e.g., **MathSciNet:** www.ams.org/mathscinet/
  "Gerber Shiu function" or "discounted penalty" で検索 ≈ 270 本
- *International Gerber-Shiu Workshop* (2006 年〜，隔年)
- Insurance: Mathematics and Economics (2010). no.1–2:
  Special issues on Gerber-Shiu functions
- Asmussen and Albrecher (2010). *"Ruin probabilities"*. 2nd ed., WSP, Chapter 12.
- Kyprianou (2013). *"Gerber-Shiu Risk Theory"*, Springer.

Example (Gerber-Shiu functions)

- $\delta = 0$; $w \equiv 1$: $\phi(x) = \mathbb{P}(\tau_0 < \infty | X_0 = x)$.
- $\delta = 0$; $w(x, y) = \mathbf{1}_{\{(x \le u, y \le v)\}}$: $(X_{\tau_0 -}, |X_{\tau_0}|)$ の (不完全) 分布:

$$\phi(x; du, dv) = \mathbb{P}\left(X_{\tau_0} \in du, |X_{\tau_0}| \in dv, \tau_0 < \infty | X_0 = x\right).$$

- $\delta \ge 0$; $w = (\alpha x + \beta y)^k$: the kth-order (discounted) moment of a claim causing ruin: $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\phi(x; \alpha, \beta) = \mathbb{E}\left[e^{-\delta\tau_0}(\alpha X_{\tau_0 -} + \beta |X_{\tau_0}|)^k \mathbf{1}_{\{\tau_0 < \infty\}} | X_0 = x\right].$$

- $\delta \ge 0$; $w(x, y) = e^{-\xi x - \eta y}$: $(\tau_0, X_{\tau_0 -}, |X_{\tau_0}|)$ の積率母関数:

$$\phi(x; \delta, \xi, \eta) = \mathbb{E}\left[e^{-(\delta\tau_0 + \xi X_{\tau_0 -} + \eta |X_{\tau_0}|)} \mathbf{1}_{\{\tau_0 < \infty\}} | X_0 = x\right] \quad (\delta, \xi, \eta \ge 0).$$

- Option pricing: Gerber and Shiu (1998a,b); dividend strategy: Gerber and Shiu (1998a), Cai et al. (2009a,b); capital injection; Eisenberg and Schmidli (2011), risk measures: Trufin et al. (2011), Garrido (2013).

Quick review of“Gerber and Shiu (1998, NAAJ)”

Theorem (Main result in Gerber and Shiu (1998))

$\theta > 0$ とし，ϕ は *1* 階微分可能とする．このとき，

$$\phi(x) = \phi * G_\rho(x) + H_\rho(x), \quad x \geq 0.$$

ただし，

$$G_\rho(x) = \frac{1}{1+\theta} \int_0^x \left[\frac{1}{\mu} \int_y^\infty e^{-\rho(z-y)} F(dz) \right] dy;$$

$$H_\rho(x) = \frac{1}{1+\theta} \int_x^\infty e^{-\rho(y-x)} \left[\frac{1}{\mu} \int_y^\infty w(y, z-y)\, F(dz) \right] dy;$$

また，ρ は以下の一般化 *Lundberg* **方程式**:

$$\log \mathbb{E}[e^{\rho(X_1 - x)}] = \delta$$

の**非負解 (Lunberg 指数)**.

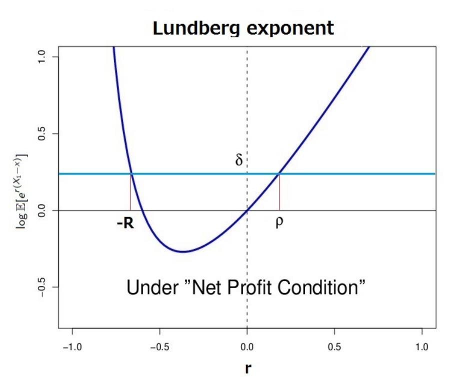
Remarks I

一般化 Lundberg 方程式の負の解 $-R$ を用いると,

$Y_t = e^{-\delta t - RX_t}$ はマルチンゲール

となり，調整係数の一般化．
実は

$Z_t = e^{-\delta t + \rho X_t}$ もマルチンゲール



- Gerber-Shiu 関数の解析には Lundberg 方程式の非負の解も用いる：
  Lundberg "fundamental" equation
- 特に，$M_U(r) = \mathbb{E}[e^{rU_1}]$ を用いて書くと，

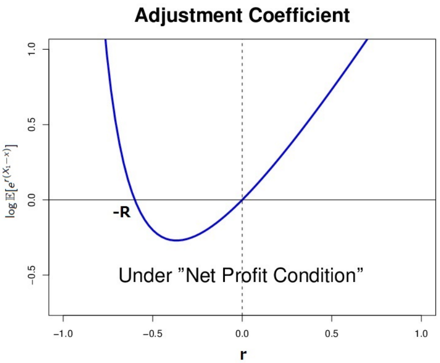
$$
\begin{aligned}
&(\text{非負解})： && c(-\rho) + \lambda\,(M_U(-\rho) - 1) = -\delta \\
&(\text{正の解})： && cR + \lambda\,(M_U(R) - 1) = -\delta
\end{aligned}
$$

Remarks II: $w \equiv 1,\ \delta = 0\ (\phi(x) = \psi(x))$

一般化 Lundberg 方程式は

$$\log \mathbb{E}[e^{\rho(X_1 - x)}] = 0$$

$$\Rightarrow \quad \rho = 0$$



- $G_0(x) = \dfrac{\mu^{-1}}{1+\theta} \displaystyle\int_0^x \left[\int_y^\infty e^{-0(z-y)} F(dz) \right] dy = \dfrac{1}{1+\theta} F_I(x).$
- $H_0(x) = \dfrac{\mu^{-1}}{1+\theta} \displaystyle\int_x^\infty e^{-0(y-x)} \int_y^\infty 1\, F(dz)\, dy = \dfrac{1}{1+\theta} \overline{F}_I(x)$

