
研究論文

年金リスクを内包した企業の最適資本構成モデル

川上 高志*

木島 正明†

湯前 祥二‡

2006年12月21日投稿

2007年2月16日受理

概要

近年、多額の年金積立不足を抱える企業にとって、積立不足の問題は非常に重要になってきている。なぜならば、年金の積立不足は母体企業のバランスシートに負債として計上され、場合によっては事業活動で獲得した利益から追加的な拠出を迫られることがあり、母体企業の財政状態・損益計算に大きな影響を与えかねないからである。本稿では、年金基金の財政状態を加味した母体企業の最適資本構成モデルを提示し、それを用いて年金資産の運用リスク（以下、年金リスク）が資本構成に及ぼす影響について分析する。具体的には、金融工学における条件付請求権アプローチを用いて、閉じた形で年金リスクを内包する最適資本構成を表現し、年金リスクに関連するファクターが母体企業の資本構成に及ぼす影響を与えるのかについて比較静学を行なう。また、年金リスクを考慮していない既存モデル（Leland [1994]）が示す結果と比較することで、年金リスクの重要性を検証する。

キーワード 年金リスク、最適資本構成、条件付請求権アプローチ

1. はじめに

多くの企業にとって企業年金の積立不足が重大な問題になってきている。年金債務は、従業員が過去の労働を提供したことに対して退職時以降に支給される給付のうち、認識時点までに発生している債務と定義される。年金債務は従業員に対する労働債務であり、企業にとって将来支払わなければならない負債であるという点では、社債やローンなどの通常の事業負債と何ら変わりはない。一方、年金債務と一般の事業債の相違点は、前者は長期的な負債であり、後者よりも支払いの時期や金額に関して確定性の弱い債務であるということである。このような長期的かつ確定性の弱い債務に必ずしもすべてを拠出しておく必要性はないという考え方から、これまで多くの企業では積立不足（年金債務が年金資産価値を上回る）の状態がしばしば見受けられた。これに対して、近年、退職給付会計制度の改正が実施され、企業年金の積立不足が存在する場合には積立不足額を母体企業のバランスシートに負債として計上することが義務づけられた。積立不足が負債として認識される結果、いわゆる隠れ債務が顕在化し、企業の財政悪化が表面化することになる。

*ニッセイ基礎研究所 金融研究部門 〒102-0073 東京都千代田区九段北4丁目1番7号 九段センタービル
email:kawakami@nli-research.co.jp

†首都大学東京 大学院 社会科学研究所/京都大学 大学院 経済学研究科 大和証券グループ寄附講座
〒192-0397 東京都八王子市南大沢1-1 email:kijima@center.tmu.ac.jp

‡法政大学 経済学部 現代ビジネス学科 〒194-0298 東京都田町市相原町4342 email:yumae@hosei.ac.jp

実際、多額の積立不足は企業の存続に大きな影響を与え得る。たとえば、年金積立の原資となるのは母体企業が事業活動から獲得した収益であるが、過度の積立不足がある状況では、本来は将来の投資や配当に回すべき事業収益が拠出に充てられ、その結果企業価値が損なわれることになる。加えて、市場において積立不足が企業に重大な影響を与えるものと判断されれば、株価が下がり資本価値が侵食される。このような事業収益の減少や債務の増大による財務リスクの上昇の結果、企業の格付けが大幅に下落する可能性がある。したがって、多額の年金積立不足を放置しておけば、企業は甚大な損失を被ることにつながりかねない。過度の積立不足を抱える企業は、年金基金の財務状態が母体企業の経営に支障をもたらす前に、できる限り早期に積立不足を解消すべきであるといえる。

幾つかの企業では、積極的に年金の積立不足の解消に乗り出している。たとえば、2005年5月に米国自動車大手のゼネラル・モーターズは、起債により調達した資金の大半を年金資産へ拠出し、年金債務の圧縮を図った。日本でも、日産自動車が約2,300億円を起債によって調達し、獲得した資金を退職給付信託として設定した。すべての企業がゼネラル・モーターズや日産自動車のような財務戦略をとることは難しいかもしれないが、少なくとも企業財務と年金財務の関係を熟慮して資本構成を考えるべきである。絶えず変化する株式市場や債券市場などの経済環境の中で、年金基金の財務状況と母体企業の財務状況には密接な関係があり互いに影響を及ぼし合っている。したがって、企業の財務戦略や年金政策においても互いの影響を考慮すべきである。たとえば、企業が資本構成を構築する際には、年金基金の財政状態、特に母体企業にとって債務化し得る積立不足の状況を考慮する必要があるといえよう。

ファイナンスの理論研究においても、コーポレートファイナンスと年金リスクを関連付けた研究は従来から行われてきている。最も単純なものはMM理論を適用したモデルによる研究である。税金も倒産コストも存在しない世界では、母体企業の資本構成は年金の資産配分には一切依存しない。つまり、どのように株式と債券をミックスさせて年金資産を運用しようとも、株式と債券の市場価値は等しいので年金資産の価値は不変となり、年金リスクも変動しないため、母体企業の資本構成は影響を受けないのである。

しかし、税金や倒産コストが存在するという仮定の下では状況は変わってくる。たとえば、Sharpe [1976] や Treynor [1977] は、倒産リスクを考慮した場合、年金資産を株式で運用することで資本価値（あるいは企業価値）を高めることができると結論付けている。Black [1980] や Tepper [1982] は、税金が存在する時、倒産リスクの低い企業は年金基金への積立を積極的にを行い、債券重視の運用を行うべきであると主張している。これは、課税されるか否かという税務上の相違によって、債券の収益に対する節税効果が年金運用リターンを高めるからである。さらに、Harison and Sharpe [1983] は、これらの研究を踏まえて、倒産リスクが高い企業は年金資産をすべて株式で運用し、倒産リスクの低い企業はすべて債券で運用するのが合理的であるとしている。一方、Bicksler and Chen [1985] は、税法上の税効果享受できる範囲が限定されるので、株式と債券の最適なミックスが存在するということを主張している。

このように、MM理論あるいはMM理論を拡張したフレームワークの中で、企業財務と年金基金の関係に焦点を当てた研究が1980年代半ばまで行われてきたが、より最近になると、Bodie [1990] がオプション理論を取り入れ、年金のサープラスを年金資産を原資産、年金債務を行使価格とするプットオプションとして定式化した。母体企業からすると積立不足があるときには追加拠出という形で負債を持っている状態にあり、このプットオプションを最小化するような資産運用が最適であると述べている。オプション理論を組み入れることで年金基金への拠出と企業価値

の関係をうまく記述している。

他方で、Black and Scholes [1973] によるオプション価格理論を発展させて、コーポレートファイナンスの諸問題を分析する研究が増加している。資本構成に関連する初期の代表的な研究としては、Merton [1974] と Black and Cox [1976] がある。Merton モデルでは、発行済み負債が満期を迎えた時点のみで企業は倒産するという仮定の下で負債価値の評価を行っているが、Black-Cox のモデルは Merton モデルの欠点を補完し、負債の満期以前に倒産が起こり得るというモデルに修正した。しかし、両方のモデルとも倒産の閾値は外生的に与えられるという点で企業の最適資本構成を導いていない。この問題に対して、Leland [1994] や Leland and Toft [1996] は、倒産の閾値を内生的に決定するような最適資本構成モデルを提示した。これらの論文では、最適資本構成に関して解析的な解を与えることで、比較的簡単に資本構成の分析を可能にしている。

企業の資本構成を取り扱う場合に金融工学の手法を扱う利点として、最適なレバレッジ比率や信用スプレッドを定量的に評価し、資本構成の諸問題をより具体的に分析できるという点が挙げられる。ただし、Leland [1994] など、いわゆる構造モデルが示す信用スプレッドは、実際に観測されるスプレッドよりも低い値を示すことが指摘されている。Eom et al. [2004] は、モデルが示す理論的なスプレッドと観測されるスプレッドに相違をもたらす原因として、信用リスクのほか、エージェンシー問題や流動性、財務制限条項の存在などを取り上げ、これらの要因がスプレッドにどの程度寄与するのかを分析している。年金の積立不足は母体企業の財政状態に大きく影響し、財務リスクを高める可能性があることを鑑みると、観測スプレッドとモデルが示すスプレッドの乖離をもたらす要因に年金リスクも関与していると考えられる。本稿では、構造モデルのこのような欠点を年金リスクの観点から考察する。

本稿では、Leland [1994] のモデルを拡張し、母体企業のバランスシートに年金基金の財政状態を組み入れた最適資本構成モデルを提示する。条件付請求権アプローチを用いて、母体企業の資産と年金基金の金融資産を2つの原資産とみなし、事業負債や年金負債をそれらの派生証券として評価する2ファクターモデルを考える。母体企業と年金基金の関係を母体企業から年金基金への抛出、年金資産の運用状況や負担する年金債務などを通して定式化し、年金リスクを反映した最適資本構成を考察する。本稿が示すアプローチは、企業財務と年金財務にまたがる統合的な年金リスク研究の発展に寄与するであろう。