Gerber-Shiu 関数の再生型方程式：導出 I

- 任意の $T > 0$ に対して

$$\phi(x) = e^{-\lambda t} e^{-\delta T} \phi(x + cT) \ \text{(1. no claim)}$$
$$+ \int_0^T \lambda e^{-\lambda t}\, dt \cdot e^{-\delta t} \int_0^{x+ct} \phi(x + ct - y)\, F(dy)$$
$$\text{(2. first claim } t < T,\ y < u + ct)$$
$$+ \int_0^T \lambda e^{-\lambda t}\, dt \cdot e^{-\delta t} \int_{x+ct}^{\infty} w(x + ct, y - (x + ct))\, F(dy)$$
$$\text{(3. first claim } t < T, \text{ but } y > u + ct)$$

- 両辺を T で微分して $T = 0$ とおく: **(積分-微分方程式)**

$$c\phi'(x) + \lambda \int_0^x \phi(x - y)\, F(dy) - (\lambda + \delta)\phi(x) + \lambda\alpha(x) = 0$$

where $\alpha(x) := \int_x^\infty w(x, y - x)\, F(dy)$.

Gerber-Shiu 関数の再生型方程式：導出 II

- 前式の両辺に $e^{-\rho x}$ かけて，$\phi_\rho(x) := e^{-\rho x}\phi(x)$ とおくと，

$$c\phi_\rho'(x) = (\delta + \lambda - c\rho)\phi_\rho(x) - \lambda \int_0^x \phi_\rho(x-y)e^{-\rho x} F(dy) - \lambda e^{-\rho x}\alpha(x)$$
$$= \lambda M_U(-\rho)\phi_\rho(x) - \lambda \int_0^x \phi_\rho(x-y)e^{-\rho x} F(dy) - \lambda e^{-\rho x}\alpha(x)$$

※ ここで Lundberg 指数の等式を使った．

- 両辺を x について $[0,x]$ で積分し，(破産確率の時と同様にして)

$$\phi_\rho(0) = \frac{1}{1+\theta}\frac{1}{\mu}\int_0^\infty e^{-\rho y}\alpha(y)\,dy$$

となることに注意して整理すると，

$$\phi_\rho(x) = \frac{1}{1+\theta}\left\{\int_0^x \phi_\rho(y)\left[\frac{1}{\mu}\int_{x-y}^\infty e^{-\rho z} F(dz)\right] dy + \frac{1}{\mu}\int_x^\infty e^{-\rho y}\alpha(y)\,dy\right\}.$$

あとは両辺に $e^{\rho x}$ を掛ければ，ϕ の再生型方程式が得られる． **(証明終)**

再生方程式から導かれる諸結果

- *Ploaczek-Khinchin formula & Laplace transform:*

$$\phi = H_\rho * \sum_{k=0}^{\infty} G_\rho^{*k} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{L}\phi = \frac{\mathcal{L}H_\rho(s)}{1 - \mathcal{L}G_\rho(s)},$$

ただし,

$$\mathcal{L}G_\rho(s) = \frac{\lambda}{c(\rho - s)} \left[\mathcal{L}F(s) - \mathcal{L}F(\rho)\right],$$

$$\mathcal{L}H_\rho(s) = \frac{\lambda}{c(\rho - s)} \int_0^\infty \int_y^\infty (e^{-s(z-y)} - e^{-\rho(z-y)}) w(z-y, y)\, F(dz)dy$$

- *Cramér-type approximation:* $R > 0$: 調整係数

$$\psi(x) \sim \frac{\mathcal{L}H_\rho(-R)}{-\mathcal{L}G_\rho'(-R)} e^{-Rx}, \quad x \to \infty.$$

Gerber-Shiu 関数の応用 I

- VaR 型リスク尺度:

$$V_\epsilon := \inf\{x > 0 \,|\, \phi(x) < \epsilon\},$$

"Gerber-Shiu リスク" が閾値 $\epsilon > 0$ を超えないような最小備金.

- e.g., $\delta = 0$, $w(x, y) = \mathbf{1}_{\{y \le z\}}$ in ϕ,

$$\phi(x; z) = \mathbb{P}^x\left(|X_{\tau_0}| \le z,\ \tau_0 < \infty\right),$$

破産時損害額 (*Deficit at Ruin*) の分布関数.

- *"VaR at ruin"*

$$DaR_\alpha(x) := \inf\{z > 0 | \phi(x; z) > \alpha\}.$$

初期資産 $x > 0$ の時に，破産時の損害が $DaR_\alpha(x)$ を超えるような確率が $100(1-\alpha)\%$(以下).

- Solve $x_\alpha = DaR_\alpha(x_\alpha)$

x_α: 破産時損害を $100\alpha\%$(以上) でカバーするための初期資産.

Gerber-Shiu 関数の応用 II

- 資産過程 $V_t = V_0 e^{ct - S_t}$ に対するアメリカンオプション:

$$\Pi(s) := (K - s)_+, \quad K: \text{行使価格}$$

- 戦略: $V_t < L$ となったら行使する.

$$X_t := \log(V_0/L) + ct - S_t \quad \Rightarrow \quad \tau_0 := \inf\{t > 0 | X_t < 0\}$$

- ペイオフの現在価値

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left[e^{-\delta\tau_0}\Pi(V_{\tau_0})\mathbf{1}_{\{\tau_0<\infty\}} | V_0 = v\right] \\ &= \mathbb{E}\left[e^{-\delta\tau_0}(K - e^{X_{\tau_0}})_+\mathbf{1}_{\{\tau_0<\infty\}} | X_0 = \log(V_0/L)\right] \\ &= \phi(\log(V_0/L)) \end{aligned}$$

$w(x,y) = (K - e^y)_+$ の Gerber-Shiu **関数**

- **最適行使境界**:

$$L_* := \arg\max_{L\in[0,K]} \phi(\log(V_0/L)).$$

Gerber-Shiu 関数の応用 III

- $X = (X_t)_{t \geq 0}$：保険会社の資産過程.
- 資本注入過程 (capital injection process) $Z = (Z_t)_{t \geq 0}$ s.t.

$$X_t + Z_t \geq 0, \ \ a.s. \quad \forall\, t > 0$$

- 破産しないために資本注入を続けるとき,

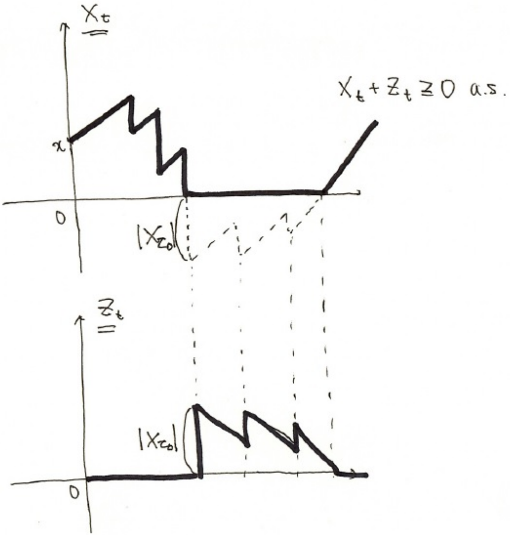
$$f(x) = \arg\inf_{Z} \mathbb{E}\left[\int_0^\infty e^{-\delta t} dZ_t \Big| X_0 = x\right]$$

- 最初の破産時に $Z_{\tau_0} = |X_{\tau_0}|$ 注入しておけば，それ以降最小期待資本は $f(0)$:

$$f(x) = \mathbb{E}\left[e^{-\delta \tau_0}(f(0) + |X_{\tau_0}|)\mathbf{1}_{\{\tau_0 < \infty\}} | X_0 = x\right]$$

$\Rightarrow$ $w(x,y) = f(0) + y$ の Gerber-Shiu **関数**

Capital Injection



ここまでのまとめ

- 破産リスクの評価ツールが拡大.
- 実務的な応用もありそう.
- **実用化への問題点：** リスクモデルがシンプルすぎる？

$$X_t = x + ct - \sum_{i=1}^{N_t} U_i$$

  - 収入は線形？
  - 支出はクレームのみ？

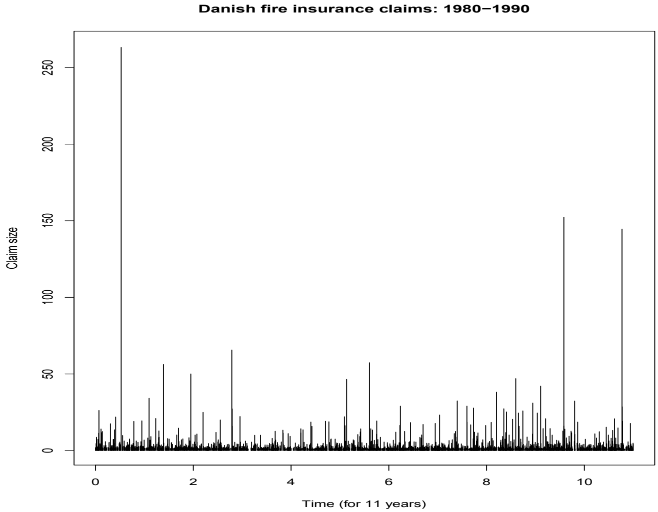
Part IV

Risk Theory のこれから (展望編)

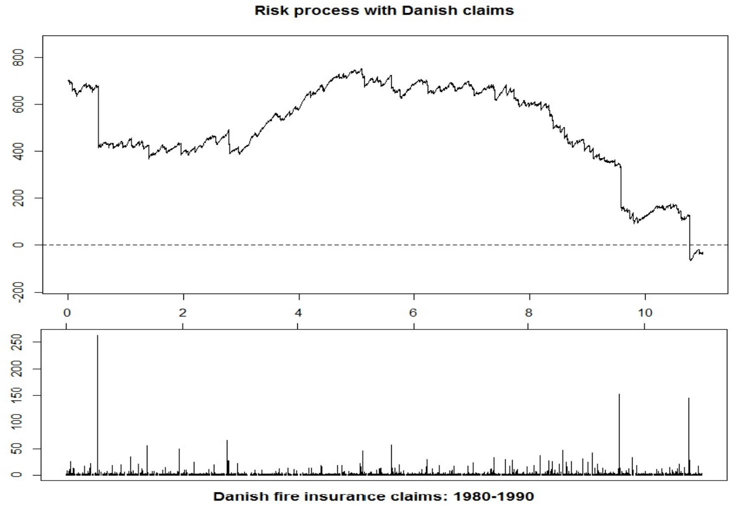
Ruin Theory の方向性？

- リスクモデルの一般化 (レヴィ過程)
- Gerber-Shiu 関数の一般化 (パス依存型)
- 信用リスク (クレジット・リスク) 解析との接点
- 統計的推測理論

リスク過程は複合ポアソン?