本稿の構成は次の通りである。第2節では、本稿のモデルの前提となる仮定について述べる。第3節では、企業資産と金融資産を原資産とした派生証券としてバランスシートの負債側を評価し、年金基金の財政状態を反映させた最適資本構成モデルを構築する。第4節では、本モデルを用いて比較静学を行い、各々のファクターが年金リスクを考慮した最適資本構成に与える影響について考察する。さらに、Leland [1994] の数値例と比較することで、年金リスクが母体企業の資本特性を考える上で重要であることを示す。第5節において本稿のモデルの問題点と拡張の可能性を述べる。

2. モデルの構築

本節では、年金リスクを組み入れた企業の最適資本構成モデルを構築する。提示するモデルは、Leland [1994] や Leland and Toft [1996] と同様に、トレードオフ理論¹に基づいた最適資本構成

¹トレードオフ理論の基本的な考え方は、負債利用による税効果利益と倒産コストが均衡する場合に最適な資本構成が決定されるというものである。負債によるメリットとしての税効果利益は、負債利子の支払いは税法上損金算入が認められるため、これによる節税効果が企業価値を高める効果を持つ。一方、負債のデメリットとしての倒産コストは、

モデルを基本とする。従来の最適資本構成モデルと異なる特徴は、母体企業の資本構成だけでなく、その年金基金の資産と負債も評価に組み入れる点である。これにより、年金リスクが企業の最適資本構成に与える影響を検討することができる。

最初に、モデルの前提となる仮定について説明する。現在の年金制度はかなり複雑であり、標準的な分析の枠組みも定まっていない。たとえば、企業が流動化する際に、どのように残余財産を一般の債権者と年金基金の加入者に分配すべきかなどは明確ではない。また、現状の年金制度は加入者に対する年金債務の算定において複数の方法を認めている。本稿では、現行の年金制度の複雑な部分に関しては考慮せず、実際の制度から乖離しない程度に単純化したモデルの構築を試みる。

仮定 1: 金融市場は無裁定かつ完備であり、取引は無限の期間にわたり連続的に行われるとする。よって、割引価格過程がマルチンゲールとなるようなリスク中立確率測度が 1 つ存在する。

本稿を通じてリスク中立確率測度を Q と定義する。仮定 1 から、すべての条件付請求権の価格はリスク中立確率測度による期待値で求められる。確率空間 (Ω, \mathcal{F}, Q) を固定し、生成されるフィルトレーション $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ は通常条件を満たすとする。また、一定の金利 r を支払う無リスクな資産が存在すると仮定する。

Leland [1994] と同様に、企業の資産価値は定数のボラティリティ項を持つ拡散過程に従うとする。しかし、本稿のモデルでは、年金基金への母体企業の拠出額は企業の事業活動から得た収益か、あるいは企業が保有する資産の一部を売却することにより捻出されるので、企業資産を年金基金へ拠出する前と拠出した後の価値に分けて評価する必要がある。

仮定 2: 拠出前の企業資産価値の変動は企業の資本構成に影響されない。すなわち、年金基金への拠出額を除いてレバレッジの選択に関連するキャッシュアウトフローは新株発行によって調達される²。

X_t を時点 t における母体企業の拠出前の企業価値とする。仮定 1 と仮定 2 より、 X はリスク中立確率測度 Q の下で以下の幾何ブラウン運動に従う。

$$\frac{dX_t}{X_t} = rdt + \sigma_1 W_t^1, \quad t \geq 0 \quad (1)$$

ただし、 r はリスクフリーレート、 σ_1 はボラティリティ、 W_t^1 は Q の下での標準ブラウン運動である。 r と σ_1 はいずれも定数とする。

次に、年金基金への拠出後の企業資産価値を V_t と定義する。母体企業は連続的に γ を年金基金へ拠出すると仮定すれば、時点 t までの累積的な拠出額は γt となる。よって、拠出後の企業資産価値は

$$V_t = X_t - \gamma t, \quad t \geq 0 \quad (2)$$

過度の負債借入によって企業の倒産リスクが上昇し企業価値を低下させるように作用する。このように、トレードオフ理論では、節税効果と倒産コストの最適均衡において最適な資本構成が定まる。

²この仮定の妥当性については Leland [1994] を参照のこと。本稿では、年金拠出が資本構成に及ぼす影響に焦点を当てているので、拠出額とその他のペイアウトを区別している。

で与えられる³。

仮定 3：年金資産は金融資産で運用される。金融資産は株式インデックスと無リスク資産（債券）の2つのみとする。

金融市場における株式インデックスの時点 t の価格を S_t とする。リスク中立確率測度の下で S_t は以下の幾何ブラウン運動に従うと仮定する。

$$\frac{dS_t}{S_t} = rdt + \sigma_2 W_t^2, \quad t \geq 0 \quad (3)$$

ただし、 σ_2 はボラティリティ、 W_t^2 は Q の下での標準ブラウン運動である。さらに、 W_t^1 と W_t^2 は相関係数 ρ を持つ、すなわち $dW_t^1 dW_t^2 = \rho dt$ と仮定する。一方、無リスク債券 B_t の変動は

$$\frac{dB_t}{B_t} = rdt, \quad t \geq 0 \quad (4)$$

であるとする。

年金基金は、株式インデックスに対して α 、無リスク債券に対して $1 - \alpha$ の割合で投資するとする。ただし α は定数であり、 $0 \leq \alpha \leq 1$ である。株式インデックスと無リスク債券で構成されるポートフォリオの収益率は両者の収益率の加重平均となるので、 Q の下での金融ポートフォリオの変動は

$$\frac{dY_t}{Y_t} = rdt + \alpha \sigma_2 dW_t^2, \quad t \geq 0 \quad (5)$$

で与えられる。

仮定 4：年金給付に関して確定給付型年金を想定し、連続的に一定数が加入し、それと同数が退職して、加入者の年齢構成は一様であるとする。加入者は、退職時に年金原資を一時金で受け取り、一時金の総額は p とする。

年金には大別して、確定給付型と確定拠出型があるが、ここでは確定給付型の年金を想定する。確定拠出型の年金では、年金資産の運用の成否はすべて受給者に帰属するので、積立不足が生じても母体企業が不足額を負担する義務はない。一方、確定給付型年金の場合、受給者は基本的に契約上の給付額を受けられるので、年金リスクを最終的に負担するのは受給者ではなく企業の所有者である株主である。したがって、運用の結果は、年金基金への追加的な拠出、間接的には市場において株価が評価を受けることによって企業価値に反映される。

$M(t)$ を時点 t における母体企業から年金基金への総拠出額とする。退職給付額の支払いが一様であるという仮定 4 の下で、年金債務を PBO とすると⁴、

$$\gamma = M(t) = p \quad (6)$$

となる。詳細については付録 A を参照されたい。なお、本稿では、より一般的な状況も含めて分析するため、 γ と p が異なる場合を考慮する。

³倒産時点における拠出後の企業資産価値 $V_T = X_T - \gamma T$ は正の確率で負になることに注意されたい。ただし、 V_T が負になる確率は大きくなく、本稿の数値例で考えた現実的なパラメータの範囲では、 V_T が負になる確率は無視できる程度である。本稿では、モデルを解析的に表すという実用性の観点からこれを容認する。

⁴PBO の詳細については文献 [1] を参照されたい。

一方、一定の期間にわたって設定される年金政策に基づいて、年金基金は母体企業から拠出額 γ を享受する。したがって、時点 t までの両者の累積的な価値は $(\gamma - p)t$ となるので、年金資産価値 A_t は

$$A_t = Y_t + (\gamma - p)t, \quad t \geq 0 \quad (7)$$

と表される。

仮定 5：母体企業に倒産事由が発生した場合のみ企業の流動化は起こるとする。株主価値の観点から、株主自らが倒産政策を決定する。倒産の閾値は資本価値を最大化するように内生的に定められる。

本稿のモデルでは、拠出前の企業資産価値 X_t がある倒産の閾値 X_B に最初に達した時点で企業は倒産すると考える。したがって、デフォルト時刻は

$$\tau = \inf\{t : X_t = X_B\} \quad (8)$$

と定義される。

仮定 6：倒産時の残余請求権については、年金資産の残余価値は年金加入者のみが請求権を持ち、事業資産の残余価値に関しては債権者のみが請求権を持つとする。

倒産時には株主と債権者は負債の再交渉は行わず、企業は即座に残余財産を分配して清算される。流動化時の残余財産に対する請求権に関して、年金基金の加入者は年金資産のみに対して請求でき、母体企業の企業資産にまで請求権は及ばない。最後の仮定として、