$\theta = 0.1,\ x = 700;\ \widehat{\mu} = 3.385,\ \widehat{\lambda} = 197$



Model fitting

- **Classical (Lundberg) model:**

$$X_t = x + c_1 t - \sum_{i=1}^{N_t} U_i$$

$U_i \sim$ Exp or Weibull.

- Diffusion approximation: **e.g., Grandel (1991)**

$$X_t = x + c_2 t + \sigma W_t$$

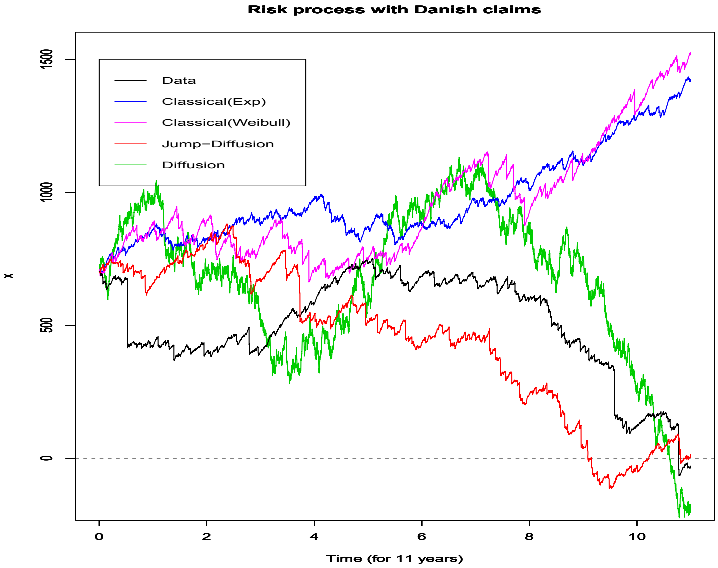
W は標準ブラウン運動.

- Jump-Diffusion model:

$$X_t = x + c_3 t + \sigma' W'_t - \sum_{i=1}^{N'_t} U'_i$$

W' は標準ブラウン運動, $U_i \sim$ Exp.

Which is better? (Fitted by (Q)MLE)



考察

- Classical (Lundberg) model では，**クレームの分布の選択を誤ると** まったく違ったパスに見えてしまう．
  - **指数分布** (blue) では，大きなクレームがほとんど起こらない．
  - **ワイブル分布** (magenta) では中程度のクレームが多く観察される．
  - 大きいクレームが起きない分，**データ** (black) のような破産パスが出にくい．
  - **対数正規分布**も試してみたが Exp と変わらない感じ...

- **拡散近似** (green) はパスの形としては論外．
  (破産確率近似の良さについてはまた別の話)

- Jump-Diffusion(red) はクレームを指数分布という単純なものに設定したが，それなりにデータに近い形を復元出来ているように見える．

- 更に，収入・コストなどの不確実性をモデル化する必要．

⇒ **古典モデルから脱するべき！**

一般化リスクモデル(レヴィ過程)

一つの方向性として，保険サープラスのモデルを以下のように一般化する:

$$X_t = x + L_t,$$

Definition (レヴィ過程 (簡易的な定義))

- $L_0 = 0$ で，パスは右連続，左極限をもつ．
- **独立・定常増分**をもつ：$0 < s < s + h < t < t + h$ に対して
  - $L_{t+h} - L_t \sim^d L_h$ (定常増分性)
  - $L_{t+h} - L_t$ と $L_{s+h} - L_s$ は独立 (独立増分性)

注意

ブラウン運動 W や複合ポアソン S はレヴィ過程．その線形和 $aW + bS$ もレヴィ過程になる．より厳密なレヴィ過程の定義は，Sato (1999), Mikosch (2009), 10 章などを参照.

その他の成書：**Bertoin (1996), Applebaum (2004), Cont and Tankov (2004), Kyprianou (2006), etc.**

レヴィ過程の性質 I

Theorem (Lévy-Ito decomposition)

レヴィ過程 L は，以下のような分解を持つ：

$$L_t = at + \sigma W_t + J_t$$

ただし，$a, \sigma \in \mathbb{R}$ は定数，W は標準ブラウン運動，J は W と独立なジャンプを持つ確率過程で，特性関数は，ある測度 ν が存在して

$$\mathbb{E}\left[e^{isJ_t}\right] = \exp\left(t\int_{\mathbb{R}}(e^{isz} - 1 - isz\mathbf{1}_{\{|z|\le 1\}})\,\nu(dz)\right)$$

と書ける．ただし，ν は $\int_{|z|\le 1}|z|^2\,\nu(dz) < \infty$ を満たす測度.

Corollary (Lévy-Khinchin decomposition)

L の特性関数は，三つ組み (a, σ^2, ν) が与えられれば 1 つに決まり，

$$\mathbb{E}\left[e^{isL_t}\right] = \exp\left(t\left\{ias - \frac{\sigma^2}{2}s^2 + \int_0^\infty (e^{isz} - 1 - isz\mathbf{1}_{\{|z|\le 1\}})\,\nu(dz)\right\}\right)$$

Example ((ドリフト付き) ブラウン運動)

$$L_t = \mu t + \sigma W_t$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{E}\left[e^{isL_t}\right] = \mathbb{E}[e^{isZ}], \quad Z \sim N(\mu t, \sigma^2 t)$$

$$= \exp\left(t\left[i\mu s - \frac{\sigma^2}{2}s^2\right]\right)$$

三つ組みは

$$(a, \sigma, \nu) = (\mu, \sigma, 0)$$

Example (複合ポアソン過程)

$$L_t = \sum_{i=1}^{N_t} U_i, \quad U_i \sim F,\ N_t \sim Po(\lambda t)$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad \mathbb{E}\left[e^{isL_t}\right] &= \mathbb{E}^N\left[\prod_{i=1}^{N} \mathbb{E}\left[e^{isU_i} | N_t = N\right]\right] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda t}\frac{1}{k!}\left(\lambda t \int_0^{\infty} e^{isz}\, F(dz)\right)^k \\
&= \exp\left(t\left[\lambda \int_0^{\infty} (e^{isz} - 1)\, F(dz)\right]\right) \\
&= \exp\left(t\left\{is\lambda \int_0^1 z\, F(dz) + \int_0^{\infty} (e^{isz} - 1 - isz\mathbf{1}_{\{|z|\le 1\}})\,\lambda F(dz)\right\}\right)
\end{aligned}$$

三つ組みは

$$(a, \sigma, \nu) = (\lambda \int_0^1 z\, F(dz), 0, \lambda F)$$

レヴィ過程の性質 II

- ν: Lévy measure, がジャンプの大きさと頻度を特徴づける.
- $\lambda = \int_0^\infty \nu(dz) < \infty \Rightarrow J \sim CP(\lambda, F))$, $\nu(dz) = \lambda F(dz)$.
- $\lambda = \int_0^\infty \nu(dz) = \infty \Rightarrow$ 単位時間に**無限回のジャンプ**が起こるモデル.
- 任意の $\epsilon > 0$ に対して,

$$J_t = J_t^{(1)} + J_t^{(2)}, \quad J_t^{(2)} = \sum_{s \le t} \Delta J_s \mathbf{1}(|\Delta J_s| > \epsilon)$$

とおくと, $J^{(2)} \sim CP(\lambda_\epsilon, F_\epsilon)$. ただし,

$$\lambda_\epsilon := \int_{|z|>\epsilon} \nu(dz), \quad F_\epsilon(x) = \lambda_\epsilon^{-1} \int_{\epsilon<|z|\le x} \nu(dz)$$

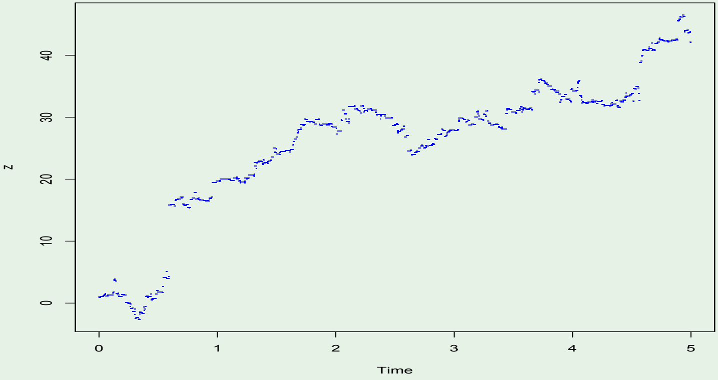
- $J^{(1)}$ には (ϵ で) 有界なジャンプしかないが, 無限回のジャンプが含まれている.

Examples of Lévy processes I

Example (Variance gamma process: $X_t = W_{G_t}$)

$$\nu(dz) = \frac{\delta}{|z|} e^{-\gamma |z|}, \quad z \in \mathbb{R}$$

$\delta = 5, \gamma = 0.63$

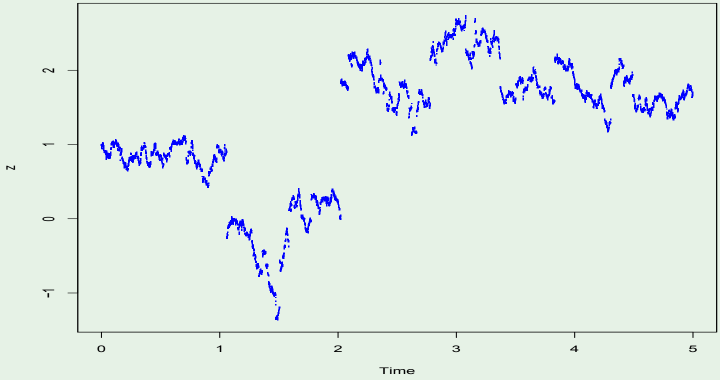


Examples of Lévy processes II

Example ((Symmetric) α-stable process)

$$\nu(dz) = \frac{C_\sigma}{|z|^{\alpha+1}} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{E}\left[e^{isX_t}\right] = \exp\left(-\sigma^\alpha |z|^\alpha\right)$$

$\sigma = 1, \alpha = 3/2.$



レヴィ過程の性質 III

Theorem

(1) $\int_{|z|\le 1} |z|\,\nu(dz) < \infty \Rightarrow J$ のパスは有界変動.

$$\mathbb{E}\left[e^{isJ_t}\right] = \exp\left(t\int_{\mathbb{R}}(e^{isz}-1)\,\nu(dz)\right)$$

特に，パスが単調増加なもの $(\Delta J_t > 0)$ を**従属過程** *(subordinator)* という:

$$\mathbb{E}\left[e^{isJ_t}\right] = \exp\left(t\int_0^\infty (e^{isz}-1)\,\nu(dz)\right)$$

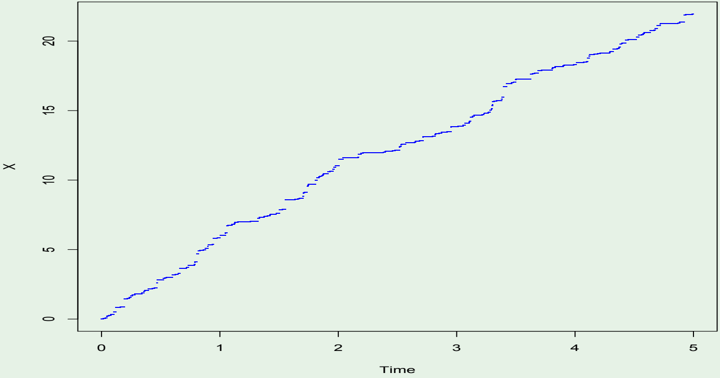
(2) $\int_{|z|\le 1} |z|\,\nu(dz) = \infty \Rightarrow J$ のパスは無限変動.