仮定 7：企業が発行する事業負債は利払い額 c の永久債である。

3. 負債の評価と最適資本構成

拠出前の企業資産価値 X_t と金融ポートフォリオ Y_t を原資産とする派生証券として事業負債と年金負債などを評価する。資本価値はトレードオフ理論に基づいて算定する。最適資本構成の決定の際、最適な倒産の閾値は資本価値を最大化するように決定し、最適な利払い額は総企業価値を最大化するように定める。

これらの負債価値を評価するためには、デフォルト時刻 τ の初到達密度関数およびデフォルト時刻と倒産時の金融資産の価値 Y_τ の同時密度関数を求める必要がある。以下の価値評価で必要となる結果については付録 B にまとめた。

まず、事業負債価値を D とする。仮定より企業は利払い額 c の永久債を発行する。また、事業負債の回収率を定数 θ とおくと、流動化時点 τ における債権者にとっての回収可能額は θV_τ である。したがって、事業負債価値 D は、ラプラス変換を $\mathcal{L}(r) = E[e^{-r\tau}]$ とすると、

$$\begin{aligned} D(X_0) &= E \left[\int_0^\tau e^{-rs} cds \right] + E[e^{-r\tau} \theta V_\tau] \\ &= \frac{c}{r} (1 - E[e^{-r\tau}]) + \theta E[e^{-r\tau} (X_B - \gamma\tau)] \\ &= \frac{c}{r} (1 - \mathcal{L}(r)) + \theta \{ X_B \mathcal{L}(r) - \gamma \mathcal{L}'(r) \} \end{aligned}$$

のように評価される。第1項は企業が倒産するまでの利払い総額の期待割引現在価値であり、第2項は倒産時の期待回収可能額を意味する。ラプラス変換に関する付録Bの結果(26), (27)から、

$$\mathcal{L}(r) = \left(\frac{X_0}{X_B}\right)^{-H_X}, \quad \mathcal{L}'(r) = -\frac{2}{\sigma_1^2} \left(\log \frac{X_0}{X_B}\right) \mathcal{L}(r); \quad H_X = \frac{2r}{\sigma_1^2}$$

である。したがって、

$$D(X_0) = \frac{c}{r} - \left(\frac{c}{r} - \theta X_B + \frac{2\theta\gamma}{\sigma_1^2} \log \frac{X_0}{X_B}\right) \left(\frac{X_0}{X_B}\right)^{-H_X} \quad (9)$$

が得られる。ただし $H_X = 2r/\sigma_1^2$ である。

次に、年金負債価値を L とする。事業負債価値と同様、母体企業が倒産に至るまで、仮定4により、年金基金から連続的に p の一時金が支払われる。一方、企業が倒産した場合には、年金の加入者は倒産時の年金資産 A_τ に対して残余財産請求権を持つ。したがって、年金負債の価値は

$$\begin{aligned} L(X_0, Y_0) &= E \left[\int_0^\tau p e^{-rs} ds \right] + E[A_\tau e^{-r\tau}] \\ &= \frac{p}{r} [1 - \mathcal{L}(r)] + E[Y_\tau e^{-r\tau}] - (\gamma - p)\mathcal{L}'(r) \end{aligned} \quad (10)$$

と評価される。ふたたび付録Bの結果を使うと、年金負債の価値は

$$L(X_0, Y_0) = \frac{p}{r} - \left(\frac{p}{r} - \frac{2(\gamma - p)}{\sigma_1^2} \log \frac{X_0}{X_B}\right) \left(\frac{X_0}{X_B}\right)^{-H_X} + Y_0 \left(\frac{X_0}{X_B}\right)^{-(H_Y)_+} \quad (11)$$

となる。ただし、変量 $H_Y = H_X + \frac{2\alpha\sigma_2\rho}{\sigma_1} - 1$ および関数 $(x)_+ = \max\{x, 0\}$ を使用した。

倒産コスト BC に関して、企業の流動化時には、外部に流出する倒産コストとして $(1 - \theta)V_\tau$ が発生する。よって、倒産コストの価値は以下のように評価できる。

$$BC(X_0) = E[e^{-r\tau}(1 - \theta)V_\tau] = (1 - \theta)\{X_B\mathcal{L}(r) + \gamma\mathcal{L}'(r)\} \quad (12)$$

税効果利益 TB については、事業負債の利払い額 c だけでなく、年金基金への拠出額 γ に対しても節税効果が認められるとする。法人税率を i とすれば、企業は倒産するまで $i(c + \gamma)$ の節税効果を楽しむことができる。したがって、税効果利益の価値は

$$TB(X_0) = E \left[\int_0^\tau e^{-rs} i(c + \gamma) ds \right] = \frac{i(c + \gamma)}{r} (1 - \mathcal{L}(r)) \quad (13)$$

となる。

最後に、資本価値 E を評価する。本稿のモデルでは、トレードオフ理論に基づいた最適資本構成を想定している。したがって、従来のトレードオフ理論モデルと同様に、企業資産価値に倒産コストや税効果利益を加減して資本価値を導く。さらに、このモデルでは、年金資産運用の成果が直接資本価値に反映されるとしている。確定給付型の年金では、あらかじめ定められていた契約により給付額は一定である。年金基金の財政が悪化した時には、母体企業が基金へ資産を拠出して補填する。また、積立不足が生じる場合、母体企業は積立不足を債務として認識し、バランスシートの負債側に計上する。このように、受給者が積立不足を負担するのではなく、企業の所有者である株主が年金資産の運用結果に責任を負うのである。本稿のモデルでは、年金基金に余剰がある

場合には母体企業のバランスシート上に認識されない⁵が、不足が生じた時には負債としてみなされ、積立不足の価値を資本価値から控除することになる。この場合の年金債務の積立不足は年金債務の市場価値 L と年金資産価値 A の差額とする。このような仮定の下では、 $V_0 = X_0$, $A_0 = Y_0$ なので、資本価値は

$$E(X_0, Y_0) = X_0 + TB(X_0) - D(X_0) - BC(X_0) - \max[L(X_0, Y_0) - A_0, 0] \quad (14)$$

と表される。一方、総企業価値 v は資本価値と事業負債価値の合計として、

$$v(X_0, Y_0) = E(X_0, Y_0) + D(X_0) \quad (15)$$

で与えられる。

以上の準備の下、最適資本構成を導く倒産水準と事業負債の利払い額を決定する。最適な倒産の閾値は、企業の所有者である株主が自らの持分価値となる資本価値を最大化するように決める。つまり、最適な倒産水準 X_B^* はバリューマッチング条件 $E(X_B, Y_0) = 0$ とスムーズペースティング条件 $\frac{\partial E(X_B, Y_0)}{\partial X_B} = 0$ から導くことができる。ここでは、積立余剰の状態 $Y_0 > L(X_0, Y_0)$ と積立不足の状況 $Y_0 \leq L(X_0, Y_0)$ に分けて計算する。積立余剰の場合には、最適な倒産閾値は

$$X_B^* = \frac{(c - \gamma) - i(c + \gamma)}{r + \sigma_1^2/2} \quad (16)$$

となり⁶、積立不足の場合、 $H_Y < 0$ ならば

$$X_B^* = \frac{c - i(c + \gamma)}{r + \sigma_1^2/2} \quad (17)$$

$H_Y \geq 0$ ならば

$$X_B^* = \frac{c - i(c + \gamma) - YH_Y\sigma^2/2}{r + \sigma_1^2/2} \quad (18)$$

となる。最適な倒産の閾値が得られれば、これを総企業価値に代入し、利払い額 c に関して総企業価値が最大になるように c^* を決定する。このように、最適な倒産水準 X_B^* と利払い額 c^* が求まれば、企業の最適資本構成が決定される。

4. 数値計算の結果と考察

4.1 基本ケース

本節では、各々の要因が母体企業及び年金基金の財政状態に与える影響を考察する。ここで取り上げる数値例に関して、基本ケースのパラメータを次のように設定する。初期時点における拠出後の企業資産価値を $X_0 = 100$ 、初期時点の金融資産価値を $Y_0 = 20$ とする。リスクフリーレートを $r = 0.03$ 、企業資産価値のボラティリティを $\sigma_1 = 0.20$ 、株式インデックスのボラティリティを $\sigma_2 = 0.20$ と定める。企業資産価値と株式インデックスのプロセスは正負の相関を持つとして $\rho = 0.4$ と $\rho = -0.4$ の場合を考える。金融資産の構成は株式と債券にそれぞれ 50% ずつ投資すると考えて $\alpha = 0.5$ にする。母体企業から年金基金への拠出額および年金基金から払い出される

表 1: 基本ケースにおけるパラメータ設定

初期時点の企業資産価値	X_0	100	投資比率	α	0.50
初期時点の金融資産価値	Y_0	20	拠出額	γ	0.50
リスクフリーレート	r	0.03	退職給付額	p	1
企業資産価値のボラティリティ	σ_1	0.20	事業負債の回収率	θ	0.50
株式インデックスのボラティリティ	σ_2	0.20	法人税率	i	0.35
資産間の相関*	ρ	0.40			

* 企業資産価値と株式インデックスが負の相関を持つ場合には $\rho = -0.40$ とする。

退職給付額について、それぞれ $\gamma = 0.5$, $p = 1$ とおく⁷。この他、倒産時における企業資産の回収率を $\theta = 0.5$ 、法人税率を $i = 0.35$ と設定する。基本ケースのパラメータを表 1 にまとめた。

表 2 は母体企業の資産価値と株式インデックスファンドの相関が正である場合の資本特性の結果を示している。基本ケースでは、年金資産の価値が年金負債よりもおよそ 1.18 だけ上回り、積立率は 94.45% となっている。また、資本価値に対する退職給付の積立不足額が占める割合は 3.50% である。株主価値を最大化する最適資本構成においては、年金資産の積み立てはほぼ充足されているといえる。一般に、年金債務は長期かつ即座に返済を要さない確定性の弱い負債である。しかし、過度の年金不足は株主価値を大きく損なう可能性があり、多額の積立不足を抱える状態を回避することは株主の利益にとっても有益である。したがって、企業は退職給付の負担や積立不足が資本価値に及ぼす影響に基づいて積立計画を立てるべきである。

表 2 において母体企業の資本特性に目を向けると、基本ケースでは、最適財務レバレッジは 74.99% となり、他の静態的な資本構成モデルと同様に高い比率を示す。信用スプレッドは 100.65bp に達し、既存の構造モデルと比較すると高い水準である。この理由の一つとして、年金の積立不足を母体企業の負債として認識したことにより財務リスクが高まることが挙げられる。年金リスクまでも含めた場合、多額の積立不足を有する企業の倒産リスクは母体企業のみを考慮して算定された倒産リスクよりもかなり大きくなる可能性がある。

また、表 3 は相関係数が負である場合の資本特性の結果を示す。表 2 における基本ケースと比較すると、資本価値はほぼ同じであるのに対し、総企業価値は 134.73 から 127.28 へと減少している。最適レバレッジ自体はあまり目立った変化はなく、依然として 70% 以上の高い水準を維持している。積立率に関しては、年金負債価値が増加するので 94.45% から 85.95% に低下する。信用スプレッドは倒産リスクの上昇のため、約 20bp 以上増加していることがわかる。さらに、資本価値に対する積立不足の割合は 9.69% まで上昇し、資本価値への影響が顕著になる。

4.2 比較静学

表 2 と表 3 には比較静学の結果も付してある。まず最初に、リスクフリーレートを 0.02 から 0.05 に変化させた場合の影響について考察する。表 2 によると、リスクフリーレートの上昇によ

⁵ただし、平成 17 年度に改正された「退職給付に係る会計基準注解」において、年金資産に超過額が発生した時には母体企業の資産・利益へ計上することも容認された。この場合、年金余剰は受給者ではなく株主に帰属する。

⁶年金への拠出を考慮しない場合（すなわち $\gamma = 0$ ）、この結果は Leland [1994] の結果と一致する。

⁷Goldstein et al. [2001] では、キャッシュフローの観点から継続企業価値を金利・税金控除前の企業収益 EBIT と PER の積として考えている。彼らに従うと、企業価値が $V_0 = 100$ の設定の下で、企業の平均的な PER が 20 と想定すれば EBIT はおよそ 5 程度になる。また、年金費用が営業収益に占める割合が 10 数パーセントであることを考えれば、企業価値 100 に対して年金の拠出額は 0.5 あたりに設定するのが妥当である。

り資本価値は減少し事業負債価値は増加していることがわかる。資本価値の減少に対して事業負債価値は大幅に増加するので、総企業価値は単調的に増加する傾向がある。これにより、信用スプレッドは117.77bpから81.61bpへと減少している。年金負債価値について、本稿ではリスクフリーレートが年金債務の予定利率として用いられることを前提としているが、年金負債価値はリスクフリーレートに対して感応的であり、単調的に減少する。このため、リスクフリーレートが上昇すると積立率は81.38%から126.01%へと大きく上昇する。資本価値に対する積立不足の比率に関しても、 $r = 0.02$ では積立不足が自己資本の12.44%に相当するのに対して、 $r = 0.05$ では積立余剰に転じ、自己資本価値の13.57%まで改善される。相関が負の場合にも同じような傾向が見られるが、表3によると積立率は65.26%から119.17%、信用スプレッドは162.36bpから81.62bpとなり、リスクフリーレートの変化の影響はより大きくなる。このほか、 $r = 0.02$ の時には年金負債価値が年金資産価値を大きく上回り、積立不足が資本価値のおよそ40%を占めるようになる。低金利の経済環境の下で、その資産価値が景気動向と相反して変動するような企業では、年金の積立不足は自己資本を大幅に毀損することになる。本稿のモデルでは、リスクフリーレートは、リスク中立測度の下で企業の資産価値のドリフトだけでなく、年金資産の株式インデックスのドリフトに相当する。したがって、リスクフリーレートの変動は、母体企業の資産価値、株式市場や債券市場の状況を通じて、母体企業の財政状態に重大な影響を与える要因となる。

企業資産のボラティリティは母体企業、年金基金の資本特性に強く影響する。企業資産のボラティリティが上昇すると、総企業価値はあまり変化しないまま、資本価値が増加し事業負債価値は大きく減少していることがわかる。これには、株主が債権者の利益を犠牲にしてリスクの高い投資機会を選好する“資産の代替性”の問題が関与している可能性がある。年金負債価値も減少しているので、このことは株主と債権者の間だけでなく、株主と年金受給者の関係においても同じことがいえよう。債権者や年金受給者の利益を保護するためには、株主に対してリスクの高い投資を抑制するように働きかける必要がある。実際、資産の代替性が原因で債権者は企業への貸出しを抑制するためか、最適レバレッジは減少する傾向がある。事業負債価値が減少するので信用スプレッドは60.71bpから121.69bpに増加している。さらに、表3が示すように、相関が負の状況では信用スプレッドは一層拡大することがわかる。このように、総企業価値は低下し倒産リスクが高まることを踏まえると、母体企業にとって企業資産価値の変動リスクは望ましくないといえる。

一方で、株式インデックスのボラティリティは、資本特性に企業資産のボラティリティとは対照的な影響を与える。たとえば、株式インデックスのボラティリティが上昇すると、資本価値は低下し総企業価値が増加する。しかし、株式インデックスのボラティリティは企業資産のボラティリティほど資本特性に強い影響を与えていないようである。年金資産の変動リスクが母体企業にあまり強く影響しないのは、年金基金の破綻は直接的には企業の流動化に直結しないと想定しているためであろう。

次に、年金基金の資産配分を変更し、年金基金のアセットアロケーションが資本構成に与える影響について考察する。表2では、企業資産価値と株式インデックスに正の相関関係($\rho = 0.40$)を想定している。年金資産の資産配分を株式へシフトさせると、事業負債価値と総企業価値は増加する一方で、資本価値と年金負債価値は減少する傾向にある。しかし、企業資産価値と株式インデックスが負の相関($\rho = -0.40$)を持つ場合には、異なる結果が見られる。表3によると、株式投資へのシフトは、相関係数が正の場合とは反対に事業負債価値と総企業価値を低下させ、年金負債価値は増加する。このように、相関係数の符号が異なると、年金資産の資産配分について、

事業負債の債権者と年金受給者の利益は相反することになる。ただし、資本価値に関しては、相関係数の符号に関わらず、アセットアロケーションにおける株式の比重を高めれば、資本価値は常に減少している。ゆえに、本稿のモデルの仮定の下では、株主利益の観点からすると、債券投資へ重点を置くことが有益である。このように、年金資産の運用について責任を有する株主が、常に債券投資にインセンティブを持つので、正の相関の場合には年金受給者、負の相関の場合には債権者に有利に働く。

企業の資産価値と株式インデックスの相関は資本特性に大きな影響を与える。相関係数が1に近づくほど、母体企業の財政状態は良くなる傾向が見られる。数値例では、相関係数を負の値 $\rho = -0.8$ から正の値 $\rho = 0.8$ まで変化させた時の資本特性への影響について検討した。相関係数が大きくなると、事業負債価値と総企業価値は単調的に増加するが、年金負債価値は単調に減少する。資本価値については、単調的な変化ではなく相関係数の絶対値がゼロに近いほど大きくなる傾向がある。このように、株主、債権者、年金受給者の間で望ましい相関水準が異なることは興味深い。信用スプレッドは事業負債価値が低下するので 146.14bp から 98.06bp にまで縮小し、年金負債価値の低下に伴い積立率は 77.96% から 96.49% まで上昇する。

基本ケースでは、年金拠出は $\gamma = 0.5$ 、退職給付の支払額は $p = 1$ と設定していた。ここではそれらの値を変更して、拠出額及び退職給付額と資本特性の関係を考察する。ただし、相関の符号に関わらず、資本特性は拠出額と退職給付額の変化に対して同様の感応を示すので、以下では相関が正の場合についてのみ述べる。