Examples of Lévy processes III

Example (Gamma process)

$$G_t \sim \Gamma(\alpha t, \beta), \quad \nu(dz) = \frac{\alpha}{z} e^{-\beta z}, \quad z > 0$$

$\alpha = 15, \beta = 1/3$



レヴィ型保険リスクモデル

保険の文脈では...

$$X_t = x + ct + \sigma W_t - J_t$$

J は**従属過程**とするのが自然：

$$\mathbb{E}\left[e^{isJ_t}\right] = \exp\left(t\int_0^\infty (e^{isz} - 1)\,\nu(dz)\right)$$

- ct: 確定的な収入の部分
- σW: 頻繁に起こるような小さなクレームや，収入のランダムネスを表現.
- J: 主として累積クレーム額のモデルだが，無限ジャンプ ($\lambda = \infty$) によって頻繁に起こる小さなクレームをモデリングしてもよい.

注意

$\lambda < \infty, \sigma = 0$ とすれば古典 (Lundberg) モデル． $\nu \equiv 0$ とすれば拡散近似モデル.

レヴィ型モデルに対する Gerber-Shiu 関数

- レヴィ型リスクモデル:

$$X_t = x + ct + \sigma W_t - J_t$$

ただし，J はレヴィ測度 ν をもつ従属過程とする．

- $c = (1+\theta)\mathbb{E}[J_1] = (1+\theta)\int_0^\infty z\,\nu(dz) < \infty$ (可積分性は仮定)
- Gerber-Shiu function:

$$\phi(x) = \mathbb{E}\left[e^{-\delta\tau_0} w(X_{\tau_0 -}, |X_{\tau_0}|)\mathbf{1}_{\{\tau_0<\infty\}} \middle| X_0 = x\right],$$

再生型方程式

Theorem (Biffis and Morales (2010))

$\theta > 0$ と適当な正則条件のもとで,

$$\phi(x) = \phi * \widetilde{G}_\rho(x) + \left[\widetilde{H}_\rho(x) + w(0,0)e^{-\rho x}\int_x^\infty k(y)\,dy\right]$$

ただし，ここに，$k(u) := cD^{-1}e^{-cD^{-1}u}$; $D := \sigma^2/2$;

$$\widetilde{G}_\rho(x) := \frac{1}{c}\int_0^x \int_0^y e^{-\rho(y-s)}k(y-s)\left[\int_s^\infty e^{-\rho(z-s)}\,\nu(dz)\right] ds\,dy$$

$$\widetilde{H}_\rho(x) := \frac{1}{c}\int_0^x e^{-\rho(x-s)}k(u-s)\int_s^\infty e^{-\rho(z-s)}K_\nu(z)\,dzds$$

$$K_\nu(z) := \int_z^\infty w(z, y-z)\,\nu(dy).$$

ρ は以下の *Lundberg* 方程式の非負の解である:

$$\log \mathbb{E}\left[e^{\rho(X_1 - x)}\right] = \delta.$$

一般化 Gerber-Shiu 関数

- inf-依存型 (Biffis and Morales (2010)):

$$\overline{\phi}(x) = \mathbb{E}\left[e^{-\delta\tau_0} w(X_{\tau_0 -}, |X_{\tau_0}|, \underline{X}_{\tau_0 -}) \mathbf{1}_{\{\tau_0 < \infty\}} \middle| X_0 = x\right],$$

ただし,

$$\underline{X}_t := \inf_{s \le t} X_s$$

- 全パス依存型 (Feng and S. (2013)):

$$\underline{\phi}(x) = \mathbb{E}\left[\int_0^{\tau} e^{-\delta t} V(X_t)\, dt \middle| X_0 = x\right],$$

e.g.,

$$V(x) = w(0,0)\Delta_0(x) + \int_x^{\infty} w(x, z - x)\, \nu(dz)$$

とおくと $\underline{\phi}(x) = \phi(x)$ (Gerber-Shiu function).

Finite-time Gerber-Shiu function

- Kuznetsov and Morales (2014):

$$\phi_1(x, t) := \mathbb{E}\left[e^{-\delta\tau_0} w(X_{\tau_0-}, |X_{\tau_0}|)\mathbf{1}_{\{\tau_0<t\}} | X_0 = x\right]$$

$w \equiv 1, \delta = 0$ とすると,

$$\phi_1(x, t) = \mathbb{P}(\tau_0 < t | X_0 = x) \quad \text{(finite time ruin probability)}$$

- Garrido et al. (2013):

$$\phi_2(x, t) := \mathbb{E}\left[e^{-\delta(\tau_0\wedge t)} w\left(X_{(\tau_0\wedge t)-}, |X_{(\tau_0\wedge t)}|\right) | X_0 = x\right]$$

リスク尺度としてはこちらが良い？

$$\phi_2(x, t) = \phi_1(x, t) + \mathbb{E}\left[e^{-\delta t} w(X_{t-}, |X_t|)\mathbf{1}_{\{t\le\tau_0<\infty\}} | X_0 = x\right]$$

- このようなモデルの一般化はあくまでも一つの方向性であり，他の一般化もいろいろありうる．
- レヴィ過程のような**独立・定常増分性**は，Gerber-Shiu 解析において極めてよい性質．
- 応用研究・実証研究はまだまだこれから．
- 特に実証研究は，保険データがないので難しい...