追加的な拠出を行えば年金の積立不足は軽減されるので、積立不足による資本価値への侵食を防ぐことができ、企業価値の向上を図れると考えられる。しかし、本稿のモデルでは、年金資産が年金負債を上回ったとしても、年金の積立余剰を直接的に享受することはできないとしている。このため、株主は基金へ過剰な拠出を行うインセンティブを持たない。よって、理論的には、年金拠出の望ましい水準は、拠出による税効果を通じての総企業価値の増大と積立不足による資本価値の減損とのトレードオフの関係で決まると推測される。数値例では、年金拠出の増加により、事業負債価値は 95.73 から 102.08 へと増加し、総企業価値は 133.58 から 137.81 に増加している。ただし、資本価値には単調的な変化は見られず、拠出額の水準によって増減する。これは、資本価値は拠出による税効果利益の価値と年金の積立不足などが複雑に関係して決まるためと考えられる。税効果利益の価値は基金への拠出による節税効果によってかなり増加する。年金負債価値は基金の加入者に対する残余財産請求権の価値が高まることから 19.43 から 25.27 へと大幅に増加している。その結果として、積立率は 102.93% から 71.68% へと相対的に低下し、年金の積立不足あるいは余剰の資本価値に対する比率は 1.15% から -14.75% に低下する。

退職給付額が 0.5 から 1.5 へ変化した時、資本価値及び総企業価値は大幅に低下する。たとえば、資本価値は 37.01 から 22.03、総企業価値は 138.28 から 126.70 へと減少している。年金負債価値が 17.74 から 27.90 へと増加することで、年金の積立不足の資本価値に対する比率は -35.86% にまで達する。信用スプレッドは 80.43bp から 122.38bp へと拡大し、最適レバレッジはおおよそ 10% 上昇している。よって、多額の退職給付の支払い義務を有する場合、母体企業の財政状態はかなり悪化する可能性がある。年金負債の増加によって積立率は 142.44% から 71.68% へと大幅に低下している。多額の退職給付が年金資産から払い出されるので、年金資産価値の低下が年金負債価値よりも大きく低下し、これが積立率の低下と積立不足/資本価値比率の悪化をもたらす。

年金資産は金融資産から成り、母体企業からの拠出で増加する。表 2 と表 3 によれば、年金基金がより多くの金融資産を保有するほど、資本価値、事業負債価値、総企業価値のいずれも増加

し、最適レバレッジと信用スプレッドは低下する傾向が見られる。積立率については、表2において初期時点の金融資産価値が10から30へ増える時、年金負債価値にあまり変化はないので、49.37%から136.50%へと感応的に変動する。特に、金融資産価値が10の場合には年金の積立不足/資本価値の比率が40%以上となり、株主価値を大きく損なわれる。企業価値やスプレッドから判断すると、年金資産が多くの金融資産を持つ企業の倒産リスクは軽減されるといえる。

4.3 Lelandモデル [1994] との比較

この小節では、本稿のモデルとLeland [1994]のモデルによる数値計算の結果を比較する。年金リスクが母体企業の資本構成に反映されているモデルと反映されていないモデルを比較し、いかに年金リスクが重要であるかを確認することは興味深い。勿論、前提としている仮定や取り扱うパラメータの多くが異なるので、厳密な意味で結果を比較することは困難である。しかし、本稿のモデルの信頼性を検証していく上で2つのモデルの一貫性を調べることに意義がある。具体的には、Leland [1994]に従い、総企業価値を最適化する最適資本構成、事業負債価値の最大許容における資本構成、財務制限条項に元本保証が付与されている債券を発行した場合の最適資本構成の3つのケースに分けて検討していく。両モデルに共通するパラメータは初期時点の企業資産、リスクフリーレート、企業資産のボラティリティ、事業負債の回収率、法人税率である。また、本稿モデルにおける基本ケースのパラメータは表1と同じように設定する。

表4は最適資本構成に対する比較静学の結果を示している。最適資本構成では倒産の閾値は資本価値を最適化するように定め、事業負債の利払い額は総企業価値を最大化するように定める。基本ケースにおいて、Lelandモデルが示す信用スプレッドは78.21bpであるのに対し、本稿のモデルは100.65bpとより高い値を示している。また、本稿モデルでは、年金の積立不足は資本価値から控除されるとしているため、Lelandモデルと比べて総企業価値は低下すると思われる。しかし、基本ケースでは年金の積立不足は少ないので資本価値はあまり侵食されず、一方で負債価値と税効果利益が高まるため、本稿モデルの総企業価値のほうが高くなっている。

比較静学に関して、両モデルともリスクフリーレートの上昇により資本価値は増加する。Lelandモデルでは、信用スプレッドは75.97bpから83.13bpに変動する程度で、金利の変化にかなり頑健的である。他方、本稿のモデルが示す信用スプレッドは81.61bpから147.96bpまで上昇し、金利の変化により感応的である。両方のモデルとも、企業資産のボラティリティに対しては同様の感応性を持つ。とりわけ、信用スプレッドはかなり拡大する傾向がある。また、回収率や倒産コストに関しても同様の感応性があるといえる。

表5は事業負債価値の最大許容における資本構成の結果を示している。負債の許容量は企業がどれだけ事業負債を発行できる能力を有するかを意味する。負債の許容量を最大にする資本構成では、事業負債価値が最適化されるように利払い額を決定し、倒産水準は最適資本構成と同じく資本価値最大化により求められる。全般的には、2つのモデルはほぼ同様の感応結果を示しているが、注目すべきは、Lelandモデルが示す信用スプレッドは事業資産のボラティリティを除いてパラメータの変化に完全に硬直的であるという点である。両モデルとも、負債価値で表される企業の負債許容量は、企業の資産価値のボラティリティと税率の上昇に対して減少し、リスクフリーレートと回収率の上昇に対しては増加する傾向が見られる。総企業価値はリスクフリーレート、回収率、税率が高くなるにつれ増加している。特に、税率の変化は、倒産コストに比べて税効果利益が大幅に増えるために、総企業価値の増加に大きく貢献している。

表6は、財務制限条項に債権者保護のための元本保証が付与されている債券を発行した場合の

最適資本構成を表している。債券発行後に償還されない永久債では、発行時点の事業負債価値が債券の元本に相当する。企業の倒産水準は初期時点の事業負債価値に等しくなるように設定し、最適な利払い額は総企業価値を最大にするように定める。両モデルに共通して、保護規定がない最適資本構成と比較すれば、保護規定のある最適資本構成の最適な利払い額はかなり低い水準になることがわかる。最適レバレッジも低い水準に抑えられ、企業が元本保証の債券を発行する場合には負債の発行が抑制される。元本保証の財務制限条項付の債券を発行している企業の負債価値は小さいが、代わりに資本価値については大きくなっている。しかし、資本価値と負債価値を合わせた総企業価値自体は、保護規定のない場合と比べて全体的に小さくなっている。債権者に元本の保証を要する債券を発行しなければならないとき、事業債よりも株式による資金調達が選好されるようである。個別的にパラメータを見ると、両モデルともリスクフリーレート以外のパラメータに関しては同様の感応結果を示すが、リスクフリーレートの変化は資本特性に対して正反対の影響を与えている。

5. まとめ

本稿では、年金リスクが母体企業に反映されるような最適資本構成モデルを提示した。事前に給付額が定められている確定給付型の年金では、年金資産の運用の成果は年金の加入者ではなく、株主が年金資産の運用結果に対して責任を負うことになる。つまり、多額の年金の積立不足が生じた場合には、年金基金へ追加的な拠出を余儀なくされたり、あるいは株価の低下を招いてしまう。したがって、年金の積立不足に起因する年金リスクは母体企業の資本構成に大きな影響を及ぼす可能性があり、最適資本構成を考察する上で無視できない要因といえる。

本稿のモデルは条件付請求権アプローチを用い、企業資産と年金資産を原資産とした派生証券として負債を評価した後、最適な資本構成を導いた。年金リスクを組み込んだモデルは既存モデルとは異なる結果を導き、年金リスクを内在することの重要性がうかがえる。本稿のモデルの比較静学及び既存モデルとの比較により得られた結果は以下の通りである。

1. 年金リスクは母体企業の倒産リスクを高め、財政状態を悪化させる。企業の資本構成は年金リスクを明確に認識することで大きく変わる可能性がある。
2. 企業資産価値と株式インデックスの相関は資本構成に重大な影響を与える要因である。相関が正かつ強いほど、倒産リスクは抑えられ企業価値は向上する。
3. 企業価値の観点から、企業資産価値と株式インデックスの相関が正である場合には株式への投資が企業にとって有利であり、負の場合には債券への投資を行うほうが有利となる。ただし、株主にとっては常に債券への投資が有益である。
4. 退職給付の支払いと拠出額が資本構成に及ぼす影響は強く、両者のバランスが崩れると資本構成は大きく変動する。

最後に、本稿のモデルの問題点と拡張の可能性について述べる。まず、本稿では、拠出前と拠出後に区別して企業価値のダイナミクスを設定した。しかし、企業がその資産の一部から、連続的に γ の拠出を行うのであれば、企業価値のダイナミクスは、

$$dV_t = (rV_t - \gamma)dt + \sigma_1 V_t dW_t^1$$

年金資産の金融資産のダイナミクスに関しては、

$$dY_t = (rY_t + (\gamma - p))dt + \alpha\sigma_2 Y_t dW_t^2$$

のように表現するべきである。しかし、本稿のモデルでは、閾値 x_B や最適資本構成について閉じた形で解を求める必要があったので、企業価値と金融資産に関して、(2) や (7) のように設定した。これらの問題点を含め、資産側の設定についてのより精緻な定式化は今後の課題である。

第二に、年金資産の投資配分に関する問題である。本稿では、最初にアセットミックスを決定すれば、それ以降は全く変更しないと想定した。言い換えれば、株式と債券の投資比率を外生的に与え、定数として扱った。したがって、本稿のモデルは企業価値を最適化するためにどのようなアセットミックスが良いのかという問題には解答を示していない。この問題に答えるためには、最適な株式と債券の投資配分を考慮したモデルを構築する必要があるだろう。

第三に、年金負債の内部構造をより精緻化する点である。本稿のモデルでは、年金の加入者の年齢構成や退職までの期間を明示的に扱わず、每期一定額の退職給付が支払われるとした。これにより、事業負債と同様、年金負債も永久債のように評価することができた。しかし、年金基金の成熟度によって、母体企業からの拠出と加入者への給付のバランスは変わる。したがって、個々の加入者に対する年金債務を考え、基金の実態に合わせてそれらを積算すれば、より現実的な年金負債モデルになるであろう。

最後に、リスクフリーレートを確率的に取り扱うことである。数値例で見られるように、リスクフリーレートが企業の資本特性に及ぼす影響は非常に大きい。特に、リスクフリーレートは年金資産として保有される債券価値に影響するだけでなく、長期的な負債である年金債務の割引率の基礎になる。長期の満期を持つ年金負債の価値が市場金利に大きく左右される以上、リスクフリーレートを確率的に考えるほうが望ましい。今後の研究では、これらの問題点を踏まえて、より現実に即したモデルの構築を目指す。

付録 A. 退職給付の支払い

一般に、加入者の年齢構成や勤続年数の構成、給与体系は複雑で、基金全体の給付額や年金負債の見積りを計算することは難しい。しかし、本稿では仮定 4 を採用し、年金は定常状態にあると考えているので、企業が支払う退職給付額は時間の経過とは独立で一定となる。

上記の仮定の下で (6) を証明する。確定給付型の年金を想定し、時点 t における勤続年数 s の加入者の予測給付債務を $PBO(s, t)$ とする。加入者の退職一時金を p 、加入から退職するまでの期間を T とするとき、当該加入者の予測給付債務 $PBO(s, t)$ は、定義により

$$PBO(s, t) = \frac{ps}{T} e^{-rT} e^{rs} \quad (19)$$

となる。一方、勤続年数 s の加入者のための拠出額を $m(s, t)$ とすると、 $m(s, t)$ は (19) の予測給付債務を勤続年数 s に関して微分することで

$$m(s, t) = \frac{dPBO(s, t)}{ds} \quad (20)$$

となる。ただし、利息費用や年金資産の運用損益などの調整は明示的に扱わず、退職給付費用は勤務費用に一致すると考えている。時点 t におけるすべての（勤続年数の）加入者のための拠出

額合計を $M(t)$ とすれば、 $m(s, t)$ を勤続年数の期間 $[0, T]$ で積分することで

$$M(t) = \int_0^T m(s, t) ds = PBO(T, t) - PBO(0, t) = p \quad (21)$$

が得られる。

付録 B. 初到達時刻の分布

以下のような 2 次元ブラウン運動 (x_t, y_t) を考える。

$$x_t = x_0 + \mu_x t + \sigma_x \bar{W}_t^x \quad (22)$$

$$y_t = y_0 + \mu_y t + \sigma_y \bar{W}_t^y \quad (23)$$

ここで、ドリフト μ_x, μ_y およびボラティリティ σ_x, σ_y はいずれも定数で、標準ブラウン運動 \bar{W}_t^x, \bar{W}_t^y は相関 ρ を持つとする。また、デフォルト時刻 τ を

$$\tau = \inf\{t : x_t = x_B\}, \quad x_B < x_0 \quad (24)$$

すなわち、確率過程 x_t が閾値 x_B に最初に到達する時刻と定義する。

B.1 デフォルト時刻の密度関数およびラプラス変換

ここでは、 τ の密度関数 $f(t)$ とそのラプラス変換 $\mathcal{L}(\eta) = E[e^{-\eta\tau}]$ の結果を示す。まず、デフォルト時刻の密度関数は

$$f(t) = \frac{x_0 - x_B}{\sigma_x} t^{-\frac{3}{2}} \phi(a(t)) \quad (25)$$

で与えられる。ここで、 $a(t)$ は

$$a(t) = \frac{z(t)}{\sqrt{t}} = \frac{(x_0 - x_B + \mu_x)t}{\sigma_x \sqrt{t}}$$

である。詳しくは木島 [1994] を参照されたい。次に、ラプラス変換を

$$\mathcal{L}(\eta) = E[e^{-\eta\tau}] = \int_0^\infty e^{-\eta t} f(t) dt, \quad \eta > 0$$

と定義する。(25) を用いて直接計算すると、デフォルト時刻のラプラス変換

$$\mathcal{L}(\eta) = \exp\left(-\frac{x_0 - x_B}{\sigma_x} (\sqrt{\mu_x^2 + 2\sigma_x^2 \eta} + \mu_x)\right) \quad (26)$$

を得る。ラプラス変換を η に関して微分すると、

$$\mathcal{L}'(\eta) = E[(e^{-\eta\tau})'] = -E[(\tau e^{-\eta\tau})] \quad (27)$$

となるが、これらの結果は事業負債の価値 (9) などの導出の際に用いられる。詳細は Kawakami et al. [2006] を参照されたい。

B.2 同時密度関数

(τ, y_τ) の同時密度関数を $h(t, y)$ とする。 $g(y|\tau = t)$ をデフォルト時刻における y_τ の条件付密度関数とすると、 $h(t, y) = f(t)g(y|\tau = t)$ と表すことができる。このとき、 $h(t, y)$ は

$$h(t, y) = \frac{x_0 - x_B}{\sigma_x \sigma_y \sqrt{1 - \rho^2} t^2} \phi(a(t)) \phi(b(t, y)) \quad (28)$$

のように得られる。ただし、 $b(t, y)$ は

$$b(t, y) = \frac{y - y_0 - \mu_y t + \sigma_y \rho \left(\frac{(x_0 - x_B) + \mu_x t}{\sigma_x} \right)}{\sigma_y \sqrt{(1 - \rho^2)} t}$$

である。

同時密度関数 $h(t, y)$ が得られれば、(10) の年金負債価値における期待値 $E[e^{y_\tau - r\tau}]$ は以下のよう
に評価できる。

$$E[e^{y_\tau} e^{-r\tau}] = \exp \left\{ y_0 - \frac{\sqrt{K} + \mu_x + \sigma_x \sigma_y \rho}{\sigma_x^2} (x_0 - x_B) \right\}, \quad K \geq 0$$

ただし

$$K = \mu_x^2 + 2\sigma_x^2(r - \mu_y) + 2\sigma_x \sigma_y \rho \mu_x - \sigma_x^2 \sigma_y^2 (1 - \rho^2)$$

である。 $K < 0$ ならば $E[e^{y_\tau - r\tau}]$ は発散する。これらの証明については Kawakami et al. [2006] を参照されたい。

参考文献

- [1] 企業財務制度研究会（編集）[1999] 『年會會計』，中央經濟社。
- [2] 木島正明 [1994] 『ファイナンス工学入門，第 I 部：ランダムウォークとブラウン運動』，日科技連。
- [3] Bicksler, J.L and A.H. Chen [1985], “The Integration of Insurance and Taxes in Corporate Pension Strategy”, *Journal of Finance*, **40**, pp.943–955.
- [4] Black, F. [1980], “The Investment Policy Spectrum: Individuals, Endowment Funds and Pension Funds”, *Financial Analysts Journal*, **32**, pp.23–31.
- [5] Black, F. and M. Scholes [1973], “The Pricing of Options and Corporate Liabilities”, *Journal of Political Economy*, **81**, pp.637–654.
- [6] Black, F. and J.C. Cox [1976], “Valuing Corporate Securities: Some Effects of Bond Indenture Provisions”, *Journal of Finance*, **31**, pp.351–367.
- [7] Bodie, Z. [1990], “The ABO, the PBO and Pension Investment Policy”, *Financial Analysts Journal*, **46**, pp.27–34.
- [8] Bulow, J.I. [1982], “What Are Corporate Pension Liabilities ?” *Quarterly Journal of Economics*, **97**, pp.435–452.