信用リスク解析との接点

企業価値 (資産価値) のモデル: **幾何レヴィ過程**,

$$V_t := V_0 exp\left(ct + \sigma W_t - J_t\right),$$

- Madan and Schoutens (2008; J. of Credit Risk):
リスク管理で重要な点は突然に引き起こされる損失をいかに見積もるか，であり，このためのモデルとして，**"負のジャンプ"** を含む資産モデルを使うのは極めて合理的.
- Carr et al. (2002; J. of Business): 市場における多くの資産価格に対するモデルで，**無限ジャンプ** かつ **有界変動** $(\lambda = \infty, \sigma = 0, \int 1 \wedge |z|\,\nu(dz) < \infty)$ が示唆される.
- **デフォルト時刻**:

$$\tau_d := \inf\{t > 0 | X_t < d\}, \quad d \in \mathbb{R},$$

where $X_t := \log V_t$, $x := \log V_0$.
- Gerber-Shiu function の応用可能性！

信用リスクへの応用：CDS の価格付け

- ある会社の資産価値 $V = (V_t)_{t\geq 0}$ (幾何レヴィ過程)：

$$X_t := \log V_t, \quad x := \log V_0$$

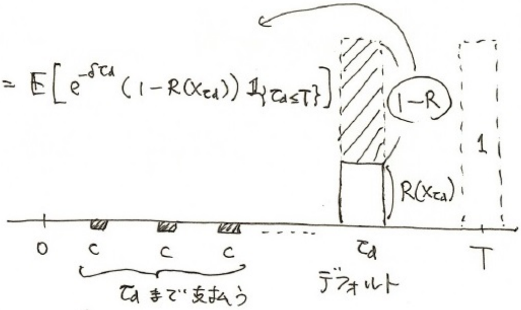
- デフォルト時刻 τ_d：

$$\psi(x,t) = \mathbb{P}(\tau_d \leq t) \quad (\text{デフォルト確率})$$

- 額面金額 1，満期 T の社債：デフォルト時の回収率 $R(X_{\tau_d})$
- Credit Default Swap
    - Protection buyer：回収不能額 $(1 - R(X_{\tau_d}))$ に対して "保険" をかける.
    - Protection seller："プレミアム" (料率 c) を受け取り，デフォルト時に $(1 - R(X_{\tau_d}))$ を支払う.
- c はいくらにすべきか？

Protection buyer のキャッシュフロー

$$PV_{loss} = \mathbb{E}\left[e^{-\delta\tau_d}(1-R(X_{\tau_d}))\,\mathbb{1}_{\{\tau_d \le T\}}\right]$$



連続的に支払うと…

$$PV_{fee} = \mathbb{E}\left[c\cdot\int_0^{\tau_d\wedge T} e^{-\delta s}\,ds\right]$$

CDS プレミアム

- Expected premium:

$$PV_{fee} := \mathbb{E}\left[c\int_0^{\tau_d\wedge T} e^{-\delta s}\,ds\right]$$

- Expected loss:

$$PV_{loss} := \mathbb{E}\left[e^{-\delta\tau_d}(1-R(X_{\tau_d}))\mathbf{1}_{\{\tau_d\le T\}}\right]$$

- $PV_{fee} = PV_{loss}$;

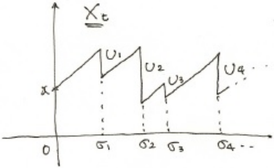
$$c = \frac{\mathbb{E}\left[e^{-\delta\tau_d}(1-R(X_{\tau_d}))\mathbf{1}_{\{\tau_d\le T\}}\right]}{r^{-1}\mathbb{E}\left[1-e^{-\delta(\tau_d\wedge T)}\right]}$$

- Finite-time Gerber-Shiu function!

統計的推測理論

- **実務への応用には不可避の問題!**
- 古典モデルなら...
  - **データ：** $U_1, U_2, \ldots, U_{N_T}$
  - $\widehat{\lambda} = \dfrac{N_T}{T}$, $\widehat{F}$: MLE, empirical, ...
- 一般化リスクモデルでは？
  - ブラウン運動は連続的に観測不可 $\Rightarrow$ 離散観測？
  - J が無限ジャンプを持つ時 $\Rightarrow$ すべてのジャンプは観測不可
  - 信用リスクの文脈なら，全て離散的な観測
- S. (2011a,b), S. and Zhang (2014) など.

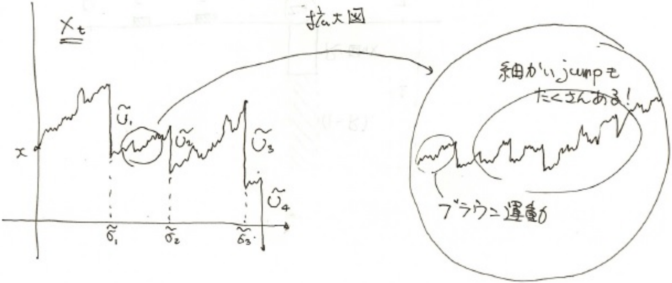
古典モデル



パスは全て観測可とみなせる。

データ: $(U_1, \sigma_1), (U_2, \sigma_2) \dots (U_n, \sigma_n)$

レヴィ型モデル



⇒ 連続的な観測は不可!!