- [9] Eom, H.Y., J. Helwege and J. Huang [2004], “Structural Models of Corporate Bond Pricing: An Empirical Analysis”, *Review of Financial Studies*, **17**, pp.499–544.
- [10] Goldstein, R., N. Ju and H. Leland [2001], “An EBIT-Based Model of Dynamic Capital Structure”, *Journal of Business*, **74**, pp.433–512.
- [11] Harrison, J.M. and W.F. Sharpe [1983], “Optimal Funding and Asset Allocation Rules for Defined-Benefit Pension Plans”, In Z. Bodie and J. Shoven, *Financial Aspects of the United States Pension System*, pp.91–106, University of Chicago Press.
- [12] Kawakami, T., M. Kijima and S. Yumae [2006], “Optimal Capital Structure Involving Pension Risk”, Daiwa International Workshop on Financial Engineering, University of Tsukuba.
- [13] Kijima, M. [2002], *Stochastic Processes with Applications to Finance*, CHAPMAN & HALL/CRC, London.
- [14] Leland, E.H. [1994], “Corporate Debt Value, Bond Covenants, and Optimal Capital Structure”, *Journal of Finance*, **49**, pp.1213–1253.
- [15] Leland, E.H. and K. Toft [1996], “Optimal Capital Structure, Endogenous Bankruptcy, and the Term Structure of Credit Spreads”, *Journal of Finance*, **51**, pp.987–1019.
- [16] Merton, R. [1974], “On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rate”, *Journal of Finance*, **29**, pp.419–439.
- [17] Sharpe, W.F. [1976], “Corporate Pension Funding Policy”, *Journal of Financial Economics*, **3**, pp.183–193.
- [18] Tepper, I. [1982], “The Future of Private Pension Funding”, *Financial Analysts Journal*, **38**, pp.25–31.
- [19] Treynor, J.L. [1977], “The Principles of Corporate Pension Finance”, *Journal of Finance*, **32**, pp.627–638.

表 2: 比較静学 ($\rho = 0.40$)

		資本 価値	年金負債 価値	事業負債 価値	総企業 価値	年金 積立率 †	財務 レバレッジ *	積立不足 (余剰) /資本価値 ‡	信用 スプレッド **
基本ケース		33.68	21.18	101.05	134.74	94.45	74.99	-3.50	100.65
リスクフリー	0.02	36.74	24.57	92.07	128.81	81.38	71.48	-12.44	117.77
レート	0.04	33.09	18.33	104.17	137.26	109.13	75.89	5.05	81.56
	0.05	30.43	15.87	106.66	137.09	126.01	77.80	13.57	81.61
企業資産	0.15	16.80	25.64	121.89	138.69	78.02	87.88	-33.57	60.72
ボラティリティ	0.25	45.20	15.92	88.05	133.25	125.62	66.08	9.03	121.69
株式	0.15	34.15	21.32	99.85	134.01	93.79	74.51	-3.87	101.87
ボラティリティ	0.25	33.12	21.04	102.32	135.44	95.04	75.54	-2.86	99.70
運用比率	0.25	34.51	21.49	98.73	133.24	93.06	74.10	-4.32	103.42
	0.75	32.48	20.93	103.64	136.12	95.57	76.14	-2.86	98.98
相関	-0.8	29.09	25.66	91.90	120.99	77.96	75.96	-19.46	146.14
	0	34.83	21.91	96.74	131.57	91.27	73.53	-5.48	107.69
	0.8	31.02	20.73	106.4	137.43	96.49	77.43	-2.35	98.06
抛出現	0.3	37.85	19.43	95.73	133.58	102.93	71.66	1.51	70.49
	0.7	34.90	23.52	101.49	136.39	85.01	74.41	-10.09	100.69
	0.9	35.73	25.27	102.08	137.81	79.15	74.10	-14.75	105.83
退職給付額	0.75	37.01	17.74	101.27	138.28	112.75	73.27	6.11	80.43
	1.25	27.68	24.55	103.11	130.79	81.47	78.84	-16.44	111.67
	1.5	22.03	27.90	104.70	126.70	71.68	82.61	-35.86	122.38
金融資産	10	25.43	20.26	97.19	122.63	49.37	79.26	-40.35	113.84
	30	37.01	21.98	101.27	138.28	136.50	73.24	21.67	80.42

† 積立率は初期時点の年金負債に対する年金資産の比率

* 最適資本構成下の最適レバレッジであり、初期時点の総企業価値に対する事業負債の比率

‡ (年金資産価値) - (年金負債価値) に対する資本価値の比率。プラスは年金の積立余剰、マイナスは積立不足の状態である。

** 信用スプレッドは最適利払い率とリスクフリーレートの差である。最適利払率は (最適利払い額) / (初期時点の事業負債) × 100% と計算する。

表 3: 比較静学 ($\rho = -0.40$)

		資本 価値	年金負債 価値	事業負債 価値	総企業 価値	年金 積立率 †	財務 レバレッジ *	積立不足 (余剰) /資本価値 ‡	信用 スプレッド **
基本ケース		33.42	23.24	93.87	127.28	85.95	73.75	-9.69	122.32
リスクフリー	0.02	26.90	30.65	85.72	112.62	65.26	76.11	-39.59	162.36
レート	0.04	33.08	19.43	104.22	137.30	102.96	75.91	1.72	81.32
	0.05	30.43	16.78	106.66	137.09	119.17	77.80	10.58	81.62
企業資産	0.15	21.25	26.97	112.41	133.66	74.16	84.10	-32.80	63.01
ボラティリティ	0.25	36.58	21.05	83.17	119.74	95.03	69.45	-2.87	221.88
株式	0.15	34.05	22.85	94.46	128.51	87.54	73.50	-8.37	117.80
ボラティリティ	0.25	32.59	23.76	93.33	125.92	84.18	74.11	-11.57	127.42
運用比率	0.25	34.45	22.48	95.13	128.51	87.54	73.50	-7.20	113.88
	0.75	31.58	24.32	93.33	125.92	84.18	74.12	-13.68	127.42
拠出額	0.3	32.35	20.97	93.20	125.54	95.38	74.23	-3.00	120.87
	0.7	34.69	25.56	94.29	128.98	78.24	73.11	-16.03	123.33
	0.9	36.02	27.85	94.71	130.73	71.83	72.45	-21.70	123.97
退職給付額	0.75	39.48	19.66	91.77	131.25	101.71	69.92	0.86	110.79
	1.25	27.41	26.85	95.46	122.87	74.50	77.69	-24.99	133.49
	1.5	21.66	30.45	96.67	118.33	65.69	81.70	-48.25	144.32
金融資産	10	25.29	21.23	93.61	118.89	47.10	78.73	-44.40	124.88
	30	37.01	20.29	101.27	138.28	136.50	73.24	+26.24	80.42

† 積立率は初期時点の年金負債に対する年金資産の比率

* 最適資本構成下の最適レバレッジであり、初期時点の総企業価値に対する事業負債の比率

‡ (年金資産価値)-(年金負債価値)に対する資本価値の比率。プラスは年金の積立余剰、マイナスは積立不足の状態である。

** 信用スプレッドは最適利払い率とリスクフリーレートの差である。最適利払い率は (最適利払い額)/(初期時点の事業負債) × 100% と計算する。

表 4: Leland モデルとの比較：最適資本構成のケース

Leland モデル		資本価値	負債価値	税効果利益	倒産コスト	総企業価値	財務レバレッジ *	利払い率	信用スプレッド **
基本ケース		39.57	82.17	26.95	5.19	121.76	67.50	3.11	78.21
リスクフリー	0.01	48.64	65.32	20.55	6.59	113.96	57.32	1.19	83.13
レート	0.02	43.37	75.02	24.22	5.83	118.39	63.37	2.10	80.10
	0.04	36.61	87.82	29.10	4.67	124.43	70.58	4.19	76.91
	0.05	34.19	92.42	30.86	4.25	126.62	72.99	5.32	75.97
企業資産	0.15	33.48	93.78	31.38	4.12	127.26	73.69	3.21	42.59
ボラティリティ	0.25	43.72	74.36	23.96	5.87	118.08	62.97	3.16	125.46
回収率	0	49.23	68.52	23.98	6.23	117.75	58.19	2.54	70.00
	0.25	44.91	74.59	25.42	5.92	119.50	62.42	2.79	73.44
	0.75	32.80	92.01	28.42	3.60	124.81	73.72	3.55	85.28
	1	24.00	105.24	29.23	0	129.23	81.43	4.18	96.83
税率	0.30	42.46	73.88	20.82	4.48	116.33	63.50	2.72	68.50
	0.40	37.17	91.09	34.10	5.85	128.25	71.02	3.53	87.70
本稿モデル									
基本ケース		33.68	101.05	38.66	2.74	134.74	74.99	4.05	100.65
リスクフリー	0.01	39.78	79.75	33.02	4.45	119.52	66.72	1.98	147.96
レート	0.02	36.74	92.07	36.47	3.08	128.81	71.48	2.93	117.77
	0.04	33.09	104.17	39.30	2.05	137.26	75.89	5.02	81.56
	0.05	30.43	106.66	39.45	2.36	137.09	77.80	6.20	81.61
企業資産	0.15	16.80	121.88	46.62	2.29	138.69	87.88	4.39	60.72
ボラティリティ	0.25	45.20	88.05	34.48	1.23	133.25	66.08	3.71	121.69
回収率	0	39.91	93.77	37.40	2.21	133.69	70.14	3.58	82.15
	0.25	37.26	96.88	38.04	2.62	134.14	72.22	3.78	90.53
	0.75	28.60	106.87	39.05	2.22	135.47	78.89	4.42	113.49
	1	20.78	115.36	38.55	0	136.13	84.74	4.97	131.21
税率	0.30	34.54	92.45	30.67	2.49	127.00	72.80	3.67	96.41
	0.40	32.92	110.91	47.98	2.98	143.82	77.11	4.49	104.74

* 最適資本構成下の最適レバレッジであり、初期時点の総企業価値に対する事業負債の比率

** 信用スプレッドは最適利払い率とリスクフリーレートの差である。最適利払い率は（最適利払い額）/（初期時点の事業負債）× 100% と計算する。

表 5: Leland モデルとの比較：負債最大許容量のケース

Leland モデル		資本価値	負債価値	税効果利益	倒産コスト	総企業価値	財務レバレッジ *	利払い率	信用スプレッド **
基本ケース		16.22	96.52	28.33	15.59	112.74	85.61	4.83	200.00
リスクフリー	0.01	15.89	86.00	22.79	20.90	101.89	84.41	2.58	200.00
レート	0.02	16.24	91.85	25.91	17.82	108.09	84.98	3.67	200.00
	0.04	16.03	100.36	30.27	13.88	116.39	86.23	6.02	200.00
	0.05	15.75	103.60	31.87	12.53	119.35	86.80	7.25	200.00
企業資産	0.15	15.64	104.57	32.35	12.14	120.21	86.99	4.31	112.50
ボラティリティ	0.25	16.23	91.43	25.69	18.03	107.66	84.93	5.60	312.50
回収率	0	24.00	83.52	29.23	21.72	107.52	77.68	4.18	200.00
	0.25	20.29	89.43	29.05	19.32	109.72	81.51	4.47	200.00
	0.75	11.81	105.19	26.67	9.66	117.01	89.90	5.26	200.00
	1	7.20	116.12	23.32	0	123.32	94.16	5.81	200.00
税率	0.30	15.57	90.75	22.40	16.08	106.32	85.36	4.54	200.00
	0.40	16.87	103.28	35.27	15.11	120.15	85.96	5.16	200.00
本稿モデル									
基本ケース		16.52	108.15	37.73	9.69	124.67	86.75	5.27	187.29
リスクフリー	0.01	1.46	89.88	31.72	13.08	91.34	98.40	2.78	209.01
レート	0.02	12.58	96.08	32.89	12.69	108.65	88.43	3.94	210.46
	0.04	16.90	113.75	39.48	8.84	130.65	87.06	6.63	183.25
	0.05	13.52	129.18	46.61	3.92	142.69	90.53	7.91	112.22
企業資産	0.15	9.47	124.95	45.88	5.82	134.42	92.96	4.98	98.63
ボラティリティ	0.25	18.74	96.15	31.27	13.81	114.88	83.69	5.88	311.63
回収率	0	25.00	100.69	39.01	11.59	125.69	80.11	4.68	164.45
	0.25	21.26	103.90	38.62	11.14	125.16	83.02	4.94	175.53
	0.75	124.13	113.78	35.86	6.53	124.13	91.66	5.69	200.24
	1	1.99	121.52	32.07	0	123.50	98.39	6.25	214.52
税率	0.30	15.40	100.47	29.81	10.27	115.87	86.71	4.93	190.64
	0.40	17.60	117.16	47.01	9.15	134.76	86.94	5.67	183.96

* 最適資本構成下の最適レバレッジであり、初期時点の総企業価値に対する事業負債の比率

** 信用スプレッドは最適利払い率とリスクフリーレートの差である。最適利払い率は (最適利払い額) / (初期時点の事業負債) × 100% と計算する。

表 6: Leland モデルとの比較：保護規定ありの財務制限条項付のケース

Leland モデル		資本価値	負債価値	税効果利益	倒産コスト	総企業価値	財務レバレッジ *	利払い率	信用スプレッド **
基本ケース		71.09	34.74	10.52	4.69	105.83	32.82	1.12	42.21
リスクフリー	0.01	89.44	11.95	3.46	2.07	101.39	11.79	0.15	26.42
レート	0.02	78.61	25.93	7.90	3.36	104.54	24.80	0.61	35.00
	0.04	68.13	41.58	13.29	3.59	109.70	37.90	1.84	42.79
	0.05	65.06	46.59	15.10	3.45	111.65	41.73	2.53	43.47
企業資産	0.15	64.20	48.02	15.62	3.40	112.22	42.79	1.56	24.71
ボラティリティ	0.25	79.26	25.03	7.60	3.31	104.29	24.00	0.89	53.96
回収率	0	78.70	26.96	9.44	3.77	105.66	25.52	0.94	48.84
	0.25	76.03	30.35	10.18	3.81	106.37	28.53	1.05	45.16
	0.75	66.74	42.10	11.72	2.88	108.84	38.68	1.38	28.19
	1	57.11	54.29	11.40	0	111.40	48.73	1.63	0
税率	0.30	73.41	32.42	8.83	2.99	105.84	30.63	1.08	33.96
	0.40	71.59	37.38	13.24	4.27	108.97	34.31	1.29	44.44
本稿モデル									
基本ケース		69.70	44.00	18.33	3.43	113.70	38.70	1.72	90.66
リスクフリー	0.01	61.31	40.27	18.54	5.56	101.58	39.65	0.95	135.86
レート	0.02	66.46	42.25	18.31	4.38	108.71	38.87	1.31	110.46
	0.04	69.15	46.56	18.68	2.97	115.71	40.24	2.23	78.07
	0.05	67.22	49.30	19.21	2.70	116.52	42.31	2.81	69.88
企業資産	0.15	56.97	57.19	23.26	3.65	114.16	50.09	2.07	62.58
ボラティリティ	0.25	74.84	36.36	15.01	3.82	111.20	32.70	1.57	132.08
回収率	0	76.76	36.62	17.36	2.55	113.37	32.30	1.41	85.40
	0.25	73.85	39.72	17.91	3.12	113.56	34.97	1.55	89.70
	0.75	63.18	50.35	18.26	2.97	113.53	44.35	1.94	84.30
	1	51.13	60.86	16.31	0	112.00	54.34	2.16	55.32
税率	0.30	68.49	42.84	15.54	3.03	111.33	38.48	1.66	87.35
	0.40	71.04	45.06	21.15	3.80	116.10	38.81	1.78	93.83

* 最適資本構成下の最適レバレッジであり、初期時点の総企業価値に対する事業負債の比率

** 信用スプレッドは最適利払い率とリスクフリーレートの差である。最適利払い率は (最適利払い額) / (初期時点の事業負債) × 100% と計算する。

Optimal Capital Structure Involving Pension Risk

Takashi Kawakami

NLI Research Institute Financial Research Group
4-1-7, KUDANKITA, CHIYODA-KU, TOKYO, 102-0073, Japan.

Masaaki Kijima

Tokyo Metropolitan University and Kyoto University
Graduate School of Social Sciences, Tokyo Metropolitan University,
1-1 Minami-Ohsawa, Hachiohji, Tokyo 192-0397, Japan.

Shouji Yumae

Hosei University
Faculty of Economics, Hosei University,
4342 Aihara-machi, Machida-shi Tokyo 194-0298, Japan.

Abstract

Recently, the deficits of funding in pension fund have been a serious problem for firms with severe underfunding. The deficits of funding are recognized as the liabilities of a sponsoring firm and added on the balance sheet. A sponsoring firm is occasionally forced to make additional contributions from the profits it gains. Therefore, the severe underfunding can have great influence on the financial state or the profitability of the sponsoring firm. In this paper, we present the optimal capital structure model that incorporating the pension fund into the sponsoring firm's capital structure, and consider the effect of pension risk on the capital structure. We express analytically the optimal capital structure with pension risk, adapting contingent claim approach. And we try comparative statics to consider how the factors related to pension risk affect the capital structure of the sponsoring firm. Comparing with the existing model without pension risk (Leland [1994]), we verify the importance of pension risk in capital structure analysis.