データ: $(\tilde{U}_1, \tilde{\sigma}_1), \dots$

$\oplus$

$\{X_{t_1}, X_{t_2}, \dots X_{t_n}\}$
離散観測.

Part V

まとめ

まとめ

- Ruin Theory は Gerber-Shiu **解析**へと発展し，破産確率から脱却．様々な破産リスク評価が可能となった．
- リスクモデルや Gerber-Shiu 関数の一般化によって，信用リスクなど，ファイナンスの問題への直接の応用も可能となり，より複雑な**デフォルト・リスク解析**が可能となってきた．
- 統計理論の必要性 (実務で不可避)．**確率過程の統計学**.
- さらなる応用研究，実証研究が必要．

Bibliography I

[1] Applebaum, D. (2004). *Lévy processes and stochastic calculus*. Cambridge University Press, Cambridge.

[2] Asmussen, S and Albrecher, H. (2010). *Ruin probabilities*. 2nd. ed. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ.

[3] Bertoin, J. (1996). *Lévy processes*. Cambridge University Press, Cambridge.

[4] Biffis, E. and Morales, M. (2010). On a generalization of the Gerber-Shiu function to path dependent penalties. *Insurance: Math. Econom.*, **46**, no. 1, 92–97.

[5] Cai, J.; Feng, R. and Willmot, G. E. (2009). On the expectation of total discounted operating costs up to default and its applications. *Adv. in Appl. Probab.*, **41**, no. 2, 495–522

[6] Cai, J.; Feng, R. and Willmot, G. E. (2009). The compound Poisson surplus model with interest and liquid reserves: analysis of the Gerber-Shiu discounted penalty function. *Methodol. Comput. Appl. Probab.*, **11**, no. 3, 401–423.

[7] Cont, R. and Tankov, P. (2004). *Financial modelling with jump processes*. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL.

[8] Dufresne, F. and Gerber, H. (1991). Risk theory for the compound Poisson process that is perturbed by diffusion. *Insurance: Math. Econom.*, **10**, 51–59.

[9] Eisenberg, J. and Schmidli, H. (2011). Minimising expected discounted capital injections by reinsurance in a classical risk model. *Scand. Actuar. J.*, 2011, no. 3, 155–176.

[10] Embrechts, P. and Klüppelberg, C. (1993). Some aspects of insurance mathematics. *Theory Probab. Appl.*, **38**, no. 2, 262–295.

Bibliography II

[11] Embrechts, P.; Klüppelberg, C and Mikosch, T. (1997). *Modelling extremal events*. Springer-Verlag, Berlin.

[12] Feng, R. and Shimizu, Y. (2013). On a generalization from ruin to default in a Lévy insurance risk model. *Methodol. Comput. Appl. Probab.*, **15**, (4), 773–802.

[13] Garrido, J. and Morales, M. (2006). On the expected discounted penalty function for Lévy risk processes. *N. Am. Actuar. J.*, **10**, no. 4, 196–217.

[14] Garrido, J. (2013). Is the finite-time Gerber-Shiu function a risk measure?. *The 17th International congress on Insurance: Mathematics and Economics*, July 1–3, 2013, Copenhagen, Denmark.

[15] Garrido, J.; Cojocaru, I. and Zhou X., (2014). On the finite-time Gerber-Shiu function, Preprint, Concordia University, Montreal, Canada.

[16] Gerber, H. U. and Shiu, E. S. W. (1998a). On the time value of ruin; with discussion and a reply by the authors. *N. Am. Actuar. J.*, **2**, no. 1, 48–78.

[17] Gerber, H. U. and Shiu, E. S. W. (1998b). Pricing perpetual options for jump processes. *N. Am. Actuar. J.*, **2**, no. 3, 101–112.

[18] Grandell, J. (1977). A class of approximations of ruin probabilities. *Scand. Actuar. J.*, 37–52.

[19] Grandell, J. (1991), *Aspects of risk theory*, Springer-Verlag.

[20] Huzak, M.; Perman, M.; Šikić, H. and Vondraček, Z. (2004). Ruin probabilities and decompositions for general perturbed risk processes. *Ann. Appl. Probab.*, **14**, no. 3, 1378–1397.

Bibliography III

[21] Kuznetsov, A. and Morales, M. (2014). Computing the finite-time expected discounted penalty function for a family of Lévy risk processes. *Scand. Actuar. J.*, no. 1, 1–31.

[22] Kyprianou, A. E. (2006). *Introductory lecture notes on fluctuations of Lévy processes with applications*. Springer-Verlag, Berlin.

[23] Mikosch, T. (2009). *Non-life insurance mathematics*. 2nd. ed., Springer-Verlag, Berlin.

[24] Rolski, Schmidli, Schmidt and Teugels (1999), *Stochastic Processes for Insurance and Finance*, John Wiley & Sons.

[25] Sato, K. (1999). *Lévy processes and infinitely divisible distributions*. Cambridge University Press, Cambridge.

[26] 清水 泰隆 (2011a). 危険理論における Gerber-Shiu 関数と統計的推測. 統計数理, **59**, no. 1, 105–124.

[27] Shimizu, Y. (2011b). Estimation of the expected discounted penalty function for Lévy insurance risks. *Math. Method of Statist.*, **20**, no. 2, 125–149.

[28] Shimizu, Y. and Zhang, Z. (2014). Estimating Gerber-Shiu functions from discretely observed Lévy driven surplus, preprint, *submitted*.

[29] Trufin, J.; Albrecher, H. and Denuit, M. M. (2011). Properties of a risk measure derived from ruin theory. *The Geneva Risk and Insurance Review*. **36**, 174–188.